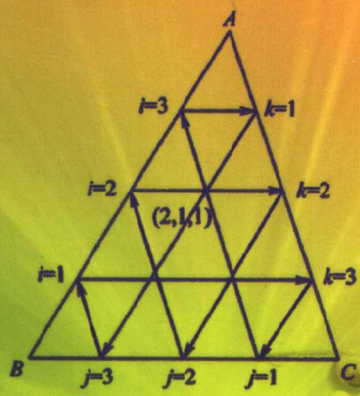
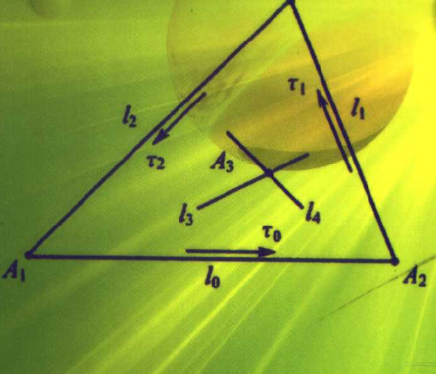
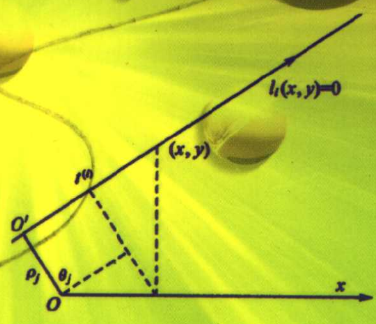
21世纪高等院校优秀教材

# 多元逼近

梁学章　李　强　编著




国防工業出版社
National Defense Industry Press

21 世纪高等院校优秀教材

# 多元逼近

梁学章 李强 编著

国防工业出版社

·北京·

# 内 容 简 介

本书包括多元线性正算子逼近、多元插值、多元 Chebyshev 逼近、多元样条函数、正交小波等内容。本书在注重对多元逼近基本理论、基本方法讲解的同时,还力图反映多元逼近发展的近代研究成果。本书内容通俗易懂,适合作为理工科高年级本科生和研究生相关专业课程的教材,同时也可作为有关工程技术人员的参考用书。

**图书在版编目(CIP)数据**

多元逼近/梁学章,李强编著 . —北京:国防工业出版社,2005.8

21 世纪高等院校优秀教材

ISBN 7-118-03992-6

Ⅰ. 多... Ⅱ. ①梁... ②李... Ⅲ. 函数逼近论—高等学校—教材 Ⅳ. O174.41

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 067013 号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码 100044)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 710×960 1/16 印张 7 132 千字

2005 年 8 月第 1 版 2005 年 8 月北京第 1 次印刷

印数:1—4000 册 定价:15.00 元



国防书店:(010)68428422 发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535 发行业务:(010)68472764

# 前　　言

多元逼近(即多元函数逼近)是一元函数逼近理论的发展,是在逼近工具和被逼近对象方面的多元推广。由于现代科学技术(如多元函数的计算、CAGD中的曲面技术、有限元等)发展的需要,多元逼近理论的研究日益受到数学、计算机科学、物理及工程等领域的专家和科技工作者的重视,已成为当今逼近论和计算数学的研究热点之一。以多元逼近为主题的国际学术会议已召开过20余次。

自1995年起,吉林大学数学所便将《多元逼近》列为计算数学专业硕士研究生学位课。该课程的特点是理论性强、实用性广,对培养高素质的计算数学专业及相关专业研究生具有重要作用。目前,虽然关于多元逼近方面的学术论文很多,但适合研究生教学的教材却很少见。正是为了解决这一问题,我们编写了本书。本书是在作者结合多年的教学和科研经验,并对多年使用过的授课讲义进行多次修改的基础上完成的。内容包括多元线性正算子逼近、多元插值、多元 Chebyshev 逼近、多元样条逼近、多元小波逼近等。

本书注重对多元逼近基本理论、基本方法讲解的同时,还力图反映多元逼近发展的近代研究成果。本书内容通俗易懂,适合作为理工科高年级本科生和研究生相关专业课程的教材,同时也可作为有关工程技术人员的参考用书。由于作者水平有限,书中不妥与错误疏漏之处在所难免,敬请广大读者与同行批评指正。

编　者

2005年5月

# 目　　录

# 第一章 多元线性正算子逼近

本章从 Weierstrass 逼近定理讲起,研究逼近的可能性及线性正算子逼近方法。

## §1.1 Weierstrass 逼近定理

用 $C[0,1]$表示定义在$[0,1]$上的所有实值连续函数构成的集合。在《数值逼近》课中我们学过如下可逼近性定理。

**定理 1.1**(Weierstrass) 设 $f(x)\in C[0,1]$,则对任何 $\varepsilon>0$ 恒存在多项式 $p(x)$,使得如下估计式一致成立:

$$|f(x)-p(x)|<\varepsilon, \forall x\in[0,1] \tag{1.1}$$

该定理说明 $C[0,1]$中的函数可由多项式逼近,或者说多项式类在 $C[0,1]$中稠密。

定理 1.1 的证明方法有很多,但其中最好的方法是 Bernstein 证法。其基本做法是构造所谓 Bernstein 多项式

$$B_n[f(t);x]=\sum_{v=0}^{n}f\left(\frac{v}{n}\right)p_{n,v}(x) \tag{1.2}$$

式中 $P_{n,v}(x)=\binom{n}{v}x^v(1-x)^{n-v}$, $\binom{n}{v}=\frac{n!}{(n-v)!\ v!}$。然后利用恒等式 $\sum_{v=0}^{n}p_{n,v}(x)\equiv 1$ 和 $\sum_{v=0}^{n}(v-nx)^2p_{n,v}(x)\equiv nx(1-x)$ 证明:

