新世纪财经院校经济数学教辅用书

概率论与数理统计习题集

GAILÜLUN YU SHULI TONGJI XITIJI

上海财经大学应用数学系 编

上海财经大学出版社

新世纪财经院校经济数学教辅用书

概率论与数理统计
习题集

上海财经大学应用数学系　编

上海财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计习题集/上海财经大学应用数学系编. —上海：上海财经大学出版社，2005.2

（新世纪财经院校经济数学教辅用书）

ISBN 7-81098-327-X/O·009

Ⅰ.概… Ⅱ.上… Ⅲ.①概率论-高等学校-习题 ②数理统计-高等学校-习题 Ⅳ.O21-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 004718 号

GAILüLUN YU SHULI TONGJI XITIJI

概率论与数理统计习题集

上海财经大学应用数学系　编

责任编辑　刘光本　　封面设计　周卫民

上海财经大学出版社出版发行

（上海市武东路 321 号乙　邮编 200434）

网　　址：http://www.sufep.com

电子邮箱：webmaster@sufep.com

全国新华书店经销

同济大学印刷厂印刷

上海浦东北联装订厂装订

2005 年 2 月第 1 版　2005 年 2 月第 1 次印刷

890 mm×1240 mm　1/32　11.25 印张　302 千字

印数：0 001—4 000　定价：23.00 元

前　言

概率论与数理统计是现代数学的重要分支．由于它在研究方法上的鲜明特点，所以在自然科学、社会科学和工程技术的各个领域中都有着广泛的应用．这门课程的特点是理论严谨、应用性强．在教学过程中，我们经常发现一些学生不能灵活地应用所学知识解决问题．因此，做一定数量的习题不失为一个良好的方法．为了配合《概率论与数理统计》的教学，我们编写了本习题集．本习题集每章首先归纳了有关内容，其次给出了丰富的典型例题以及部分习题和参考答案．在编写过程中，我们琢磨并参照研究生入学考试题型和难度认真选题．所以，本习题集既可以作为一般教学的参考书，也可以作为有志考研者的良师益友．

参加编写的成员有：何其祥（第一、第二、第八、第九章），杨勇（第三、第四、第五、第七章），杨晓斌（第六、第十章）．上海财经大学应用数学系主任陈启宏教授、冉启康书记和杨晓斌副主任为此书的编写作了不少指导，付出了心血．我系概率论教研室的同事们也给予了很多帮助．在编写过程中，我们得到了上海财经大学“211”教学基金的资助，并得到了上海财经大学出版社的大力协助，特别是刘光本同志的认真编辑给本书润色不少，在此一并致谢．

由于时间仓促，加上我们水平有限，定会存在不足之处，恳请广大读者和同仁不吝赐教.

编　者

2005年1月

于上海财经大学

目　　录

第一章　事件与概率

一、内容提要

（一）随机试验和随机事件

1. 随机试验

对随机现象的某一特征的试验或观察，称为**随机试验**，简称**试验**，记为 T. 随机试验必须满足下述条件：

（1）试验可以在相同的条件下重复进行；

（2）试验之前能确定所有可能的结果；

（3）试验之前不能确定将会出现所有可能结果中的哪一个.

2. 样本点与样本空间

随机试验的每一可能结果称为**样本点**，用 ω 表示.

样本点全体组成的集合称为**样本空间**，用 Ω 表示.

3. 随机事件

由若干个样本点组成的集合（或样本空间的某个子集）称为**随机事件**，简称**事件**，用 $A,B,C,A_i,B_j,\cdots$ 等大写拉丁字母表示.

在某次试验中，若事件 A 中的某个样本点出现，则称 A **发生**.

样本空间 Ω 包含了所有的样本点，在每次试验中它总发生，因此 Ω 就是**必然事件**. 空集 Φ 不包含任何样本点，在每次试验中它总不发生，因此 Φ 即为**不可能事件**.

（二）事件之间的关系与运算

1. 包含关系

若事件 A 的每一个样本点都属于事件 B，则称 A **包含于** B，或称 A 是 B 的**特款**，记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$，这时事件 A 的发生必然导致 B 的发生．

2. 相等事件

如果同时成立 $A \subset B$ 及 $B \subset A$，则称事件 A 与事件 B **等价**，或 A **等于** B，记为 $A=B$. 此时 A 与 B 表示同一个事件，它们所包含的样本点完全相同．

3. 不相容事件

若在任何一次试验中，事件 A 与 B 都不可能同时发生，则称事件 A 与 B **互不相容**，或 A 与 B **互斥**．若 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，则称这 n 个事件互不相容．若可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 两两互不相容，则称 $A_1, A_2, \cdots$ 互不相容．

4. 交(积)

由同时属于事件 A 与 B 的样本点组成的集合称为 A 与 B 的**交**(或积)，记为 $A \cap B$ 或 AB，事件 AB 表示 A 与 B 同时发生．显然，A 与 B 互不相容即为 $AB=\varphi$. 事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的交事件记为 $A_1 A_2 \cdots A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$，它由同时属于 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的样本点组成，表示 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生．对可列个事件，定义 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \triangleq \lim\limits_{n \to \infty} \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$.

