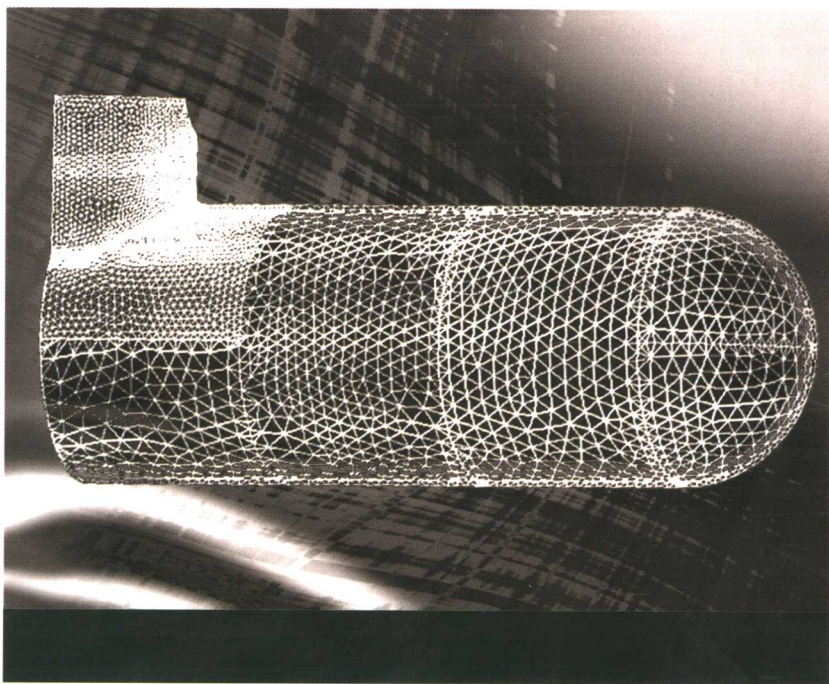


王泽军 编著

锅炉结构 有限元分析



Chemical Industry Press



化学工业出版社
工业装备与信息工程出版中心

锅炉结构有限元分析

王泽军 编著



化学工业出版社
工业装备与信息工程出版中心

· 北京 ·

(京) 新登字 039 号

内 容 提 要

本书主要阐述如何更好地使用有限元分析软件 (ANSYS、ALGOR) 来解决锅炉结构工程问题。对有限元的基本理论只进行简单概括, 重点在于如何应用软件来进行工程分析。书中所列举的大量案例均来自工程实际, 有较强的实用性。

本书适用于从事锅炉研究、设计开发和检验的工程技术人员, 以及高等院校相关专业研究生、本科生, 也可供有限元分析的初学者、专业分析人员、科研人员参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

锅炉结构有限元分析/王泽军编著. —北京: 化学工业出版社, 2005. 8

ISBN 7-5025-7575-8

I. 锅… II. 王… III. 锅炉-结构工程-有限元分析-应用软件 IV. TK223-39

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 100342 号

锅炉结构有限元分析

王泽军 编著

责任编辑: 张兴辉

责任校对: 凌亚男

封面设计: 尹琳琳

*

化学工业出版社 出版发行
工业装备与信息工程出版中心

(北京市朝阳区惠新里 3 号 邮政编码 100029)

购书咨询: (010)64982530

(010)64918013

购书传真: (010)64982630

<http://www.cip.com.cn>

*

新华书店北京发行所经销

北京永鑫印刷有限责任公司印刷

三河市延风装订厂装订

开本 787mm×1092mm 1/16 印张 13 $\frac{3}{4}$ 字数 336 千字

2005 年 10 月第 1 版 2005 年 10 月北京第 1 次印刷

ISBN 7-5025-7575-8

定 价: 35.00 元

版权所有 违者必究

该书如有缺页、倒页、脱页者, 本社发行部负责退换

前 言

本书不是关于有限元理论的书籍，也不是讲述锅炉结构问题的专门书籍，而是一本论述如何更好使用有限元这个工具解决工程问题的书籍。之所以将书名取为《锅炉结构有限元分析》，是因为所举的应用案例大多来自锅炉，但有限元方法是一种通用工具，因此本书的内容也可以用于其他相关工程领域。