$$\lim_{n\to\infty}B_n[f(t);x]=f(x) \tag{1.3}$$

在区间$[0,1]$上一致成立。这种证法其实是利用一种特殊的线性正算子来证明可逼近性(多项式簇对连续函数类的可逼近性)。

该定理很容易推广到多元情形。考虑 $k$ 维方体

$$S_k=\{(x_1,x_2,\cdots,x_k)\in R^k|0\leqslant x_i\leqslant 1,i=1,2,\cdots,k\} \tag{1.4}$$

对于给定的 $k$ 元实值连续函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_k)\in C(S_k)$构造 $k$ 元乘积型 Bernstein 多项式

$$B^f_{n_1,\cdots,n_k}(x_1,\cdots,x_k)=\sum_{v_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{v_k=0}^{n_k}f\left(\frac{v_1}{n_1},\cdots,\frac{v_k}{n_k}\right)p_{n_1,v_1}(x_1)\cdots p_{n_k,v_k}(x_k) \quad (1.5)$$

可以证明在 $S_k$ 上一致地有

$$\lim_{\substack{n_i\to\infty\\(i=1,\cdots,k)}} B^f_{n_1,\cdots,n_k}(x_1,\cdots,x_k)=f(x_1,\cdots,x_k) \quad (1.6)$$

与此相对应地,还可考虑 $k$ 维单纯形上的 Bernstein 多项式。定义

$$\Delta_k=\{(x_1,\cdots,x_k)\in R^k \mid x_1+\cdots+x_k\leqslant 1, x_i\geqslant 0, i=1,\cdots,k\} \quad (1.7)$$

函数 $f(x_1,\cdots,x_k)\in C(\Delta_k)$ 的 Bernstein 多项式定义为

$$\overline{B}^f_n(x_1,\cdots,x_k)=\sum_{\substack{v_1,\cdots,v_k\geqslant 0\\ v_1+\cdots+v_k\leqslant n}} f\left(\frac{v_1}{n},\cdots,\frac{v_k}{n}\right)p_{n;v_1,\cdots,v_k}(x_1,\cdots,x_k) \quad (1.8)$$

式中

$$p_{n;v_1,\cdots,v_k}(x_1,\cdots,x_k)=$$

$$\binom{n}{v_1,\cdots,v_k}x_1^{v_1}\cdots x_k^{v_k}(1-x_1-\cdots-x_k)^{n-v_1-\cdots-v_k}$$

$$\binom{n}{v_1,\cdots,v_k}=\frac{n!}{v_1!v_2!\cdots v_k!(n-v_1-\cdots-v_k)!}$$

**定理 1.2** 若 $f(x_1,\cdots,x_k)\in C(\Delta_k)$,则在 $\Delta_k$ 上一致地有

$$\lim_{n\to\infty}\overline{B}^f_n(x_1,\cdots,x_k)=f(x_1,\cdots,x_k) \quad (1.9)$$

以上考虑的是标准方体和标准单纯形上的逼近问题。经过将变数放大适当的倍数或作平移,可变换到任意长方体或单纯形上去。这时逼近工具仍然是多元多项式。

我们希望将上述可逼近定理(定理 1.1)进行推广,使得所考虑的区域具有更大的任意性(可以是紧致的度量空间,或是紧致的 Hausdorff 空间)。逼近工具也不一定限于是多元多项式(可以是某个所谓"代数"的函数簇),也就是要介绍的 Weierstrass 定理的 Stone 推广。

设 $\Omega\subset R^k$ 是有界闭集(因而是紧致集),$C(\Omega)$表示定义在 $\Omega$ 上的所有实值连续函数做成的空间。我们来研究 $C(\Omega)$中函数的可逼近问题。

**定义 1.1** 如果 $f_1,f_2\in\Phi\Rightarrow\max\{f_1,f_2\}\in\Phi$ 及 $\min\{f_1,f_2\}\in\Phi$,称函数族 $\Phi\subset C(\Omega)$为一个"格"。此处 $\max\{f_1,f_2\}(x)=\max\{f_1(x),f_2(x)\}$, $\forall x\in\Omega$。

