



高等学校理工科规划教材

高等数学

(上册)
**ADVANCED
MATHEMATICS**

史俊贤 ● 主编



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY TECHNOLOGY PRESS

高等学校理工科规划教材

013
302
:1

高等数学

(上册)

ADVANCED MATHEMATICS

主 编 史俊贤

副主编 靖 新 李 扬 滕 勇

编 者 (按姓氏笔划)

石鸿雁 史俊贤 李 扬

靖 新 滕 勇

RBR 54/04



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY TECHNOLOGY PRESS

© 大连理工大学出版社 2005

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上册) / 史俊贤主编. —大连: 大连理工大学出版社, 2005. 8
ISBN 7-5611-2966-1

I. 高… II. 史… III. 高等数学—高等学校—教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 082792 号

大连理工大学出版社出版

地址: 大连市凌水河 邮政编码: 116024

电话: 0411-84708842 传真: 0411-84701466 邮购: 0411-84707961

E-mail: dutp@dutp.cn URL: <http://www.dutp.cn>

大连华伟印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸: 185mm×260mm 印张: 13.5 字数: 312 千字

印数: 1~3 000

2005 年 8 月第 1 版

2005 年 8 月第 1 次印刷

责任编辑: 刘新彦 于建辉

责任校对: 欣 宇

封面设计: 张 金

定 价: 22.00 元



序 言

随着精英教育向大众教育的转化,高等教育呈现出了多层次、多样性的特点。如何使培养的人才更加适应社会的需要,为高等教育,特别是基础教育提出了许多新的课题。

大众教育阶段的人才不同于精英型人才的特点,我们必须因材施教,建立针对他们的培养方式、培养目标和评价标准,简而言之,即一个不同于精英型教育的教育模式。

新起点系列教材以“联系实际,加强计算,注重应用,提高素质”为特色,在概念的引入上,力求自然,通过实例来阐述其直观背景和现实意义;在基本理论上,力求直观,通俗易懂,着眼于培养学生的分析问题、解决问题的能力;在基本技能的培养上,注重基本运算能力和方法的训练。

新起点系列教材的作者都是从事教学多年的一线教师,他们从切身的体会中,把这套教材用由浅入深,通俗易懂的语言进行了重新组织,使读者在学习中真正领悟到高等教育的思想内涵与巨大价值!在此衷心感谢各位作者的辛勤劳动!

愿本系列教材成为同学们学习道路上的一个新的起点,从此踏上成功人生。

如果您有任何建议或意见,请与我们联系,联系方式:

电话:0411-84707962

邮箱:jcjf@dutp.cn

大连理工大学出版社
科技教育出版中心

2005年8月



前言

本书分上、下两册。上册内容为一元函数微积分学,书末附有初等数学中的常用公式及积分表。下册内容为向量代数与空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数和常微分方程。

本书力图体现下列特点:

1. 对于概念、定理、公式,尽可能从直观背景出发,提出问题,分析问题,水到渠成地得出结论。
2. 本着宏观不动,微观调整的原则,对传统内容适当删减,适当调整知识体系。
3. 各章节的例题和习题比较丰富,有利于打好基础,提高分析问题和解决问题的能力,并着重加强应用意识的培养。

本书的编写得到沈阳工业大学、沈阳建筑大学、沈阳化工学院的许多同行和朋友的大力支持,另外,书中引用了许多参考文献,在此一并表示衷心的感谢!