5. 并

由至少属于事件 A 与 B 中的一个的样本点组成的集合称为 A 与 B 的**并**，记为 $A \cup B$，事件 $A \cup B$ 表示 A 与 B 中至少有一个发生．如果 A 与 B 互不相容，则称它们的并为**和**，记为 $A+B$. 事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并记为 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$，它由至少属于 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中的一个的样本点组成，表示 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少发生一个．如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容，则称它们的并为和，记为 $A_1+A_2+\cdots+A_n$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i$. 对可列个事件，定义 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \triangleq \lim\limits_{n \to \infty} \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$. 若 $A_1, A_2, \cdots$ 互不相容，

则称它们的并为和，记为$\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

6. 逆事件

由不属于A的样本点组成的集合称为事件A的**逆事件**或**对立事件**，记为$\overline{A}$，$\overline{A}$表示事件A不发生.

注意：对立事件一定互不相容，但互不相容的事件不一定互为对立事件.

7. 差事件

由属于事件A而不属于B的样本点组成的集合称为事件A与B的**差**，记为$A-B$，事件$A-B$表示A发生而B不发生. 显然$A-B=A\overline{B}$.

事件运算的顺序：首先进行逆的运算，再进行交的运算，最后才进行并或差的运算.

与集合之间的关系及运算相类似，事件之间的关系及运算$A\subset B$，$AB=\Phi$，$A\cap B$，$A\cup B$，$\overline{A}$，$A-B$可以用 Venn 图直观地表示.

8. 事件之间的运算，满足以下法则：

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

(2) 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(3) 分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

(4) 德莫根(De Morgan)定理　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

德莫根定理可以推广到多个事件甚至可列个事件：

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\ \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i};$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A_i},\ \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}.$$

（三）概率的定义与性质

1. 频率及概率的统计定义

对于随机事件 A，若在 N 次试验中发生了 n 次，则称 $F_N(A)=\dfrac{n}{N}$ 为 A 在这 N 次试验中出现的**频率**.

频率具有以下性质：

(1)（非负性） 对任一事件 A，$F_N(A)\geqslant 0$；

(2)（规范性） $F_N(\Omega)=1$；

(3)（有限可加性） 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 互不相容，则

$$F_N(\sum_{i=1}^{m}A_i)=\sum_{i=1}^{m}F_N(A_i)$$

在一次试验或观察中，事件 A 是否发生是偶然的．但在大量重复试验中，A 出现的频率会在某个固定常数附近摆动，而且一般说来，随着试验次数的不断增加，摆动的幅度会越来越小，这一现象称为**频率稳定性**.

在频率稳定性中，事件 A 的频率的稳定值称为 A 发生的概率，以 $P(A)$ 表示，称这一定义为**概率的统计定义**，它度量了事件 A 发生的可能性大小.

2. 古典概型和概率的古典定义

(1) 古典概型

古典概型是指具有以下两个特征的一类特殊的概率模型：

（Ⅰ）试验的全部可能结果只有有限个，即样本空间只含有限个样本点，$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，$n$ 为有限正整数；

（Ⅱ）每个样本点出现的可能性相同，即 $P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)=\dfrac{1}{n}$.

(2) 概率的古典定义

$$P(A)=\frac{A\text{ 包含的样本点个数}}{\text{样本点总数}}=\frac{A\text{ 的有利场合数}}{\text{样本点总数}}.$$

古典概率具有以下性质：

(1)(非负性)　对任一事件 A, $P(A)\geqslant 0$；

(2)(规范性)　$P(\Omega)=1$；

(3)(有限可加性)　若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 互不相容，则

$$P(\sum_{i=1}^{m}A_i)=\sum_{i=1}^{m}P(A_i).$$

3. 几何概率

记 A_D 为事件“在区域 Ω 中随机地取一点，而该点落入区域 D 中”，称 $P(A_D)=\dfrac{D\text{ 的测度}}{\Omega\text{ 的测度}}$ 为**几何概率**．区域 Ω 和 A_D 可以是一维的，也可以是高维的．其中的测度是一个广义的概念，可以指长度、面积、体积等．与概率的古典定义类似，几何概率也是通过等可能性来定义的．这里的等可能性是指：随机选取的点落入区域 D 的概率与 D 的测度成正比，而与 D 的位置、形状无关．