显然 $C(\Omega)$本身就是一个格。

**定理 1.3** 设 $\Phi\subset C(\Omega)$是一个格,$f\in C(\Omega)$,则 $f$ 可用 $\Phi$ 中的元素一致逼近的充分必要条件是:对于任何 $P_1,P_2\in\Omega$ 及任何 $\varepsilon>0$,均有 $t(P)\in\Phi$ 使得

$$|f(P_i) - t(P_i)| < \varepsilon, i = 1,2 \tag{1.10}$$

**证明　必要性**　设 $f \in C(\Omega)$ 可用 $\Phi$ 中的元素一致逼近，则对于任何 $\varepsilon > 0$，有 $t(P) \in \Phi$，使得对任何 $P \in \Omega$ 均有

$$|f(P) - t(P)| < \varepsilon$$

此时式(1.10)显然成立。

**充分性**　对于任给 $\varepsilon > 0$，假设条件式(1.10)是成立的，我们将构造一个函数 $s(P) \in \Phi$，使得

$$|f(P) - s(P)| < \varepsilon, \forall P \in \Omega \tag{1.11}$$

其构造方法如下：由条件式(1.10)可知，对任何 $Q, V \in \Omega$ 均可找到 $\Phi$ 中的函数 $t(P) = t(P; Q, V)$ 使得

$$|f(Q) - t(Q)| < \varepsilon, |f(V) - t(V)| < \varepsilon \tag{1.12}$$

特别使

$$t(V) < f(V) + \varepsilon \tag{1.13}$$

由于 $t(P)$ 和 $f(P)$ 是连续函数，故存在 $V$ 的开邻域 $N_V$ 使

$$t(P) < f(P) + \varepsilon, \text{当 } P \in N_V \text{ 时} \tag{1.14}$$

我们暂时取定 $Q$ 点，让 $V$ 跑遍 $\Omega$，则 $\{N_V, V \in \Omega\}$ 覆盖了 $\Omega$。因 $\Omega$ 为紧致集，根据有限覆盖定理，必存在 $\Omega$ 的有限覆盖，设为 $N_{V_1}, N_{V_2}, \cdots, N_{V_m}$。这时有

$$t(P; Q, V_i) < f(P) + \varepsilon, P \in N_{V_i}, i = 1, \cdots, m \tag{1.15}$$

利用它们，我们定义以 $Q$ 点为参数的函数

$$t^-(P; Q) = \min\{t(P; Q, V_1), \cdots, t(P; Q, V_m)\} \tag{1.16}$$

则 $t^-(P; Q) \in \Phi$。且由式(1.15)有(见图 1.1)

$$t^-(P; Q) < f(P) + \varepsilon, P \in \Omega \tag{1.17}$$

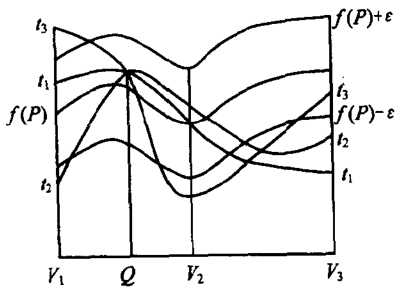



图 1.1

这是 $t^-(P)=t^-(P;Q)$ 的一条重要性质。进一步我们来看当 $P=Q$ 时 $t^-(P)$ 的大小。由式(1.12)可知

$$|f(Q)-t(Q;Q,V_i)|<\varepsilon,\forall i$$
$$t(Q;Q,V_i)>f(Q)-\varepsilon,\forall i$$

故

$$t^-(Q;Q)>f(Q)-\varepsilon \tag{1.18}$$

由于 $t^-(P;Q)$ 和 $f(P)$ 是连续函数,故必有 $Q$ 的邻域 $N_Q$ 使

$$t^-(P;Q)>f(P)-\varepsilon,P\in N_Q \tag{1.19}$$

这是 $t^-(P;Q)$ 的另一个重要性质(见图 1.1)。现在让 $Q$ 跑遍 $\Omega$,并每每重复上述做法,则知 $\{N_Q,Q\in\Omega\}$ 覆盖了 $\Omega$。根据有限覆盖定理,可找到 $\Omega$ 的有限覆盖,设为 $\{N_{Q_i},i=1,2,\cdots,n\}$,则

$$t^-(P;Q_i)>f(P)-\varepsilon,\forall P\in N_{Q_i},i=1,2,\cdots,n \tag{1.20}$$

定义

$$s(P)=\max\{t^-(P;Q_1),\cdots,t^-(P;Q_n)\}$$

则 $s(P)\in\Phi$,且有

$$s(P)>f(P)-\varepsilon,\forall P\in\Omega \tag{1.21}$$

另一方面,由式(1.15)可知

$$s(P)<f(P)+\varepsilon,\forall P\in\Omega$$

从而找到 $s(P)\in\Phi$ 使

$$|f(P)-s(P)|<\varepsilon,\forall P\in\Omega$$

证完。

**定义 1.2** 设 $\Psi\subset C(\Omega)$。我们把 $C(\Omega)$ 中所有包含 $\Psi$ 作为其子集的格的交集,称为 $\Psi$ 的"格壳",记为 $\mathscr{L}(\Psi)$。

显然格壳 $\mathscr{L}(\Psi)$ 本身就是一个格。

事实上,$f,g\in\mathscr{L}(\Psi)\Rightarrow f,g\in$ 任意格 $\mathscr{B}\supset\Psi\Rightarrow\max\{f,g\}\supset\in\mathscr{B}\Rightarrow\max\{f,g\}\in\mathscr{L}(\Psi)$。