由于编者水平有限,难免有错漏不妥之处,恳请读者随时批评指正。

编者
2005年8月



目 录

第 1 章 函数与极限 / 1

1.1 函数 / 2

1.1.1 集合 / 2

1.1.2 映射 / 3

1.1.3 函数 / 4

1.1.4 函数的表示法 / 5

1.1.5 函数的特性 / 7

1.1.6 反函数 / 9

1.1.7 复合函数与初等函数 / 10

习题 1-1 / 12

1.2 数列与函数的极限 / 14

1.2.1 极限方法 / 14

1.2.2 数列的极限 / 14

1.2.3 函数的极限 / 16

1.2.4 关于极限概念的几点说明 / 21

习题 1-2 / 22

1.3 无穷小与无穷大 / 22

1.3.1 无穷小 / 22

1.3.2 无穷大 / 24

习题 1-3 / 25

1.4 极限的运算法则 / 26

习题 1-4 / 29

1.5 两个重要极限 / 29

习题 1-5 / 33

1.6 无穷小的比较 / 34

习题 1-6 / 36

1.7 函数的连续性 / 36

1.7.1 函数连续性的概念 / 36

1.7.2 函数的间断点 / 38

1.7.3 连续函数的运算 / 39

1.7.4 闭区间上连续函数的性质 / 41

习题 1-7 / 42

总习题 1 / 43

第 2 章 导数与微分 / 47

2.1 导数的概念 / 48

2.1.1 几个实例 / 48

2.1.2 导数的定义 / 50

2.1.3 导数的几何意义 / 52

2.1.4 可导与连续的关系 / 53

习题 2-1 / 53

2.2 函数的求导法则 / 54

2.2.1 函数四则运算的求导法则 / 54

2.2.2 复合函数的求导法则 / 56

2.2.3 隐函数的求导法则 / 58

2.2.4 反函数的求导法则 / 59

2.2.5 由参数方程所确定的函数的导数 / 61

2.2.6 对数求导法 / 62

习题 2-2 / 63

2.3 高阶导数 / 65

习题 2-3 / 67

2.4 函数的微分 / 68

2.4.1 微分的概念 / 68

2.4.2 微分基本公式与微分运算法则 / 70

习题 2-4 / 72

总习题 2 / 72

第 3 章 中值定理与导数的应用 / 75

3.1 微分中值定理 / 76

3.1.1 罗尔中值定理 / 76

3.1.2 拉格朗日中值定理 / 77

3.1.3 柯西中值定理 / 79

习题 3-1 / 79

3.2 洛必达法则 / 80

3.2.1 洛必达法则 / 80

3.2.2 其他类型未定式的极限 / 83

习题 3-2 / 84

3.3 函数的单调性及其判别 / 85

习题 3-3 / 87

3.4	函数的极值及其判别 / 88
3.4.1	极值的定义 / 88
3.4.2	极值存在的必要条件和充分条件 / 88
3.4.3	函数的最大值与最小值 / 91
	习题 3-4 / 94
3.5	曲线的凹凸性与拐点 函数图形的描绘 / 95
3.5.1	曲线的凹凸性与拐点 / 95
3.5.2	函数图形的描绘 / 98
	习题 3-5 / 100
* 3.6	曲率 / 101
3.6.1	弧微分 / 101
3.6.2	曲率及其计算公式 / 102
3.6.3	曲率圆与曲率半径 / 103
	习题 3-6 / 104
	总习题 3 / 104
第 4 章	不定积分 / 107
4.1	不定积分的概念与性质 / 108
4.1.1	原函数与不定积分 / 108
4.1.2	不定积分的几何意义 / 109
4.1.3	不定积分的性质 / 110
4.1.4	基本积分表 / 111
	习题 4-1 / 112
4.2	换元积分法 / 113
4.2.1	第一类换元积分法 / 113
4.2.2	第二类换元积分法 / 119
	习题 4-2 / 123
4.3	分部积分法 / 124
	习题 4-3 / 128
4.4	函数的积分举例与积分表的使用 / 128
4.4.1	简单有理函数的积分 / 128
4.4.2	三角函数有理式的积分 / 131
4.4.3	积分表的使用 / 132
	习题 4-4 / 134
	总习题 4 / 135
第 5 章	定积分 / 139
5.1	定积分的概念与性质 / 140
5.1.1	两个实际问题 / 140



