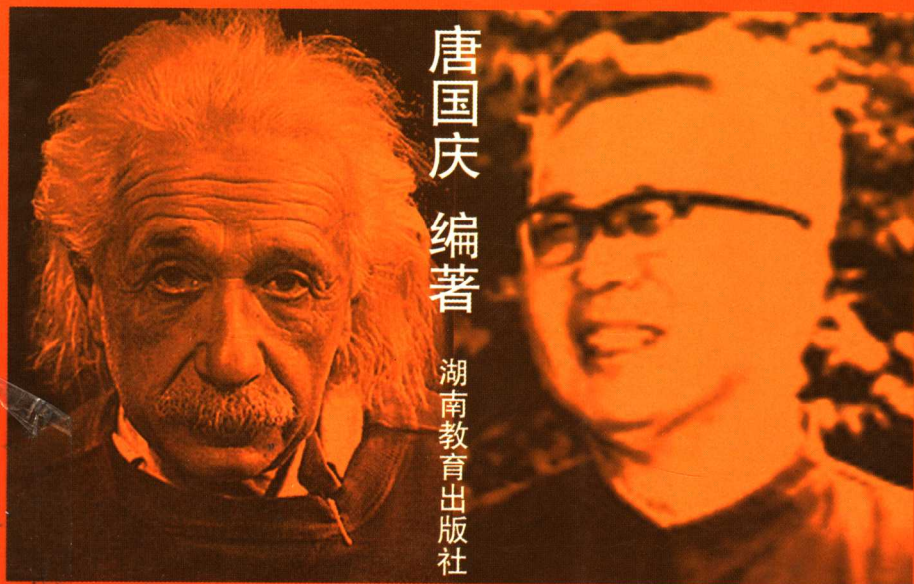




XIANGSHOUSHUXUE

享受数学

——数学珍闻趣题选粹



唐国庆

编著

湖南教育出版社

科学性

知识性

XIANGSHOUSHUXUE

享受数学

——数学珍闻趣题选粹

唐国庆 编著

湖南教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

享受数学:数学珍闻、趣闻选粹/唐国庆编著. —长沙:
湖南教育出版社, 2004.5

I. 享... II. 唐... III. 数学—普及读物 IV. 01-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 038156 号

享受数学
——数学珍闻、趣闻选粹

唐国庆 编著

责任编辑: 陆 超

湖南教育出版社出版发行(长沙市韶山北路 643 号)

网 址: <http://www.hneph.com>

电子邮箱: postmaster@hneph.com

湖南省新华书店经销 国防科技大学印刷厂印刷

787 × 1092 18 开 印张: $14\frac{2}{3}$ 字数: 258000

2004 年 6 月第 1 版 2004 年 6 月第 1 次印刷

印数: 1 - 1000

ISBN7 - 5355 - 4246 - 8/G·4241

定 价: 26.00 元

本书若有印刷、装订错误, 可向承印厂调换

热爱数学 享受数学

(代序)

数学作为研究空间形式和数量关系的科学，它不仅是刻画自然规律和社会规律的科学语言和有效工具，也是人类文化的重要组成部分。数学教育作为整个教育的重要成分，在发展和完善人的教育活动中，在形成人们认识世界的观念和思想方法方面，在推动社会进步和发展的进程中起着不可替代的作用。

著名数学家M.克莱因说过：“数学是人类最高超的智力成就，也是人类心灵最独特的创作。它像音乐能激发和抚慰情怀，它像绘画使人赏心悦目，它像诗歌能动人心弦，它像哲学使人获得智慧。”可见，数学是人的发展中不可或缺的内容。首先，数学不仅给人以必需的知识，更为重要的是，数学教给人如何运用它去看待世界、认识自然的思想方法，掌握事物发展的普遍规律。其次，数学表现了人类的智能本质与特征，数学活动是智力体操与尝试创造的活动，对人的科学思维与创新意识的培养起着重要的作用。第三，数学揭示了大自然的奥秘，揭示了事物运动发展的动力与源泉，揭示了现实世界事物间的内在联系，有助于提高人的鉴别真善美的能力。