**定义 1.3** 如果 $f_1,f_2\in\mathscr{A},c\in\mathbf{R}\Rightarrow f_1+f_2,f_1f_2,cf_1\in\mathscr{A}$,则称函数族 $\mathscr{A}\subset C(\Omega)$ 是一个代数。

显然 $C(\Omega)$ 本身就是一个代数。

**定理 1.4** 设 $\mathscr{A}\subset C(\Omega)$ 是一个代数,则其格壳 $\mathscr{L}(\mathscr{A})$ 中的元素均可用 $\mathscr{A}$ 中的元素一致逼近($\mathscr{A}$ 在其格壳中稠密)。

**证明** 以 $\mathscr{B}$ 表示可用 $\mathscr{A}$ 中元素一致逼近的函数做成的集合(即 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{A}$ 的闭

包),则容易证明

(1) $\mathscr{B}$ 仍是一个代数(只须检验代数的定义)。

(2) 若 $f\in\mathscr{B}$,则 $|f|\in\mathscr{B}$。

事实上,由于函数 $|x|$ 在有限区间 $[-\|f\|-1,\|f\|+1]$ 上可被关于 $x$ 的多项式逼近,则 $|f(P)|$ 在 $\Omega$ 上可被关于 $f$ 的多项式来逼近。设多项式序列 $p_n(x)$ 一致收敛到 $|x|$, $x\in[-\|f\|-1,\|f\|+1]$。又设 $\mathscr{A}\ni Q_m(P)$ 一致收敛到 $f(P)\in\mathscr{B}$,则对任何 $\varepsilon\in(0,1]$,有 $m,n$ 充分大,使得

$$\| f(P)| - p_n(Q_m(P))| < \| f(P)| - p_n(f(P))| +$$

$$|p_n(f(P)) - p_n(Q_m(P))| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

可见 $|f|\in\mathscr{B}$。

进一步,对任何 $f_1,f_2\in\mathscr{B}$ 有

$$\max(f_1,f_2) = \frac{1}{2}\{(f_1+f_2)+|f_1-f_2|\}\in\mathscr{B}$$

$$\min(f_1,f_2) = \frac{1}{2}\{(f_1+f_2)-|f_1-f_2|\}\in\mathscr{B}$$

可见 $\mathscr{B}$ 是一个格。它包含 $\mathscr{A}$,故 $\mathscr{L}(\mathscr{A})\subset\mathscr{B}$,即 $\mathscr{L}(\mathscr{A})$ 中元素均可用 $\mathscr{A}$ 中元素一致逼近。证完。

下面给出著名的 Stone - Weierstrass 定理。

**定理 1.5** 设 $\mathscr{A}\subset C(\Omega)$ 是一个代数,$f(P)\in C(\Omega)$。则为使函数 $f$ 可用 $\mathscr{A}$ 中元素一致逼近,必须且只须对任何 $P_1,P_2\in\Omega$ 和任何 $\varepsilon>0$ 均能找到一个 $g\in\mathscr{A}$,使得

$$|f(P_i)-g(P_i)|<\varepsilon, i=1,2 \tag{1.22}$$

**证明** **必要性** 显然。

**充分性** 假定上述条件成立,则对任何 $P_1,P_2\in\Omega$ 和任何 $\varepsilon>0$,均能找到一个 $g\in\mathscr{A}\subset\mathscr{L}(\mathscr{A})$ 使式(1.22)成立。在定理 1.3 中取 $\Phi=\mathscr{L}(\mathscr{A})$,便知 $f$ 可由 $\mathscr{L}(\mathscr{A})$ 中元素一致逼近。再由定理 1.4,$\mathscr{L}(\mathscr{A})$ 中所有元素均可由代数 $\mathscr{A}$ 中元素一致逼近,从而便证明了 $f$ 可由 $\mathscr{A}$ 中元素一致逼近。证完。

**推论 1.6** 设 $f(x_1,\cdots,x_k)$ 是定义于 $\Omega\subset\mathbf{R}^k$ 上的连续函数,则它在 $\Omega$ 上能用 $x_1,\cdots,x_k$ 的多项式逼近。

**证明** 取关于变数 $x_1,\cdots,x_k$ 的所有实系数多项式的集合作为代数 $\mathscr{A}$。设 $P_1=(x_1^{(1)},\cdots,x_k^{(1)})$, $P_2=(x_1^{(2)},\cdots,x_k^{(2)})$ 是任意两个不同的点,则只要构造多项式

$$g(x_1,\cdots,x_k)=f(P_1)+\frac{f(P_2)-f(P_1)}{\sum_{i=1}^{k}(x_i^{(2)}-x_i^{(1)})^2}\cdot\sum_{i=1}^{k}(x_i-x_i^{(1)})(x_i^{(2)}-x_i^{(1)})$$