5.1.2 定积分的定义 / 142

5.1.3 定积分的几何意义 / 143

5.1.4 定积分的性质 / 144

习题 5-1 / 145

5.2 微积分基本公式 / 146

5.2.1 变上限的定积分 / 147

5.2.2 牛顿-莱布尼茨公式 / 148

习题 5-2 / 151

5.3 定积分的计算 / 152

5.3.1 定积分的换元积分法 / 152

5.3.2 定积分的分部积分法 / 155

习题 5-3 / 157

5.4 广义积分 / 158

5.4.1 无限区间上的广义积分 / 159

5.4.2 无界函数的广义积分 / 161

习题 5-4 / 163

总习题 5 / 164

第 6 章 定积分的应用 / 167

6.1 定积分的元素法 / 168

6.2 定积分的几何应用 / 169

6.2.1 平面图形的面积 / 169

6.2.2 体积 / 172

6.2.3 平面曲线的弧长 / 175

习题 6-2 / 176

6.3 定积分的物理应用 / 177

6.3.1 变力沿直线所作的功 / 177

6.3.2 水压力 / 178

习题 6-3 / 178

总习题 6 / 179

部分习题参考答案与提示 / 181

附录

附录 1 初等数学中的常用公式 / 194

附录 2 几种常用的平面曲线方程及其图形 / 197

附录 3 积分表 / 200

参考文献 / 208

第1章

函数与极限

- 函数
- 数列与函数的极限
- 无穷小与无穷大
- 极限的运算法则
- 两个重要极限
- 无穷小的比较
- 函数的连续性



高等数学是研究变量及函数关系的一门数学学科,用极限的方法去研究函数是高等数学的一种基本方法,也是高等数学区别于初等数学的一个显著标志.

本章将介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念,以及它们的一些性质.重点为极限的计算方法.

1.1 函数

1.1.1 集合

1. 集合

集合为具有某种属性的一些对象所组成的总体.例如,一个班级的全体学生组成了一个集合;数 $2, 4, 6, 8, 10$ 组成了一个集合;满足不等式 $a < x < b$ 的 x 组成了一个集合等等.集合里的各个对象称为这个集合的元素.习惯上,我们经常用大写拉丁字母 A, B, C 等表示集合,而用小写拉丁字母 a, b, c 等表示元素.如果 a 是集合 A 的元素,则记作 $a \in A$,读作 a 属于 A ;如果 a 不是集合 A 的元素,则记作 $a \notin A$,读作 a 不属于 A .

集合的表示法通常有列举法和描述法.如全体自然数可表示为 $N = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$;而介于 a 和 b ($a < b$) 之间的数的全体可表示为 $A = \{x \mid a < x < b\}$.

习惯上,全体自然数的集合记作 N ;全体整数的集合记作 Z ;全体有理数的集合记作 Q ;全体实数的集合记作 R .有时用 R^+ 表示全体正实数的集合,用 R^- 表示全体负实数的集合.

2. 常用数集

常用数集除了自然数集 N 、整数集 Z 、有理数集 Q 、实数集 R 外,还有各类区间.设 $a, b \in R$ 且 $a < b$,则数集

$$\{x \mid a < x < b\}$$

称为开区间,记作 (a, b) ;数集

$$\{x \mid a \leq x \leq b\}$$

称为闭区间,记作 $[a, b]$;数集

$$\{x \mid a \leq x < b\} \text{ 或 } \{x \mid a < x \leq b\}.$$

称为半开(闭)区间,记作 $[a, b)$ 或 $(a, b]$.

上述三种区间又称为有限区间, a 和 b 称为区间端点.此外,还有无限区间:

数集 $\{x \mid x > a\}$,记作 $(a, +\infty)$;

数集 $\{x \mid x < a\}$,记作 $(-\infty, a)$;

数集 $\{x \mid x \geq a\}$,记作 $[a, +\infty)$;

数集 $\{x \mid x \leq a\}$,记作 $(-\infty, a]$;

数集 $\{x | -\infty < x < +\infty\}$, 记作 $(-\infty, +\infty)$.

这里 $+\infty$ 和 $-\infty$ 是一个记号, 分别读作正无穷大和负无穷大.

3. 邻域

当 $\delta > 0$ 时, 我们称开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 为点 a 的 δ 邻域, 记为 $U(a, \delta)$, 即

$$U(a, \delta) = \{x | a - \delta < x < a + \delta\}.$$

点 a 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径.

由于 $-\delta < x - a < \delta$ 相当于 $|x - a| < \delta$. 因此,

$$U(a, \delta) = \{x | |x - a| < \delta\}.$$

因为 $|x - a|$ 表示点 x 与点 a 的距离, 所以 $U(a, \delta)$ 表示与 a 点距离小于 δ 的一切点 x 的全体, 如图 1-1(a) 所示.

有时利用邻域需要把邻域的中心去掉, 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后, 称为点 a 的去心 δ 邻域, 如图 1-1(b) 所示. 记作 $\dot{U}(a, \delta)$, 即

$$\dot{U}(a, \delta) = \{x | 0 < |x - a| < \delta\}.$$

为了方便, 把开区间 $(a - \delta, a)$ 称为点 a 的左 δ 邻域, 把开区间 $(a, a + \delta)$ 称为点 a 的右 δ 邻域.