众所周知，有限元分析已经成为多个工程领域和科学技术研究工作中广泛应用的有效工具，它是一种介于理论和试验之间、具有半试验性质的重要手段，具有准确和适用性强等特点。同时，有限元分析和对分析结果的评价又是理论性和实践性很强的一项工作，分析人员不仅需要扎实的理论知识（如高等材料力学、弹塑性力学、传热学等）、有限元理论知识和所从事行业的专业知识，还需要丰富的工程经验和高超的洞察判断能力，以及对计算机技术深刻了解和相当好的英语水平，因此要正确地运用有限元分析这个工具，无论对科研领域的专家，还是对具有丰富工程经验的工程师们均具有相当大的挑战。

已经有大量的文献和专著研究了有限元的理论问题，使有限元方法日臻成熟，许多专业的公司也推出了功能强大的有限元分析软件。随着计算机技术的发展和商用有限元分析软件的普及，也有大量资料介绍有限元分析软件的使用方法，但将有限元的理论、软件使用、结构分析与评价等内容有机结合起来、面向工程应用的书籍尚不多见，而实际分析工作过程显然涉及这些内容。

随着锅炉技术的发展，大量新的炉型不断出现，锅炉标准的滞后使新设计、新结构的强度和刚度问题凸现；锅炉实际使用过程中出现的各种缺陷也经常需要从强度等方面进行解释和判断。作者在日常工作中进行了大量的工程分析工作，明显感觉到了上述需求的迫切性，遂萌生了编写专门书籍的想法，并得到化学工业出版社的支持。

本书从内容编排上力图将理论、软件、计算机技术、专业知识、工程应用等有机地结合起来，并更注重工程应用。书中所列举的大量案例均来自工程实际。因此无论是有限元分析的初学者、专业分析人员、科研人员，还是锅炉设计工程师、锅炉压力容器检验师，均会在阅读本书后获得益处。

本书由天津市特种设备监督检验技术研究院王泽军编著。在文稿校阅过程中，得到了牛卫飞和刘宏臣的大力帮助；张旭、毛富杰和天津宝成锅炉集团李耀荣总工程师提供了许多锅炉设计资料；邱东提供了综合应用案例（一）的部分原始资料；谭立方提供了综合应用算例（二）的分析模型和部分计算数据；在此，对他们的帮助表示诚挚的谢意。

由于有限元分析是理论和实践性均很强的一项工作，也由于编著者的学识和水平有限，书中难免会出现错误和不当之处，敬请专家及读者批评指正。

编著者
2005年5月

目 录

第一章 有限元法概论	1
第一节 有限元的基本概念	1
第二节 弹性力学有限元法	5
一、弹性力学基本方程.....	5
二、单元列式.....	6
三、总体刚度矩阵与求解.....	10
第三节 ANSYS 有限元分析软件简介	10
一、ANSYS 的组成.....	10
二、ANSYS 的技术特点.....	12
三、ANSYS 的基本功能.....	12
四、ANSYS 的高级功能.....	13
五、ANSYS 的操作界面.....	14
第四节 ALGOR 有限元分析软件简介	15
一、ALGOR 软件的发展历史.....	15
二、ALGOR 软件的分析功能.....	16
三、ALGOR 软件的结构.....	17
第五节 其他有限元分析软件	19
参考文献	21
第二章 分析模型与求解	22
第一节 概述	22
第二节 模型策划	22
一、环境分离.....	22
二、对称性研究.....	23
三、重点考察部位的选取.....	25
四、细节结构的考虑与舍弃.....	25
五、工况分析.....	26
六、材料数据与材料分组.....	26
七、单元选择.....	26
八、解题规模预测.....	27
九、文献资料检索.....	27
十、不连续结构的处理方法.....	29
第三节 分析模型的建立和改进	29
一、单位制.....	30
二、建模方法.....	31