几何概率具有以下性质：

(1)(非负性)　对任一事件 A, $P(A)\geqslant 0$；

(2)(规范性)　$P(\Omega)=1$；

(3)(可列可加性)　若事件 $A_1,A_2,\cdots$ 互不相容，则

$$P(\sum_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i).$$

4. 概率的公理化定义

(1) 事件域(σ－域)

设 Ω 是样本空间，$\mathcal{F}$ 是 Ω 的一些子集组成的集类，满足下列条件：

(Ⅰ) $\Omega\in\mathcal{F}$；

(Ⅱ) 若 $A\in\mathcal{F}$，则 $\overline{A}\in\mathcal{F}$；

(Ⅲ) 若 $A_i\in\mathcal{F}(i=1,2,\cdots)$，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{F}$.

则称 $\mathcal{F}$ 为 Ω 上的**事件域**($\boldsymbol{\sigma}$**-域**).

$\mathcal{F}$ 的性质：

(a)$\Phi \in \mathcal{F}$；

(b) 若 $A_i \in \mathcal{F}(i=1,2,\cdots)$，则 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$；

(c) 若 $A_i \in \mathcal{F}(i=1,2,\cdots,n)$，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$，$\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$；

(d) 若 $A,B \in \mathcal{F}$，则 $A-B \in \mathcal{F}$.

$\mathcal{F}$并没有包含 Ω 的所有子集，但足以包含了我们感兴趣的那些子集．在概率的公理化定义中，只有$\mathcal{F}$中的元素才称为事件，并赋以概率．

(2) 概率的公理化定义

设 P 是定义于事件域$\mathcal{F}$上的集合函数，满足条件：

①(非负性) $P(A) \geqslant 0, \forall A \in \mathcal{F}$；

②(规范性) $P(\Omega)=1$；

③(可列可加性) 若 $A_i \in \mathcal{F}(i=1,2,\cdots)$，且互不相容，则

$$P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

则称 P 为**概率**，而称三元体$(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为**概率空间**.

(3) 概率的性质

性质 1 $P(\Phi)=0$；

性质 2(有限可加性) 若 $A_i \in \mathcal{F}(i=1,2,\cdots,n)$，且互不相容，则

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i);$$

性质 3 对任何事件 A，有 $P(A)=1-P(\overline{A})$；

性质 4 如果 $A \supset B$，则

$$P(A-B)=P(A)-P(B), P(A) \geqslant P(B);$$

性质 5(概率的加法定理) 对任何两个事件 A,B，有

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

一般地，设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件，有下式成立

$$
\begin{aligned}
&P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \\
&\quad = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_i A_j A_k) - \cdots \\
&\qquad + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n).
\end{aligned}
$$

二、典型例题

例 1 写出下列随机试验的样本空间：

(1) 掷一枚均匀的骰子两次，观察两次出现的点数之和；

(2) 某篮球运动员投篮时，要求连续 5 次投中，观察其投篮的次数；

(3) 记录某班一次数学考试的平均成绩（以百分制记）；

(4) 一射手进行射击，直到击中时为止，观察其射击情况；

(5) 在单位圆内任选两点，观察这两点的距离；

(6) 观察某地一天内的最高气温和最低气温（假定最低气温不低于 T_1，最高气温不高于 T_2）.

解 (1) 骰子两次出现的点数之和最小为 2，最大为 12，故样本空间为

$$\Omega_1 = \{2, 3, \cdots, 12\}.$$

(2) 连续 5 次投篮命中，至少必须投 5 次，但无法确定它的上界，因此样本空间为

$$\Omega_2 = \{5, 6, \cdots\}.$$

(3) 设该班共有 n 名学生，则样本空间为

$$\Omega_3 = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, 100\right\}.$$

(4) 以 0 表示没有击中，1 表示击中目标．由于射击必须到击中目标时才终止，因此每一个样本点均为最后一次击中目标的序列，于是样本空间为

$$\Omega_4 = \{1, 01, 001, 0001, \cdots\}.$$

(5) 设两点的坐标分别为 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2)，则样本空间为

$$\Omega_5=\{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\mid x_1^2+y_1^2<1, x_2^2+y_2^2<1\},$$

或写成更加简洁的形式：

$$\Omega_5=\{t\mid 0<t<2\}.$$

(6) 设样本点为(x,y)，其中x,y分别表示最低气温和最高气温，则样本空间为

$$\Omega_6=\{(x,y)\mid T_1\leqslant x<y\leqslant T_2\}.$$

例 2 指出下列关系中哪些成立，哪些不成立：

(1)$A\cup B=A\overline{B}\cup B$；

(2)$(\overline{A\cup B})C=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$；

(3) 若$A\subset B$，则$A=AB$；

(4) 若$A\subset B$，则$\overline{B}\subset\overline{A}$；

(5) 若$AB=\Phi$，且$C\subset A$，则$BC=\Phi$；

(6)$(AB)(A\overline{B})=\Phi$；

(7)$\overline{A}B=A\cup B$.