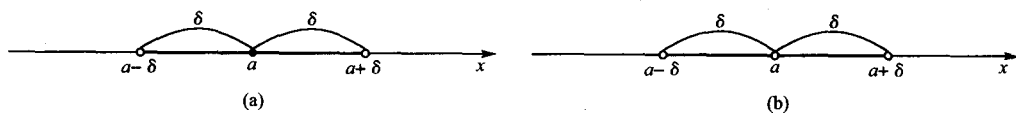


图 1-1

1.1.2 映射

定义 1.1

设 A, B 是两个非空集合, 如果按照某一个确定的规则 f , 对于集合 A 中每一个元素, 在集合 B 中都有惟一的元素与它对应, 则称 f 是由集合 A 到集合 B 的映射. 记作 $f: A \rightarrow B$.

如果 A 中的元素 a , 对应的是 B 中的元素 b , 记作 $b = f(a)$, 并称 b 为 a 的像, a 为 b 的原像(图 1-2).

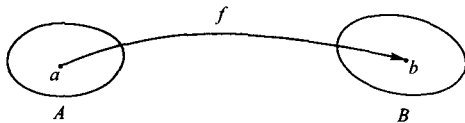


图 1-2

【例 1-1】 设 A 表示一个班级的全体学生, B 表示实数集合, 对应规则 f 是某一确定时刻学生的身高, 则 f 是由 A 到 B 的映射.

【例 1-2】 设 $A = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$, $B = \{y | 0 \leq y \leq 8\}$, 对应规则 f 是将集合 A

中的元素取立方,则 f 是由 A 到 B 的映射.

1.1.3 函数

定义 1.2

设数集 $D \subset \mathbf{R}$, 则称映射 $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数, 通常简记为

$$y = f(x), x \in D,$$

其中 x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为定义域, 记作 D_f , 即 $D_f = D$.

由函数的定义可知, 函数是映射的一个特例. 因此, 在函数的定义中, D 中的每一个数 x 按照对应法则 f , 总有惟一确定的值 y 与之对应, 称这个值为函数 f 在 x 处的函数值, 记为 $f(x)$, 即 $y = f(x)$. 与 x_0 对应的 y 值有时也记为 $f(x) \Big|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$. 习惯上, 也称 y 是 x 的函数. 而函数值的全体所组成的数集称为函数 f 的值域, 记作 R_f 或 $f(D)$, 即

$$R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

以后, 我们遇到用数学表达式表示的函数, 如不说明定义域, 函数的定义域就是使数学表达式有意义的实数全体. 若由实际问题所确定的函数, 其定义域要由这个问题的实际意义来确定.

对于不同的函数, 应该用不同的记号, 如 $f(x), g(x), F(x), G(x)$ 等等.

在函数定义中, 对于每一个 $x \in D$, 都有惟一一个确定的值 y 与之对应, 这样定义的函数称为单值函数. 如果给定一个法则, 按照这个法则, 对于每一个 $x \in D$, 都有确定的 y 值与之对应, 但这个 y 总是不惟一, 我们称这种法则确定了一个多值函数. 对于多值函数, 通常是限制 y 的范围而使之成为单值函数, 再进行研究. 例如, 函数 $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ 是多值函数, 当 y 限制在 $0 \leq y \leq 1$ 时, 就成为单值函数 $y = \sqrt{1-x^2}$, 当 y 限制在 $-1 \leq y \leq 0$ 时, 也成为单值函数 $y = -\sqrt{1-x^2}$.

以后, 凡没有特别说明时, 函数都是指单值函数.

【例 1-3】 常量 C 可以看作一个函数. 显然, 对于任意的一个实数 x , 都对应惟一的常数 C , 这个函数也称为常数函数, 其定义域是实数集 $\mathbf{R}$.

【例 1-4】 求函数 $f(x) = \arcsin \frac{x-1}{5} + \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 的定义域.

解 这个函数的表达式是两项之和, 所以当且仅当每一项都有意义时, 函数才有意义. 第一项的定义域是 $D_1 = \{x \mid -4 \leq x \leq 6\}$, 第二项的定义域是 $D_2 = \{x \mid -5 < x < 5\}$. 所以, 函数 $f(x)$ 的定义域 $D = D_1 \cap D_2 = \{x \mid -4 \leq x < 5\}$, 或写为区间 $[-4, 5)$.

【例 1-5】 设函数 $f(x) = x^2 - 3x + 4$, 求 $f(0), f(t^2), f\left(\frac{1}{t}\right), [f(t)]^2, \frac{1}{f(t)}$.