便有

$$f(P_i)=g(P_i),i=1,2$$

于是由 Stone－Weierstrass 定理，便知结论为真，证完。

由 Stone－Weierstrass 定理可以证明，对一元三角函数逼近而言，当取 $\Omega=[0,\pi]$时对任何连续函数都是可逼近的。当取 $\Omega=[0,2\pi]$时，对任何以 $2\pi$ 为周期的连续函数是可逼近的，而对非周期函数是不可逼近的。

## §1.2 线性正算子序列的收敛性及收敛速度估计

本节给出检验多元线性正算子序列收敛性的一般方法，并研究这种线性正算子序列的逼近阶估计。

**定义 1.4** 设 $\Omega\subset R^k$ 是一个紧致集，并设算子

$$L:C(\Omega)\ni f(t)\rightarrow L[f(t);x]\in C(\Omega)$$

是一个线性算子。若对每个满足条件

$$f(t)\geqslant 0,\forall t\in\Omega$$

的函数 $f(t)\in C(\Omega)$均有

$$L[f(t);x]\geqslant 0,\forall x\in\Omega$$

则称 $L$ 是一个线性正算子。

显然§1.1 中的 Bernstein 算子都是线性正算子。

对一元情形，取 $\Omega=[a,b]$。P.P.Korovkin 给出如下检验线性正算子序列收敛性的定理。

**定理 1.7** 如果 $C[a,b]\rightarrow C[a,b]$的线性正算子序列$\{L_n[f(t);x]\}$满足

$$\begin{cases}L_n[1;x]=1+\alpha_n(x)\\L_n[t;x]=x+\beta_n(x)\\L_n[t^2;x]=x^2+\gamma_n(x)\end{cases}\tag{1.23}$$

式中 $\alpha_n(x),\beta_n(x),\gamma_n(x)$于$[a,b]$上均一致收敛于 0(当 $n\rightarrow\infty$)，则当 $f(t)\in C[a,b]$时，$L_n[f(t);x]$于$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$。

此定理表明：为检验 $C[a,b]$中线性正算子序列的收敛性，只须检验 3 个试探函数 $1,x,x^2$ 即可。

对二元情形,V. I. Volkov 给出了如下定理。

**定理 1.8** 设 $\overline{\mathscr{D}} \subset \mathbf{R}^2$ 是二维有界闭区域,$\{L_n[f(\xi,\eta);x,y]\}$是$C(\overline{\mathscr{D}})$到其自身的线性正算子序列。如果它满足

$$\begin{cases} L_n[1;x,y] = 1 + \alpha_n(x,y) \\ L_n[\xi;x,y] = x + \beta_n(x,y) \\ L_n[\eta;x,y] = y + \gamma_n(x,y) \\ L_n[\xi^2+\eta^2;x,y] = x^2 + y^2 + \delta_n(x,y) \end{cases} \tag{1.24}$$

式中 $\alpha_n(x,y),\beta_n(x,y),\gamma_n(x,y),\delta_n(x,y)$ 于 $\overline{\mathscr{D}}$ 上均一致收敛于 0,则对任何 $f(x,y)\in C(\overline{\mathscr{D}})$,均在 $\overline{\mathscr{D}}$ 上一致地有

$$\lim_{n\to\infty} L_n[f(\xi,\eta);x,y] = f(x,y) \tag{1.25}$$

**证明** 令 $\psi(\xi,\eta)=(\xi-x)^2+(\eta-y)^2$,则

$$L_n[\psi(\xi,\eta);x,y]=L_n[\xi^2+\eta^2;x,y]+(x^2+y^2)L_n[1;x,y]-2xL_n[\xi;x,y]-2yL_n[\eta;x,y]$$

当 $n\to\infty$ 时在 $\overline{\mathscr{D}}$ 上一致收敛于 0。

由于 $f(x,y)\in C(\overline{\mathscr{D}})$,故有 $M>0$,使

$$|f(x,y)| < M, \text{当}(x,y)\in\overline{\mathscr{D}}\text{时}$$

从而当$(x,y)\in\overline{\mathscr{D}}$,$(\xi,\eta)\in\overline{\mathscr{D}}$时有

$$-2M < f(\xi,\eta) - f(x,y) < 2M \tag{1.26}$$

再由 $f(x,y)$的连续性,对任何 $\varepsilon>0$,有 $\rho>0$ 存在使当

$$\psi(\xi,\eta) = (\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 < \rho^2$$

时有

$$-\varepsilon < f(\xi,\eta) - f(x,y) < \varepsilon \tag{1.27}$$

由式(1.26)与式(1.27)容易证明:当$(x,y)\in\overline{\mathscr{D}}$,$(\xi,\eta)\in\overline{\mathscr{D}}$时有

$$-\varepsilon - \frac{2M}{\rho^2}\psi(\xi,\eta) < f(\xi,\eta) - f(x,y) < \varepsilon + \frac{2M}{\rho^2}\psi(\xi,\eta)$$