通过课堂教学，学生初步掌握了数学这门学科的基础知识和基本技能，具备了一定的计算能力、空间想像能力、逻辑推理能力与分析和解决问题的能力。然而教材所涵盖的内容终究是有限的，并且由于篇幅的限制，不仅简略或淡化了知识的发生发展过程，而且将一些能激发学生兴趣的材料也不得不忍痛割爱。正如数学家弗赖登塔尔所说的那样：“没有一种数学的

思想，以它被发明时的那个样子发表出来。一个问题被解决后，相应地发展为一种形式化技巧，结果把求解过程丢在一边，使得火热的发明变成冰冷的美丽。”这样，使得数学对于有的学生来说，感到枯燥乏味，甚至有几分恐惧。

为了追寻数学发展的历史足迹，反映数学的应用功能和发展趋势，开拓学生的知识视野，唐国庆先生编写了《享受数学——数学珍闻趣题选粹》一书。本书从历史故事、珍闻趣题、知识发生发展过程出发，引发学生对数学的热爱，带领学生走进美妙的数学花园，让他们去尽情领略其千姿百态、绚丽斑斓的无限风光，享受数学带来的无穷乐趣。

本书既考虑了数学知识的相关性和层次性，又兼顾了读者的可接受性，表达准确，文字流畅，具有科学性、知识性、趣味性和资料性的特点。适合初、高中学生阅读，也是数学教师的一本好的教学参考书。

相信读者阅读本书之后，他们会感受到数学的美学价值和理性精神，体会到数学发展的艰难曲折和春华秋实。分享前人成功的喜悦，激发对数学的热爱和兴趣，增强钻研数学的信心和勇气，仿效先哲的刻苦和创新精神，领悟分析和解决问题的思想方法。

是为序。

楊向群

2004年5月

目 录

1 数的产生与发展	1
2 “0”之漫话	4
3 丢番图墓碑上的诗	7
4 托尔斯泰喜欢的算术题	9
5 波利亚的谜题	12
6 牛顿的牛吃草问题	16
7 别忘了相对论	19
8 时间——路程图	22
9 爱因斯坦解答的问题	24
10 有趣的分数	27
11 无穷多的素数	31
12 厄拉托塞筛法	34
13 伪素数和费马数	36
14 哥德巴赫猜想	40
15 神秘的无穷多	43
16 古算题“分羊找补”	46
17 孙子定理	48
18 真正的发现	51
19 费马大定理	54

20	荒岛上的椰子	57
21	勾股定理	61
22	毕达哥拉斯数	64
23	数字平方和的奇妙性质	67
24	无理数的发现	70
25	对数——人造之数	72
26	超越数 π 和 e	75
27	欧几里得和《几何原本》	78
28	刘徽割圆术	80
29	祖冲之与圆周率	83
30	光的几何性质	86
31	欺骗眼睛的几何问题	89
32	著名的几何三大问题	92
33	阿基米德与圆柱容球	95
34	大金字塔之谜	98
35	精巧的蜂房结构	100
36	多面体与欧拉公式	104
37	笛卡尔与解析几何	108
38	我们周围的圆锥曲线	110
39	几何定理的机械化证明	113
40	“不可思议”的非欧几何	116
41	高斯其人其事	119

42	无法兑现的重赏	123
43	巧断金链	127
44	砝码的重量	130
45	斐波那契数列	133
46	美妙的黄金分割	136
47	兑换零钞	139
48	数学归纳法	142
49	杨辉三角与莱布尼兹三角	145
50	最短路线的条数	147
51	复数的形成与发展	150
52	海岛上的宝藏	152
53	数学史上的一桩“冤案”	155
54	三角学的历史	158
55	走近“数学建模”	160
56	脸谱与数学	163
57	欧拉皮带理论	165
58	格点与面积	168
59	地图着色问题	171
60	神奇的莫比乌斯带	174
61	欧拉与七座桥问题	178
62	抽屉原则	181
63	小方格涂色问题	184

64	布尔代数	188
65	谁打破了窗玻璃	192
66	环路上的加油站	195
67	理发师悖论	198
68	芝诺悖论	201
69	从田忌赛马谈起	204
70	老鼠逃跑的策略	206
71	烧水沏茶中的学问	208
72	最大通过能力问题	212
73	拉丁方	215
74	区组设计拉丁方	218
75	拉丁方与几何	221
76	并不模糊的模糊数学	225
77	微积分史话	228
78	概率论的起源	231
79	数理统计的起源与发展	234
80	不可能问题	237
附录 1	希尔伯特的 23 个数学问题	240
附录 2	菲尔兹奖和沃尔夫奖	245
附录 3	以中国人名字命名的主要数学成果	253
后记		254