解 $f(0) = 0 - 3 \times 0 + 4 = 4,$

$$f(t^2) = (t^2)^2 - 3 \times t^2 + 4 = t^4 - 3t^2 + 4,$$

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \left(\frac{1}{t}\right)^2 - 3 \frac{1}{t} + 4 = \frac{1 - 3t + 4t^2}{t^2},$$

$$[f(t)]^2 = (t^2 - 3t + 4)^2,$$

$$\frac{1}{f(t)} = \frac{1}{t^2 - 3t + 4}.$$

【例 1-6】 设 $f(x+3) = \frac{x+1}{x+2}$, 求 $f(x)$.

解 令 $x+3 = t$, 则 $x = t-3$, $f(t) = \frac{(t-3)+1}{(t-3)+2} = \frac{t-2}{t-1}$, 即

$$f(x) = \frac{x-2}{x-1}.$$

1.1.4 函数的表示法

常用的函数表示法有三种:公式表示法、图形表示法和表格表示法. 图形表示法和表格表示法比较直观,是工程中常用的方法;公式表示法通常用在分析研究中.

通常我们把坐标平面上的点集

$$\{P(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数 $y = f(x), x \in D$ 的图形.

【例 1-7】 某地的气象站用自动温度记录仪记载了该地在一昼夜间气温变化的情况,如图 1-3 所示.

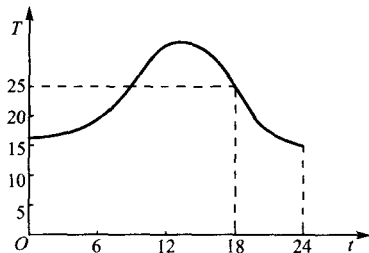


图 1-3

对 $[0, 24]$ 内的任意时间 t , 都对应惟一的一个温度 T , T 是 t 的函数. 此函数是用图 1-3 中的曲线表示的, 函数的定义域是 $[0, 24]$ (单位: h).

【例 1-8】 某城市一年中各月毛线的零售量 (单位: 百公斤) 如表 1-1 所示.

表 1-1

月份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
零售量 S	81	86	55	45	9	5	6	15	94	181	144	123

表 1-1 表示了某城市毛线零售量 S 随月份 t 变化的情况, S 是 t 的函数, 此函数是用表格表示的. 它的定义域是 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

【例 1-9】 炼油厂要建造容积为 V_0 的圆柱形储油罐(图 1-4), 试建立它的表面积与底半径之间的函数关系式.

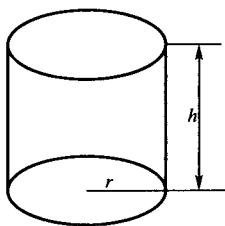


图 1-4

解 设圆柱形储油罐的底半径为 r 、高为 h 、表面积为 S , 则 $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$. 由于储油罐的容积 V_0 一定, 由 $V_0 = \pi r^2 h$, 得 $h = \frac{V_0}{\pi r^2}$, 代入上面表面积公式, 即得储油罐的表面积 S 与底半径 r 之间的函数关系式 $S = \frac{2V_0}{r} + 2\pi r^2$, 这个函数的定义域为 $0 < r < +\infty$.

有时变量之间的函数关系较为复杂, 需要用几个式子来表示. 例如,

$$y = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x-1, & x > 0 \end{cases}$$

这是在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内的不同区间上用不同式子表示的一个函数, 这种形式的函数, 称为分段函数. 这个分段函数的图形如图 1-5 所示. 需要注意的是, 此分段函数是用三个式子表示的函数, 而不是三个函数. 同时, 还需注意, 在求函数值时, 应该把自变量的值代入相应变化范围的式子中去计算.

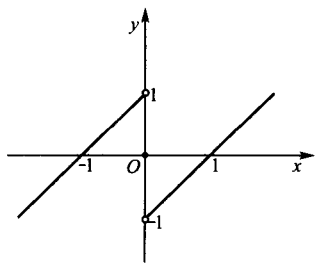


图 1-5

【例 1-10】 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -1-x^2, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1+x^2, & x > 0 \end{cases}$

(1) 求 $f(x)$ 的定义域; (2) 求 $f(0), f(\frac{1}{2}), f(1), f(-2)$.