三、网格划分	32
四、载荷考虑与施加	35
五、约束条件	37
六、模型检查	40
七、模型求解	41
八、试算结果考察	46
第四节 网格划分与结果的收敛性	47
第五节 尖角问题的处理	49
一、圆筒平盖问题	50
二、错边问题	51
三、开孔接管问题	51
四、热点应力	53
五、大型模型中尖角位置的应力求取方法	53
第六节 结果分析	53
一、变形观察	54
二、应力等值显示	55
三、应变观察	56
四、支承反力（约束反力）	57
五、路径操作	58
六、彩色图像输出	62
七、黑白图像输出	64
八、结果文本列表	67
第七节 ANSYS 求解线弹性问题示例	68
一、问题描述	68
二、定义工作文件名和工作标题	68
三、定义单元类型和材料属性	69
四、创建几何模型	70
五、生成有限元网格	70
六、施加载荷并求解	71
七、浏览计算结果	74
八、以扩展方式显示计算结果	75
九、以曲线形式显示孔边应力强度分布	77
十、网格局部细化并重新计算	79
第八节 ALGOR 求解线弹性问题示例	83
一、问题描述	83
二、建立模型的几何文件	83
三、将 Superdraw III 文件转化为有限元模型	87
四、用 Superview 检查模型	90
五、计算并观察结果	90
六、网格细化并重新计算	92

参考文献	94
第三章 强度评定与分析报告	96
第一节 强度与强度条件	96
第二节 强度理论	97
一、强度理论的概念	97
二、材料的两种破坏形式	97
三、四个基本的强度理论	98
第三节 应力分类与强度评定	100
一、一次应力 (primary stress)	101
二、二次应力 (secondary stress)	102
三、峰值应力 (peak stress)	103
四、分类应力的强度评定	103
第四节 应力沿路径的线性化	104
一、应力线性化的一般公式	104
二、线性化显式表达式	105
三、商用软件中的线性化原理	106
四、路径上分段点应力计算方法	108
第五节 分析报告	109
一、分析报告封面	109
二、报告正文	109
三、报告附件、附录	111
参考文献	111
第四章 开孔接管分析	112
第一节 概述	112
第二节 建立分析模型的一般考虑	113
第三节 模型收敛性分析	114
第四节 法兰的影响	116
第五节 接管外伸长度影响	117
第六节 贴板补强处理方法	119
第七节 密封垫片处理	120
第八节 算例 (一)——汽包翻边下降管结构分析	121
一、分析模型	121
二、分析结果与评定	122
第九节 算例 (二)——集汽集箱蒸汽出口应力分析	124
一、分析模型	124
二、分析结果与评定	126
第十节 算例 (三)——椭圆人孔应力分析	127
一、分析模型	127
二、分析结果与评定	129
三、讨论	130

参考文献	131
第五章 管板应力分析	132
第一节 管板的结构和承载特点	132
第二节 管板理论与研究概况	133
一、当量实心板理论	133
二、光板弯曲理论	136
第三节 管子对管板的作用	138
一、管子的弹性支撑作用	138
二、管子的开孔补强作用	139
三、管壳热膨胀差的考虑方法	141
第四节 管板有限元分析模型与对比	141
一、分析模型 1	142
二、分析模型 2	143
三、分析模型 3	144
四、分析模型 4	144
五、模型对比与分析	145
六、温差载荷作用下的分析与对比	150
七、工程应用中的其他问题	151
参考文献	152
第六章 结构的屈曲分析	153
第一节 屈曲的基本概念	153
一、失稳形式	153
二、临界压力计算	154
第二节 屈曲分析的有限元法	155
一、线性屈曲分析简例	155
二、屈曲有限元分析的类型	156
三、屈曲问题有限元分析的一般步骤	158
第三节 炉胆屈曲的有限元分析	160
一、特征值计算结果及对比分析	160
二、几何非线性计算结果	162
三、几何/材料非线性计算结果	163
四、结果讨论与对比	163
附：炉胆屈曲分析命令流文件清单	165
第四节 椭圆度对炉胆屈曲临界载荷的影响初步分析	167
第五节 工程应用中应注意的问题	168
参考文献	168
第七章 热传导与热应力分析	170
第一节 引言	170
第二节 热量传递的三种方式	170
一、热传导	170