1

数的产生与发展

从我们开始懂事的时候起，就天天在同数打交道。然而数是如何产生和发展的呢？

人类的祖先在与大自然艰难的搏斗中，在长期的劳动中慢慢地产生了“数”的思想。他们找到了食物，会想到这是“有”；找不到食物，就会想到“无”。要是找到大量的食物，他们认为是“多”；得到的食物不够吃，他们认为是“少”。因此，周围的物体是与数的概念紧密地联系在一起的。例如眼睛、耳朵、人的手、鸟的翅膀等使人产生了“2”这个数的概念。任何一个单位的物体，例如太阳、月亮、人本身等使人产生了“1”这个数的概念。因此，对于数的最原始的说法，往往等同于表达的物体。

经历了漫长的游离穴居生活后，随着经验的丰富和工具的改进，人类逐渐开创了新的生活。再回到过去居住过的地方时，他们发现上次无意撒落的谷粒和麦粒，已经发芽生长；被遗弃的小动物，也已长大。慢慢地，他们学会了种植和饲养，开始了定居生活。由于物质的丰富，人们尝试先用手指数，后用脚趾来计数。然而，对于一群羊的计数，手指和脚趾不够用，他们只好采用“记账”的办法，在赶羊棒上刻下一些刻痕，并把这些刻痕5条一组地放在一起。罗马数字中代表10的符号X，大概就是从图1中两个组成5的斜线演变而来的。



图1

在秘鲁，印加人用在绳子上

打结的办法，来记录收获谷物的捆数。我国也有结绳计数的古老传说。直到今天，在欧洲、亚洲和非洲的部分地区，还有一些牧羊人用在棒上刻痕的办法，来计算自己的羊群哩！20 世纪 30 年代，美国一个考古队曾在伊拉克境内发现一个蛋形的空心封口泥罐，泥罐的表面画着某种牲畜，里面放着 48 颗泥丸。经考古学家分析认为，这是一个计数的“单据”，它表示泥罐的主人曾经有过 48 头这样的牲畜。后来又经过很长时间的探索，人们创造出更为完善的计算工具：俄国算盘和中国算盘。同时，为了预计生羔、产犊和播种、收获的时间，编制日历也成为一件非常重要的事情。

记录财物和编制日历，促使人们发展书写数字。

我们今天知道的最早的书写数字，产生在 5 000 年前的埃及和美索不达米亚。埃及人把数字写在一种纸草上，美索不达米亚的巴比伦人把数字写在软黏土上，他们都是用竖划表示个位数，用不同的记号表示十位数和更高位的数(如图 2)。

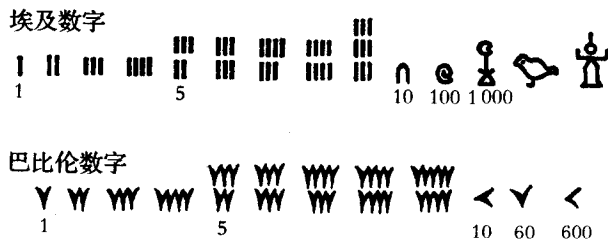


图 2

3000年后，罗马人同样采用竖划组成数字(如图3)，并且至今还在用哩！

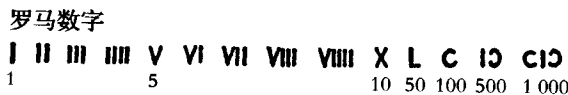


图 3

在我国殷代的甲骨文字中，就有很多是数字。在他们的数字中，头4个字，即一、二、三、四，是由横划组成的。从殷甲骨文、周秦金文、汉朝时

1 数的产生与发展

候用的数字和现代数字，我们可以看出它们之间的演变情况(如图 4)。

完整的数的概念是建立在进位制基础之上的。十进制计数法产生于用手指计数的过程中。除了十进制外，还有二进制、五进制、二十进制、六十进制等，这些进位制也同样是为了计数的方便而产生的。