根据线性正算子的单调性($f\leqslant g\Rightarrow L_n[f;x,y]\leqslant L_n[g;x,y]$),由上式可得

$$\begin{aligned} &-\varepsilon L_n[1;x,y]-\frac{2M}{\rho^2}L_n[\psi(\xi,\eta);x,y]\leqslant \\ &L_n[f(\xi,\eta);x,y]-f(x,y)L_n[1;x,y]\leqslant \\ &\varepsilon L_n[1;x,y]+\frac{2M}{\rho^2}L_n[\psi(\xi,\eta);x,y] \end{aligned}$$

只要 $n$ 充分大,就有

$$|L_n[f(\xi,\eta);x,y]-f(x,y)|<2\varepsilon,\forall(x,y)\in\overline{\mathscr{D}}$$

定理 1.8 得证。

定理 1.7 之证明完全类似。定理 1.8 说明,二元线性正算子序列收敛性的检验函数可取为 $1,x,y,x^2+y^2$(用这两个定理很容易检验 Bernstein 算子的收敛性)。不难看出,以上关于二元函数情形的结论很容易推广到 $k$ 元情形。

下面我们来讨论线性正算子序列收敛速度。特别是讨论单纯形

$$\Delta_k=\{(x_1,\cdots,x_k)\in R^k\,|\,x_1+\cdots+x_k\leqslant 1,x_i\geqslant 0,i=1,\cdots,k\}$$

上的 Bernstein 算子序列 $\overline{B}_n^f(x_1,\cdots,x_k)$的收敛性(对于别的线性正算子序列证法是类似的)。

引进缩写记号

$$x=(x_1,\cdots,x_k),y=(y_1,\cdots,y_k)$$

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{k}x_i^2\right)^{1/2}$$

并对 $f(x)\in C(\Delta_k)$定义其连续模 $\omega(f;\delta)$如下:

$$\omega(f;\delta)=\max_{\substack{\|x-y\|\leqslant\delta\\ x,y\in\Delta_k}}|f(x)-f(y)|$$

对于 $\lambda>0$,连续模满足不等式

$$\omega(f;\lambda\delta)\leqslant(\lambda+1)\omega(f;\delta)$$

**定理 1.9** 若 $f\in C(\Delta_k)$,则对一切自然数 $n$ 有

$$|\overline{B}_n^f(x_1,\cdots,x_k)-f(x_1,\cdots,x_k)|\leqslant 2\omega\left(f;\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \tag{1.28}$$

**证明** 利用多项和的 $n$ 次幂展开公式

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1})^n=\sum_{\substack{v_i\geqslant 0\\ v_1+\cdots+v_k\leqslant n}}\binom{n}{v_1,\cdots,v_k}x_1^{v_1}\cdots x_k^{v_k}x_{k+1}^{n-v_1-\cdots-v_k}$$

有

$$\sum_{\substack{v_i\geqslant 0\\ v_1+\cdots+v_k\leqslant n}}p_{n;v_1,\cdots,v_k}(x_1,\cdots,x_k)=$$

$$(x_1+\cdots+x_k+(1-x_1-\cdots-x_k))^n\equiv 1$$

由于

$$v_jp_{n;v_1,\cdots,v_k}(x_1,\cdots,x_k)=$$

$$v_j \frac{n!}{v!\cdots v_k!(n-v_1-\cdots-v_k)!}\cdot$$
$$x_1^{v_1}\cdots x_k^{v_k}(1-x_1-\cdots-x_k)^{(n-v_1-\cdots-v_k)}=$$
$$nx_j p_{n-1;v_1,\cdots,v_{j-1},v_j^{-1},v_{j+1},\cdots,v_k}(x_1,\cdots,x_k)$$

故

$$\sum_{\substack{v_1+\cdots+v_k\leqslant n\\ v_i\geqslant 0}} v_j p_n;v_1,\cdots,v_k(x_1,\cdots,x_k)=$$
$$nx_j\sum_{\substack{v_1+\cdots+v_k\leqslant n-1\\ v_i\geqslant 0}} p_{n-1;v_1,\cdots,v_k}\equiv nx_j$$

同理可证

$$\sum_{\substack{v_1+\cdots+v_k\leqslant n\\ v_i\geqslant 0}} v_j(v_j-1)p_{n;v_1,\cdots,v_k}(x_1,\cdots,x_k)\equiv n(n-1)x_j^2$$

此外,对于任何 $\delta>0$,当 $\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{v_i}{n}-x_i\right)^2\leqslant\delta^2$ 时有

$$\left|f\left(\frac{v_1}{n},\cdots,\frac{v_k}{n}\right)-f(x_1,\cdots,x_k)\right|\leqslant\omega(f;\delta)$$

而当 $\sum\left(\frac{v_i}{n}-x_i\right)^2>\delta^2$ 时,有

$$\left|f\left(\frac{v_1}{n},\cdots,\frac{v_k}{n}\right)-f(x)\right|\leqslant$$
$$\omega\left(f,\left(\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{v_i}{n}-x_i\right)^2\right)^{1/2}\right)\leqslant$$
$$\omega(f,\delta)\left\{1+\frac{1}{\delta}\left(\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{v_i}{n}-x_i\right)^2\right)^{1/2}\right\}\leqslant$$
$$\omega(f,\delta)\left\{1+\frac{1}{\delta^2}\left(\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{v_i}{n}-x_i\right)^2\right)\right\}$$