二、对流	171
三、热辐射	171
第三节 热传导问题的基本方程	173
第四节 热传导问题有限元法	175
一、稳态热传导有限元的一般格式	175
二、瞬态热传导有限元的一般格式	177
第五节 热应力分析的有限元方法	179
第六节 热传导/热应力有限元分析中的若干问题	180
一、热分析中的其他材料性质	180
二、热载荷的种类	180
三、热分析的种类及一般步骤	181
四、热应力分析的几种方法	182
五、ANSYS 软件中的热分析及热分析/热应力耦合单元	182
第七节 锅炉给水管的温度场与热应力分析	184
一、数据准备	184
二、连续给水时的温度场和热应力场	185
三、20min 间断给水时的温度场和热应力场	186
附：瞬态分析命令流文件	190
参考文献	195
第八章 综合应用案例	196
第一节 一台进口异型锅炉的强度分析	196
一、锅炉结构和参数	196
二、有限元分析模型	196
三、计算结果与分析	198
四、结论	201
第二节 T形接头的强度分析与疲劳寿命预测	201
一、分析模型	204
二、分析结果及准确性考察	205
三、静强度校核	207
四、疲劳寿命预测	208
参考文献	210

第一章 有限元法概论

第一节 有限元的基本概念

对图 1-1 (a) 所示的圆 (半径为 1), 要得到其周长, 是个非常简单的问题。但为了说明问题, 我们假设并不知道圆周率, 也放弃积分方法, 而是通过内接的多边形代替圆, 即用简单的分段直线取代“复杂的”圆弧线来计算圆的周长。为了准确对比, 将圆周率取到 14 位 (3.14159265358979)。当采用内接等边五边形时 [如图 1-1 (b) 所示], 周长计算误差为 -6.451%; 当采用内接等边八边形时 [如图 1-1 (c) 所示], 周长计算误差为 -2.55%, 已经很接近圆的周长。随着多边形边数的增加, 计算结果会越来越精确, 如表 1-1 所示。

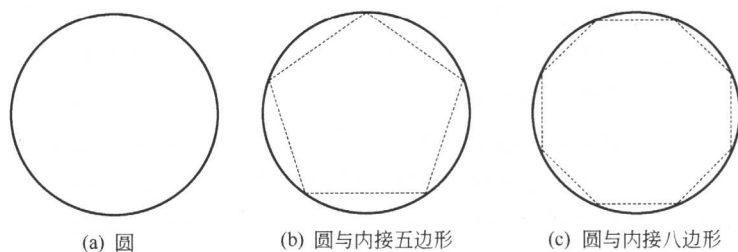


图 1-1 圆与内接多边形

表 1-1

多边形边数	5	8	10
单段长度	1.17557050458495	0.76536686473018	0.61803398874990
多边形周长	5.87785252292473	6.12293491784144	6.18033988749895
误差/%	-6.451	-2.550	-1.637
多边形边数	20	30	50
单段长度	0.31286893008046	0.20905692653531	0.12558103905863
多边形周长	6.25737860160923	6.27170779605921	6.27905195293134
误差/%	-0.411	-0.183	-0.066

在这里就产生了一个很重要的概念, 就是在圆周的小的区域内用相对简单的直线段“强行”取代曲线。这种思想被认为是有限元方法的萌芽。

有限元分析 (FEA, Finite Element Analysis) 的基本概念就是用较简单的问题代替复杂问题后再求解。它将求解域看成是由许多称为有限元的小的互联子域 (即单元) 组成, 对每一单元假定一个合适的 (较简单的) 近似解, 然后推导求解域总体需满足的条件 (如结构的平衡条件), 从而得到问题的解。这个解不是准确解, 而是近似解。由于大多数实际问题

难以甚至不可能得到准确解，而有限元不仅计算精度高，而且能适应各种复杂求解域形状，因而成为行之有效的工程分析手段。

有限元方法是在 20 世纪中叶被提出来的。有限元法最初被称为矩阵近似方法，应用于航空器的结构强度计算，并由于其方便性、实用性和有效性而引起从事力学研究的科学家的浓厚兴趣。经过短短数十年的努力，随着计算机技术的快速发展和普及，有限元方法迅速从结构工程强度分析计算扩展到几乎所有的科学技术领域，成为一种丰富多彩、应用广泛并且实用高效的数值分析方法。