解 (1) 成立. $A\overline{B}\cup B=(A\cup B)\cap(\overline{B}\cup B)=(A\cup B)\cap\Omega=A\cup B$.

(2) 不成立. $(\overline{A\cup B})C$发生，即$\overline{A\cup B}$发生且C发生，C发生则$\overline{C}$不发生，所以$\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$也不发生. 因此$(\overline{A\cup B})C\neq\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$.

(3) 成立. 首先，显然有$AB\subset A$，其次，若A发生，由于$A\subset B$，则B必发生，即$A\subset AB$，从而$A=AB$.

(4) 成立. 因为$A\subset B$，所以A的每个样本点都是B的，从而$\overline{B}$的每个样本点都是$\overline{A}$的，即$\overline{B}\subset\overline{A}$.

(5) 成立. 由于$C\subset A$，因此$BC\subset AB=\Phi$，但另一方面，显然成立$\Phi\subset BC$，所以$BC=\Phi$.

(6) 成立. $(AB)(A\overline{B})=A(B\overline{B})=A\Phi=\Phi$.

(7) 不成立. 若$\overline{A}B=A\cup B$，则$A\overline{A}B=A(A\cup B)$，即$\Phi=A\cup AB$，矛盾.

例 3 一块各面均涂有油漆的正方体被锯成 1 000 个同样大小的

小正方体．从这些小正方体中任取一个，求这一小正方体的两面涂有油漆的概率．

解　记 A 为"任意取得的小正方体两面涂有油漆"的事件．小正方体总的个数 $n = 1\,000$，正方体共有 12 条边，每条边被分成 10 段，每条边上各有 8 个两面涂有油漆的小正方体，因此 $m(A) = 12 \cdot 8 = 96$，所求概率 $P(A) = \dfrac{m(A)}{n} = 0.096$.

例 4　任取一整数 N，求 N^3 的最后两个数字均为 1 的概率．

解　记 A 为"N^3 的最后两个数字均为 1"的事件，将 N 写成 $N = a + 10b + \cdots$，其中 $a, b, \cdots$ 可以取 $0, 1, \cdots, 9$ 中的任意值．由于

$$N^3 = a^3 + 30a^2b + \cdots = a^3 + 10 \cdot 3a^2b + \cdots,$$

因此 N^3 的最后两个数字仅由 a 和 b 决定，从而样本点总数 $n = 10 \cdot 10 = 100$. 因为 N^3 的最后一个数字为 1，所以 $a^3 = 1$ 即 $a = 1$. 而 $\dfrac{N^3 - 1}{10} = 3b + \cdots$ 的最后一个数字亦应为 1，即 $3b$ 由 1 结尾，此时 b 只能为 7，从而 $m(A) = 1 \cdot 1$，所求概率 $P(A) = \dfrac{m(A)}{n} = 0.01$.

例 5　从 $1, 2, \cdots, n$ 中任取两个，求所得两数之和为偶数的概率．

解　记 A 为"所得两数之和为偶数"的事件．样本点总数显然为 C_n^2. 若 n 为偶数，此时偶数和奇数的个数均为 $\dfrac{n}{2}$，且由于偶数与偶数之和以及奇数与奇数之和为偶数，此时 A 的有利场合数 $m(A) = 2 \cdot C_{\frac{n}{2}}^2$. 若 n 为奇数，此时偶数的个数为 $\dfrac{n-1}{2}$，奇数的个数为 $\dfrac{n-1}{2} + 1$，A 的有利场合数 $m(A) = C_{\frac{n-1}{2}}^2 + C_{\frac{n-1}{2}+1}^2$. 因此

$$P(A) = \begin{cases} \dfrac{2 \cdot C_{\frac{n}{2}}^2}{C_n^2} = \dfrac{n-2}{2(n-1)} & n \text{ 为偶数} \\[2ex] \dfrac{C_{\frac{n-1}{2}}^2 + C_{\frac{n-1}{2}+1}^2}{C_n^2} = \dfrac{n-1}{2n} & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

例 6　从 $0, 1, \cdots, 9$ 中有放回地连取 4 个数，并按出现的先后次序