总之有

$$\left|f\left(\frac{v_1}{n},\cdots,\frac{v_k}{n}\right)-f(x_1,\cdots,x_k)\right|\leqslant\left(1+\frac{1}{\delta^2}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{v_i}{n}-x_i\right)^2\right)\omega(f,\delta)$$

利用以上关系可进行如下推导:

$$|\overline{B}_n^f(x_1,\cdots,x_k)-f(x_1,\cdots,x_k)|\leqslant$$
$$\sum_{\substack{v_1+\cdots+v_k\leqslant n\\ v_i\geqslant 0}}\left|f\left(\frac{v_1}{n},\cdots,\frac{v_k}{n}\right)-f(x_1,\cdots,x_k)\right|p_{n;v_1,\cdots,v_k}(x_1,\cdots,x_l)\leqslant$$

$$\omega(f;\delta)\left\{1+\frac{1}{\delta^2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{\substack{v_1+\cdots+v_k\leqslant n\\ v_i\geqslant 0}}\left(\frac{v_i}{n}-x_i\right)^2\cdot p_{n;v_1,\cdots,v_k}(x_1,\cdots,x_k)\right\}\leqslant$$

$$\omega(f;\delta)\left\{1+\frac{1}{n^2\delta^2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{\substack{v_1+\cdots+v_k\leqslant n\\ v_i\geqslant 0}}(v_i(v_i-1)+v_i-2nv_ix_i+n^2x_i^2)\cdot\right.$$

$$\left.p_{n;v_1,\cdots,v_k}(x_1,\cdots,x_k)\right\}=$$

$$\omega(f;\delta)\left\{1+\frac{1}{n^2\delta^2}\sum_{i=1}^{k}(n(n-1)x_i^2+nx_i-2n^2x_i^2+n^2x_i^2)\right\}=$$

$$\omega(f;\delta)\left\{1+\frac{1}{n\delta^2}\sum_{i=1}^{k}(x_i-x_i^2)\right\}\leqslant$$

$$\omega(f;\delta)\left\{1+\frac{1}{n\delta^2}\sum_{i=1}^{k}x_i\right\}\leqslant\omega(f;\delta)\left(1+\frac{1}{n\delta^2}\right)$$

取 $\delta=\frac{1}{\sqrt{n}}$ 便得定理 1.9 之结论。

定理证完。

当被逼近函数二次连续可微时，线性正算子序列得收敛速度可能提高。以下就讨论这种情形。

设 $\Omega\subset R^k$ 是有界闭的凸区域，$C^2(\Omega)$表示 $\Omega$ 上二次连续可微函数的集合，则利用 Taylor 展开容易证明如下引理。

**引理 1.10** 若 $f(x)\in C^2(\Omega)$，$t,x\in\Omega$，则有

$$f(t)=f(x)+\sum_{i=1}^{k}(t_i-x_i)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}+$$
$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}(t_i-x_i)(t_j-x_j)\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i\partial x_j}+\alpha(t)\|t-x\|^2 \qquad (1.29)$$

式中$\lim\limits_{t\to x}\alpha(t)=0$(且关于 $t,x\in\Omega$ 是一致成立的)。

**证明** 利用一元 Taylor 展开有

$$f(t)=f(x+\lambda(t-x))|_{\lambda=1}=f(x)+1\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\{f(x+\lambda(t-x))\}|_{\lambda=0}+$$
$$\frac{1}{2}\times 1\cdot\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2\{f(x+\lambda(t-x))\}|_{\lambda=\theta},0<\theta<1$$

然后利用二阶导数的连续性可证式(1.29)成立。

**定义 1.5** 定义函数

$$\theta^{(m)}(t)=\|t-x\|^{2m}=\left[\sum_{i=1}^{k}(t_i-x_i)^2\right]^m$$

**定理 1.11** 设$\{L_n[f(t);x]\}$是由$C(\Omega)$到其自身的线性正算子序列,它满足如下条件:

$$\begin{cases} L_n[1;x]=1+o\left[\dfrac{1}{\varphi_1(n)}\right] \\ L_n[t_i;x]=x_i+\dfrac{\xi_i(x)}{\varphi_1(n)}+o\left[\dfrac{1}{\varphi_1(n)}\right], i=1,2,\cdots,k \\ L_n[t_it_j;x]=x_ix_j+\dfrac{\eta_{ij}(x)}{\varphi_2(n)}+o\left[\dfrac{1}{\varphi_2(n)}\right], i,j=1,\cdots,k \end{cases} \tag{1.30}$$

式中$\varphi_j(n)\to\infty$(当$n\to\infty$时),$j=1,2$。$\xi_i(x),\eta_{ij}(x)$为有限值函数。

若$\dfrac{1}{\varphi_1(n)}=o\left[\dfrac{1}{\varphi_2(n)}\right](n\to\infty)$,且对某自然数$m$有

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_2(n)\cdot L_n[\theta^{(m)}(t);x]=0 \tag{1.31}$$