有限元方法与其他求解边值问题近似方法的根本区别在于它的近似性仅限于相对小的子域中。20 世纪 60 年代初首次提出结构力学计算有限元概念的克拉夫 (Clough) 教授形象地将其描绘为：“有限元法 = Rayleigh Ritz 法 + 分片函数”，即有限元法是 Rayleigh Ritz 法 (瑞利·里兹法) 的一种局部化情况。不同于求解 (往往是困难的) 满足整个定义域边界条件的允许函数的 Rayleigh Ritz 法，有限元法将函数定义在简单几何形状 (如二维问题中的三角形或任意四边形) 的单元域上 (分片函数)，且在定义单元域函数时不考虑整个定义域的复杂边界条件，这是有限元法优于其他近似方法的原因之一。

文献 [1] 给出了一个基于直接公式法的简单的有限元分析的例子，可以有助于更好地理解有限元分析的原理和过程。

考虑承受拉伸载荷的变横截面杆 (矩形截面)，如图 1-2 (a) 所示。杆的一端固定，另一端承受拉伸载荷，现要求出杆内部沿长度方向的应力。求解过程如下。

第一步：将求解域离散成有限个单元。

为了强调有限元分析中的基本步骤，我们将保持问题的简单性。将结构划分成四个长度相同的等截面的单元，单元横截面积取相邻切割面的平均值，如图 1-2 (b) 所示，每个单元用一个弹簧来表示，单元之间由节点相连，如图 1-2 (c) 所示，模型中共有 5 个节点。

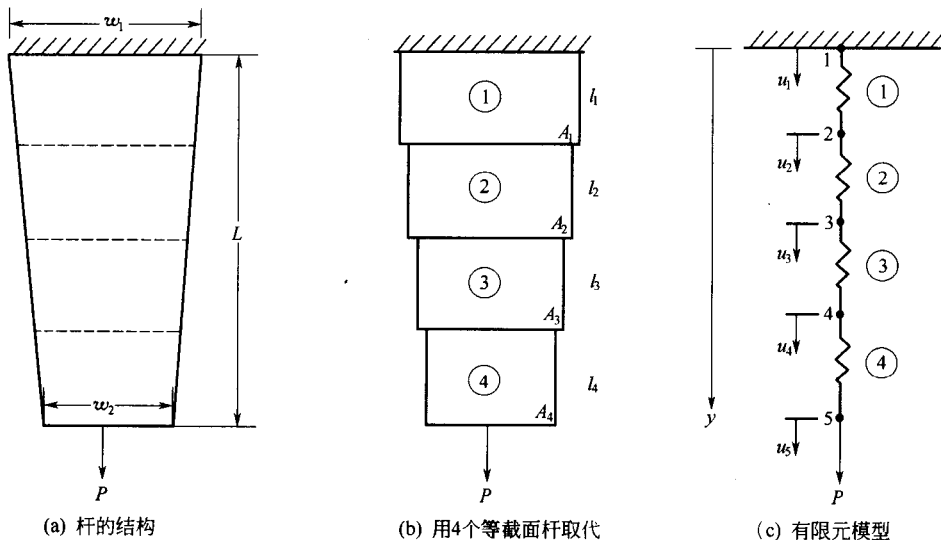


图 1-2 受拉伸载荷的变截面杆

第二步：求解列式。

为了研究典型单元的行为，考虑一个长度为 l 、横截面为 A 的在载荷 F 作用下的杆件。假设伸长量为 Δl ，则

杆件平均应力为： $\sigma = \frac{F}{A}$ ；

杆件应变为： $\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$ 。

应力应变关系符合虎克定律： $\sigma = E\epsilon$

因此有：

$$F = \left(\frac{AE}{l}\right)\Delta l = k_{eq}\Delta l$$

对所考虑的图 1-1 (c) 问题，有如下方程：

$$f_i = \frac{(A_{i+1} + A_i)E}{2l_i}(u_{i+1} - u_i) \quad i=1, 2, 3, 4$$

f_i 为单元内力。

则单元的等价弹簧刚度为：

$$k_i = \frac{(A_{i+1} + A_i)E}{2l_i} \quad i=1, 2, 3, 4$$

静力平衡要求每个节点上的力的总和为零，这样就产生如下五个平衡方程：

节点 1： $R_1 - k_1(u_2 - u_1) = 0$ (R_1 为节点 1 处的支反力)