殷甲骨文

一 二 三 四 五 六 七 八 九 十 百 千

周秦金文

一 二 三 四 五 六 七 八 九 十 百 千

汉代

一 二 三 四 五 六 七 八 九 十

现代

一 二 三 四 五 六 七 八 九 十 百 千

图 4

数的概念的形成和计数方法的产生是人类对数学认识的发端。随着一代又一代人的不懈努力，完整的数的理论日趋形成，并为整个数学的发展奠定了坚实的基础。

数学是训练思维的体操。

——加里宁

2

“0”之漫话

在数学中，“0”也许是最具特殊意义的数了。“0”是“零”的符号。从数量上说，0可以表示没有；在计数时，0表示空位；在整数后面添加一个0，所得到的数恰为原数的10倍；引入负数概念后，0是既不为正也不为负的中性数。此外，我们常说气温是0摄氏度，并不是表示没有温度，而是一种温度的数量界限……恩格斯曾经说过：“零比其他一切数都有更丰富的内容。”

在我们今天看来，没有“零”的数学简直是难以想像的。可是历史上“零”的出现，特别是符号“0”的产生，却经历了非常曲折的过程。

哥伦布是15世纪末西班牙著名的航海家，他历尽千辛万苦发现了美洲新大陆。他返回西班牙后，受到了百姓的欢迎和王室的奖赏，同时也遭到某些王公贵族的忌妒。在一次宴会上，有人鄙夷地说：“到那个地方（指美洲新大陆）去了有什么了不起？只要有船，谁都能去。”哥伦布并未反驳，只是拿起一个熟鸡蛋，问道：“谁能把这只鸡蛋用小的那头竖起来？”许多试过的人都说不能。只见哥伦布拿起蛋在桌上轻轻地敲破了一点壳，就竖了起来。于是又有人不服气地说：“这谁不会。”哥伦布平静地回答道：“在别人没有做之前，谁都不知道怎么做，一旦别人做了之后，却又认为谁都可以做。”说得他们面面相觑，无言可答。因此，数学家曾形象地把“0”比作“哥伦布鸡蛋”。

“0”的产生与采用十进制计数法有着密切的关系。古代巴比伦的文献记载中就出现了“0”的萌芽，但是与现在不同的是，零的符号是用空位来表

示其作用的。例如，要表示“206”，巴比伦人写作“2 6”，中间所空的格表示其十位上的数字没有，以便与“26”区别。这里的空位虽然没有数字符号，但确有内容，它显示了2和6的位置，使2表示200，而6表示6。这实际上是一种预先确定数位再填数的方法。然而，空着不写的方法是有缺陷的。这很容易与“2006”等数字混淆不清。若将“2 6”写在纸上，谁知道中间有几个空位呢？

零的符号最早出现于印度，其记载大约在公元876年。印度人曾用“.”表示空位，把206表示成2·6。后来，小圆点才慢慢演变成“0”，并随着其他印度数码传入阿拉伯和欧洲，以后就形成了现今世界通用的印度——阿拉伯数码。当印度数字还没有流行于欧洲之前，那里除了有希腊和斯拉夫等民族的数字外，普遍流行的要算古罗马数字了(如图1)。

现代阿拉伯数字	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100
埃及数字	I	II	III	IIII	𐍚	𐍛	𐍜	𐍝	𐍞	𐍟	𐍠
印度数字	१	२	३	४	५	६	७	८	९	०	१००
巴比伦数字	𐎶	𐎵	𐎴	𐎳	𐎲	𐎱	𐎰	𐎯	𐎮	𐎭	𐎠
古罗马数字	I	II	III	IIII	V	VI	VII	VIII	IX	X	C
玛雅数字	•	••	•••	••••	—	—•	—••	—•••	—••••	—•••••	—••••••

图1

但令人奇怪的是，在古罗马数字里至今仍没有相应的表示“零”的符号，这是为什么呢？原来在公元6世纪时，“0”已经来到古罗马帝国了。可是，当时保守的教皇在他的法典里规定：“对于应当批判的数学，应当彻底禁止其传播。”“0”就是这样被教皇禁止使用的。他宣称：罗马数字是上帝创造的，它是可以表示任何数的“和谐系统”，任何人不得随意添加和更改。然而，新的正确的东西是不可战胜的，封建神权的禁锢终究未能阻止“0”的传播。由于古罗马数字使用起来极不方便，“上帝所创造”的拙笨的古罗马数字最终不得不让位给人类所创造的灵巧的数字——阿拉伯数字。