则对任何$f(x)\in C^2(\Omega)$,当$n\to\infty$时,对$\delta_n=L_n[f(t);x]-f(x)$有如下渐进公式成立:

$$\delta_n\sim\frac{1}{2\varphi_2(n)}\sum_{i,j=1}^{k}\eta_{ij}(x)\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i\partial x_j} \tag{1.32}$$

或写为

$$\delta_n-\frac{1}{2\varphi_2(n)}\sum_{i,j=1}^{k}\eta_{ij}(x)\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i\partial x_j}=o\left(\frac{1}{\varphi_2(n)}\right)$$

**证明** 应用引理 1.10 可得

$$\begin{aligned}\delta_n&=L_n[f(t);x]-f(x)=\sum_{i=1}^{k}L_n[t_i-x_i;x]\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}+\\ &\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}L_n[(t_i-x_i)(t_j-x_j);x]\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i\partial x_j}+\\ &L_n\left[\alpha(t)\sum_{i=1}^{k}(t_i-x_i)^2;x\right]+o\left[\frac{1}{\varphi_2(n)}\right]=\\ &\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial f}{\partial x_i}F_1^{(i)}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i\partial x_j}\cdot F_2^{(i,j)}+F_3+o\left[\frac{1}{\varphi_2(n)}\right]\end{aligned}$$

式中

$$F_1^{(i)}=L_n[t_i-x_i;x]=\frac{\xi_i(x)}{\varphi_1(n)}+o\left[\frac{1}{\varphi_1(n)}\right]=o\left[\frac{1}{\varphi_2(n)}\right]$$

$$F_2^{(i,j)}=L_n[(t_i-x_i)(t_j-x_j);x]=\frac{\eta_{ij}(x)}{\varphi_2(n)}+o\left[\frac{1}{\varphi_2(n)}\right]$$

从而证明了

$$\delta_n = \frac{1}{\varphi_2(n)}\left\{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\eta_{ij}(x)\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right\} + F_3 + o\left[\frac{1}{\varphi_2(n)}\right]$$

下面只须证明

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_2(n)\cdot F_3 = \lim_{n\to\infty}\varphi_2(n)L_n[\alpha(t)\|t-x\|^2;x] = 0$$

根据引理 1.10,对任何 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$ 使得当 $\|t-x\|<\delta$ 时,$|\alpha(t)|<\varepsilon$。令 $C=\delta^{2-2m}\cdot\max\limits_{t\in\Omega}|\alpha(t)|$,则

$$\alpha(t)\|t-x\|^2 < \varepsilon\|t-x\|^2 + C\cdot\theta^{(m)}(t) \tag{1.33}$$

此处注意:当 $\|t-x\|<\delta$ 时,有

$$\alpha(t)\|t-x\|^2 \leqslant \varepsilon\cdot\|t-x\|^2$$

当 $\|t-x\|\geqslant\delta$ 时,有

$$\begin{aligned}&\alpha(t)\|t-x\|^2 \leqslant C\cdot\delta^{2m-2}\|t-x\|^2 \leqslant\\ &C\cdot\delta^{2m-2}\cdot\|t-x\|^2\cdot\frac{\|t-x\|^{2m-2}}{\delta^{2m-2}} =\\ &C\cdot\|t-x\|^{2m} = C\cdot\theta^{(m)}(t)\end{aligned}$$

从而(由式(1.33))

$$|\varphi_2(n)F_3| \leqslant \varepsilon\varphi_2(n)L_n[\|t-x\|^2;x] + C\cdot\varphi_2(n)L_n[\theta^{(m)}(t);x]$$

式中 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_2(n)L_n[\theta^{(m)}(t);x]=0$。又由式(1.30)可知

$$\varphi_2(n)L_n[\|t-x\|^2;x] = \sum_{i=1}^{k}\eta_{ii}(x) + o(1)$$

当 $n\to\infty$ 时是一个有界量。设其界为 $M(x)$,故当 $n$ 充分大时

$$|\varphi_2(n)F_3| \leqslant (M(x)+1)\varepsilon$$

由 $\varepsilon$ 的任意性知 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_2(n)F_3=0$。证完。

利用定理 1.11 可直接导出非乘积型 Bernstein 多项式对二次连续可微函数的收敛速度。

**定理 1.12** 对任何 $f(x)\in C^2(\Delta_k)$,当 $n\to\infty$ 时有

$$\begin{aligned}&\overline{B}_n^f(x_1,\cdots,x_k) - f(x_1,\cdots,x_k) \sim\\ &\frac{1}{2n}\left\{\sum_{i=1}^{k}x_i(1-x_i)\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} - 2\sum_{i\neq j}x_i x_j\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i\partial x_j}\right\}\end{aligned} \tag{1.34}$$

**证明** 只须验证定理 1.11 的条件,找出相应的 $\varphi_1(n)$,$\varphi_2(n)$,$\xi_i(x)$,$\eta_{ij}(x)$ 和 $m$ 即可。在证明定理 1.9 时已证明

$$\overline{B}_n[1;x] = 1$$

$$\overline{B}_n[t_i;x] = x_i$$