节点 2： $k_1(u_2 - u_1) - k_2(u_3 - u_2) = 0$

节点 3： $k_2(u_3 - u_2) - k_3(u_4 - u_3) = 0$

节点 4： $k_3(u_4 - u_3) - k_4(u_5 - u_4) = 0$

节点 5： $k_4(u_5 - u_4) - P = 0$

写成矩阵形式，有：

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \end{bmatrix} \quad (1-1)$$

将支反力与负荷区分开来，就得到：

$$\begin{bmatrix} -R_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \end{bmatrix} \quad (1-2)$$

上式写成一般形式：

$$[R] = [K][u] - [F] \quad (1-3)$$

式中 $[R]$ ——支反力列阵；

$[K]$ ——总体刚度矩阵，显然，它是由各个单元的“刚度矩阵”（在本题中为单元的等价弹簧刚度）集组而成，单元矩阵可以从单元平衡方程容易得到，在此推导从略；

$[u]$ ——节点位移矩阵；

$[F]$ ——负荷矩阵。

由于节点 1 的位移 $u_1=0$ ，将这个边界条件应用到式 (1-1) 中，得到：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \end{bmatrix} \quad (1-4)$$

求解这个方程组就可以求出各节点的位移。

施加位移边界条件后的方程组 (1-4) 也可以写成一般形式：

$$[K][u]=[F] \quad (1-5)$$

第三步：求解。

若材料的弹性模量 $E=10.4 \times 10^6 \text{ lb/in}^2$ (铝)， $w_1=2 \text{ in}$ ， $w_2=1 \text{ in}$ ，厚度 $t=0.125 \text{ in}$ ， $L=10 \text{ in}$ ， $P=1000 \text{ lb}$ ，解方程 (1-4)，就可以得到各节点的位移。求解结果与精确解的对比见表 1-2。

表 1-2

节点编号	节点位置/in	位移计算结果/in	准确结果/in	节点编号	节点位置/in	位移计算结果/in	准确结果/in
1	$y=0$	0	0	4	$y=7.5$	0.003608	0.003615
2	$y=2.5$	0.001026	0.001027	5	$y=10$	0.005317	0.005333
3	$y=5$	0.002210	0.002213				

第四步：后处理——求取应力和支反力。

由于不同节点的位移量已经求出，可以通过应力应变关系得到单元的平均应力。

$$\sigma_i = E\varepsilon = E \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{l_i} \right) \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

求解结果见表 1-3。

表 1-3

单元编号	平均应力/lb · in ⁻²	准确结果/lb · in ⁻²	单元编号	平均应力/lb · in ⁻²	准确结果/lb · in ⁻²
1	4268	4267	3	5816	5818
2	4925	4923	4	7109	7111

节点 1 位置的支反力可以容易地通过式 (1-2) 得到。计算结果为 $R_1=-1000 \text{ lb}$ 。

上面介绍的例子基于直接公式法，也可以通过最小势能法、加权余量法等方法得出具有相当精度的结果。虽然只是一个简单的例子，却反映了有限元分析的基本过程。实际上，对于不同类型的问题（如结构应力场、温度场等），有限元求解法的基本步骤是相同的，只是具体公式推导和运算求解有所不同。有限元求解问题的基本步骤可归纳如下。

第一步：问题及求解域定义。根据实际问题近似确定求解域的物理性质和几何区域，建立分析模型。

第二步：求解域离散化。将求解域近似为具有不同大小和形状但彼此相连的有限个单元组成的离散域，习惯上称为有限元网络划分。单元越小（网络越细）则离散域的近似程度越好，计算结果也越精确，但计算量将增大，因此求解域的离散化是有限元法的核心技术之一，本书的第二章中将详细论述。

第三步：确定状态变量及控制方法。一个具体的物理问题通常可以用一组包含问题状态变量（如位移、温度等）和边界条件的微分方程式表示，为适合有限元求解，通常将微分方程化为等价的泛函形式。

第四步：单元推导。对单元构造一个适合的近似解，即推导有限单元的列式，其中包括选择合理的单元坐标系，建立单元形函数，以某种方法给出单元各状态变量的离散关系，从而形成单元矩阵（结构力学中称刚度阵或柔度阵）。

为保证问题求解的收敛性，单元推导有许多原则要遵循。对工程应用而言，重要的是应注意每一种单元的解题性能与使用条件。例如，单元形状应以规则为好，单元畸形时不仅精度低，而且有缺秩的危险，可能导致无法求解。