解 由函数的表达式可以看出, $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$.

$$f(0) = 0, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4},$$

$$f(1) = 1 + 1^2 = 2, \quad f(-2) = -1 - (-2)^2 = -5.$$

函数 $f(x)$ 的图形如图 1-6 所示.

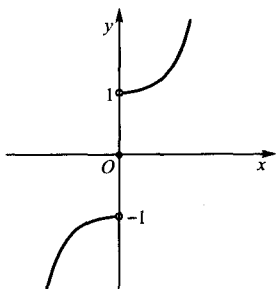


图 1-6

1.1.5 函数的特性

1. 有界性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有意义,若存在一个正数 M ,使得对于区间 I 上任意一点 x ,都有 $|f(x)| \leq M$,则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有界,或称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是有界函数. 如果不存在这样的正数 M ,则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上无界,或称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是无界函数.

显然,区间 I 上的有界函数 $f(x)$ 的图像位于以两条直线 $y = \pm M$ 为边界的带形区域内(M 是该函数的界).

例如,函数 $y = \sin x$ 在其定义域内是一个有界函数,而函数 $y = x + 3$ 在区间 $[2, 7]$ 上也是一个有界函数,即存在 $M = 10$,使对任意 $x \in [2, 7]$,都有 $|x + 3| \leq M$.

函数 $y = \frac{1}{x}$ 在定义域内是无界函数,因为不存在这样的正数 M ,使得对于定义域上的所有 x ,都有 $\left| \frac{1}{x} \right| \leq M$ 成立.

注意 有这样的情况:函数在其定义域上的某一部分是有界的,而在其定义域上的另一部分是无界的. 因此,一个函数是有界的还是无界的,必须指出相应的范围.

如,函数 $y = \frac{1}{x}$ 在定义域内是无界的,但在区间 $[1, 2]$ 上是有界的.

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$, 如果对于 I 上的任意两点 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时,恒有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的; 如果对于 I 上的任意两点 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时,恒有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的.

单调增加与单调减少的函数统称为单调函数. 使单调函数成立的区间 I 称为函数的单调区间.

单调增加的函数的图形在其单调区间内, 从左向右是一条上升的曲线, 而单调减少的函数的图形在其单调区间内, 从左向右是一条下降的曲线(图 1-7 和图 1-8).

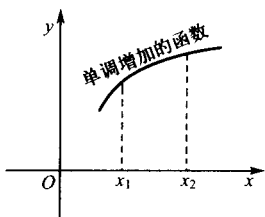


图 1-7

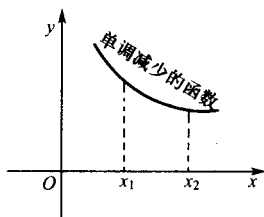


图 1-8

例如, $y = \tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内是单调增加的函数.

注意 一个函数在某一区间内是单调增加的, 而在另一个区间内是单调减少的, 或者在某个区间内既不单调增加, 也不单调减少, 即是一个非单调函数.

例如, $y = x^2$ 在区间 $[0, +\infty)$ 内是单调增加的, 在区间 $(-\infty, 0]$ 内是单调减少的, 而在 $(-1, 1)$ 内是非单调函数.

又如, $y = x^3$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的.

3. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 如果对任一 $x \in D$, 恒有

$$f(-x) = f(x)$$

成立, 则称函数 $f(x)$ 为偶函数; 如果对任一 $x \in D$, 恒有

$$f(-x) = -f(x)$$

成立, 则称函数 $f(x)$ 为奇函数.

例如, $y = x^2$, $y = \cos x$ 都是偶函数; $y = x^3$, $y = \sin x$ 都是奇函数; 而 $y = x^2 + \sin x$ 既不是奇函数, 也不是偶函数, 即是一个非奇非偶函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称, 奇函数的图形关于原点对称(图 1-9 和图 1-10).

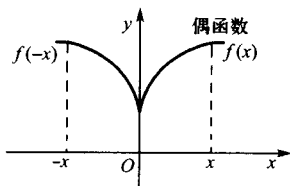


图 1-9

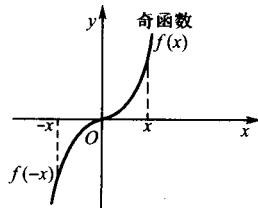


图 1-10

【例 1-11】 判断函数 $y = x^4 - 2x^2$ 的奇偶性.

解 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$. 因为 $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 =$