第五步：总装求解。将单元总装形成离散域的总矩阵方程（联合方程组），反映对近似求解域的离散域的要求。总装在相邻单元的公共节点进行，状态变量及其导数（若需要）的连续性建立在节点处。

第六步：方程组求解。有限元法最终导致联立线性方程组。联立方程组的求解可用直接法或迭代法。求解结果是单元节点处状态变量的近似值。

第七步：结果解释。对于计算结果的解释，将通过与设计准则提供的允许值（如许用应力等）比较来评价并确定是否符合要求。

简言之，有限元分析可分成三个阶段：前处理、求解和后处理。前处理包括建立有限元模型，完成单元网格划分；后处理则是从分析结果数据中采集出有用的数据，用于最终评价。

早些时候，有限元分析通常需要分析人员自己编写程序，因此对分析人员而言，不仅需要具有扎实的专业基础知识，还需要很好的编程能力。随着有限元技术及计算机技术的发展，一些专业的软件公司推出了功能强大的专用或通用的分析程序（如 ANSYS、ALGOR 等），这样就极大地降低了分析人员的工作量，也降低了对分析人员的要求。分析人员只要对所求解的物理过程（如结构承载、温度场等）充分认识，了解有限元分析的基本原理，掌握分析软件的功能和使用方法，能够解释分析的结果，就可以进行有限元分析工作。本书的第二章将讲述建立模型及求解中的有关问题，第三章将论述如何解释有限元应力分析的结果，后续各章节内容的编排均基于上述需求。但是了解有限元分析的“内部机制”，对于做好分析工作仍然非常重要。

第二节 弹性力学有限元法

一、弹性力学基本方程

1. 平衡方程

弹性体中的微单元体上的正应力（ $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ）和剪应力（ $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{zx}, \tau_{xz}$ ），满足平衡方程：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

上式中, X, Y, Z 分别为单位体积上的体力在三个坐标轴方向的分量。

根据剪应力互等定理: $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$ 。

2. 几何方程

弹性体任意一点的应变 ($\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$) 和沿各坐标轴方向的位移 (u, v, w), 满足几何方程:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1-7)$$

为保证物体变形后连续, 各应变分量之间尚需满足应变协调方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

3. 物理方程

应力和应变之间满足物理方程 (对各向同性材料):

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} &= \tau_{xy} / G \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)], & \gamma_{yz} &= \tau_{yz} / G \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{zx} &= \tau_{zx} / G \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

式中, E 为弹性模量; μ 为泊松比; G 为切变模量, 对各向同性材料 $G = \frac{E}{2(1-\mu)}$ 。

4. 边界条件

除了上述基本方程外, 还有边界条件, 包括力边界条件和位移边界条件。只有将边界条件纳入才能求解。

上述方程是弹性有限元分析的基础, 也是需要求解的问题。通过这些方程, 可以推导出单元刚度矩阵、单元平衡方程、总体平衡方程, 施加边界条件并求解, 得到这些方程在特定求解域中的近似解。

二、单元列式

结构弹性力学分析中的常用单元随问题不同包括: 用于桁架分析的杆单元、梁单元, 用于平面问题的平面应力单元、平面应变单元, 用于轴对称问题的轴对称单元, 用于三维实体分析的三维实体单元, 用于板壳分析的板单元和壳单元等。按照单元的形状分为三角形/四面体单元, 矩形单元和等参数单元等, 其中等参数单元因精度高、适应性强而获得广泛应用。下面以四节点平面应力等参元为例, 介绍单元列式。其余单元大多雷同, 可参阅相关文献。

1. 四边形等参元的位移模式

对图 1-3 (a) 所示四边形单元，由四个节点组成，每个节点有两个自由度：沿 x 轴方向的位移 u 和沿 y 轴方向的位移 v 。单元内任意一点的位移可表述为^①：

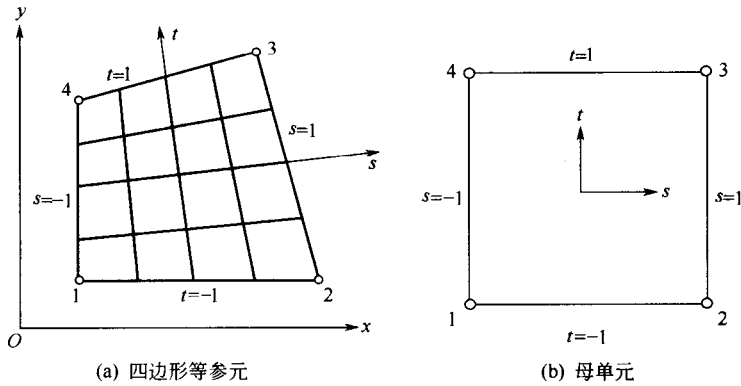


图 1-3 任意四边形单元

$$\left. \begin{aligned} u &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy \\ v &= a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 xy \end{aligned} \right\} \quad (1-10)$$

由于四边形的边线一般不平行于坐标轴，则边线方程可表示为：

$$y = kx + b \quad (1-11)$$

因此，在边线上有：

$$u = Ax^2 + Bx + C \quad (1-12)$$

可知在四边形任意边线上的位移模式不是线性变化的，且位移值不能由边线上两个节点的位移值惟一确定，从而不能保证相邻单元在公共边上位移的一致性，单元收敛条件将无法保证。但我们可以通过将任意四边形映射成如图 1-3 (b) 所示的正方形（母单元）来保证解的收敛性。变换关系为：

$$\left. \begin{aligned} x &= N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4 = \sum_{i=1}^4 N_i x_i \\ y &= N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4 = \sum_{i=1}^4 N_i y_i \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

式中， x_i 、 y_i ($i=1\sim 4$) 分别为四个节点的整体坐标，形函数 N_i ($i=1\sim 4$) 表达式为：

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-s)(1-t) \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1+s)(1-t) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+s)(1+t) \\ N_4 &= \frac{1}{4}(1-s)(1+t) \end{aligned} \right\} \quad (1-14)$$

式中， s 和 t 是点 (x, y) 在正交的单元局部坐标系中对应的坐标值。

① 单元位移模式不是随意取的，需要反映出单元的刚体位移和常应变状态，使单元在公共边界上保持位移或其导数的连续性。对非协调单元，后者可不满足。

利用上述变换关系，可以建立母单元的位移模式：

$$\left. \begin{aligned} u &= N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4 = \sum_{i=1}^4 N_i u_i \\ v &= N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4 = \sum_{i=1}^4 N_i v_i \end{aligned} \right\} \quad (1-15)$$

式中， u_i 、 v_i ($i=1\sim 4$) 分别为四个节点上沿整体坐标轴方向的位移。明显地，形函数 N_1 在节点 1 上的值为 1，在其他节点上的值为 0，其他形函数也具有相同的性质。

容易证明，在经过上面的坐标变换后，在单元边界上满足位移的连续性要求。

上述单元坐标的变换和位移模式采用相同的形函数，所以实际的四边形单元称为等参数单元，简称等参元。

2. 几何矩阵和应力矩阵

单元内任一点的应变表达为：

$$\{\epsilon\} = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = [B_1 \quad B_2 \quad B_3 \quad B_4] \{\delta\}^e \quad (1-16)$$

其中

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (i=1,2,3,4) \quad (1-17)$$

单元自由度列阵 $\{\delta\}^e = \{u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4\}^T$ ，上标 e 代表单元。

式 (1-17) 中采用了形函数对整体坐标的导数，而形函数是在局部坐标系下建立起来的，因此必须进行变换，如下：

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial s} \\ \frac{\partial N_i}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (1-18)$$

式中， $[J]$ 为雅克比矩阵， $[J]^{-1}$ 为雅克比矩阵的逆矩阵。 $[J]$ 的表达式为：

$$\begin{aligned} [J] &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial s} x_i & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial s} y_i \\ \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial t} x_i & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial t} y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial s} & \frac{\partial N_2}{\partial s} & \frac{\partial N_3}{\partial s} & \frac{\partial N_4}{\partial s} \\ \frac{\partial N_1}{\partial t} & \frac{\partial N_2}{\partial t} & \frac{\partial N_3}{\partial t} & \frac{\partial N_4}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-t) & (1-t) & (1+t) & -(1+t) \\ -(1-s) & (1-s) & (1+s) & -(1+s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1-19)$$