“零”的故乡在中国. 我国最早的诗歌总集《诗经》中就有零的记载, 比数码符号“0”早1000多年. 不过, 其原义并不含有“空”和“无”的意思, 而是指“雨后的小水滴”, 后来引申为“零头”的意思. 在我国古代的结绳计数法中, “0”是在对“有”的否定中出现的, 意思是“没有”. 魏晋时期著名的数学家刘徽注《九章算术》时, 对“0”的解释非常清楚.

唐宋时期, 我国数学高度发展. 借用古书中用“□”表示缺字的方法, 数学上用“□”表示空位. 由于古代用毛笔书写, 写“○”比写“□”方便得多, 渐渐地“○”取代了“□”. 当时, 人们还将“0”称为金贺数字, 表示珍贵之意.

尽管关于“0”的起源说法不一, 没有一个定论, 但是无论如何, “0”自从一出现就显示出其旺盛的生命力, 并在数学发展史上发挥着非凡的作用.

符号的巧妙和符号的艺术, 是人们绝妙的助手, 因为它们使思考工作得到节约. 在这里它以惊人的形式节省了思维.

——莱布尼兹

3

丢番图墓碑上的诗

丢番图(246—330年)是古希腊著名的数学家。关于他的出身与生平，后人几乎一无所知，仅据他墓碑上的碑文诗才能略知一二。诗是这样的：

过路的人！

这儿埋葬着丢番图。

请计算下列数目，

便可知他一生经过了多少个寒暑。

他一生的六分之一是幸福的童年，

十二分之一是无忧无虑的少年。

再过去七分之一的生命旅程，

他建立了幸福的家庭。

五年后儿子出生，

不料儿子竟先于父亲四年而终，

年龄不过父亲享年的一半，

晚年丧子老人真可怜，

悲痛之中度过了风烛残年。

请你算一算，丢番图活到多少岁，

才和死神见面？

对于此题，现在初中的学生就能通过列一个一元一次方程解出来：

设丢番图去世时为 x 岁，则依题意有

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4.$$

解之可得 $x = 84$ (岁).

然而在当时，一元一次方程还没得到应用，解这道题是相当麻烦的，需要进行很多的猜测和比较，才能得到正确的答案。难怪西方著名的数学史家史密斯曾发出这样的感慨：“世界竟曾经为了一个形如 $ax + b = 0$ 的方程所困惑过，这似乎是不可思议的。但是古代数学家为解这种方程，却确实曾求助于一种比较繁琐的方法，这种方法后来在欧洲称为‘试位法’。”至于方程这个名词，最早是在我国的《九章算术》里出现的。数学家刘徽注解：“程，课程也。群物总杂各列有数，总言其实，令每行为率。二物者再程，三物者再程，皆如物数程立，并列为行，如谓三方程。”这段话的意思是，题目中每一个条件可列一个式子，几个式子合在一起成一个方程，所以叫方程。在《九章算术》中还专门有“方程章”一节。可见，中国的数学家对方程的研究是走在世界前列的。

亚历山大时期，希腊代数到丢番图时达到了最高点，丢番图的成就远远超过了他的同时代人。他的著作有《算术》和《多角数》两本，但可惜出来得太晚而不能对当时已经衰落下来的希腊文明产生太大的影响。《算术》一书共 13 卷，现存 6 卷；而《多角数》仅存一些残篇。

《算术》是代数学史上的重要典籍。载有 50 多种类型的 189 个问题，每个问题都给出了巧妙的解法。丢番图最早使用一套符号来代替文字表达，并且在当时使用 3 次以上的高次乘幂更是件了不起的事。后人把丢番图的代数称为缩写代数，而把埃及、巴比伦和海伦的代数称为文字叙述代数。

丢番图的另一个重要贡献是他对不定方程的研究。尽管这种方程以前也有人涉及，如毕达哥拉斯有关解 $x^2 + y^2 = z^2$ 的著作，阿基米德的“牛群问题”等。但对不定方程进行广泛而又深入研究的第一人却是丢番图。至今，人们仍把求整数解的整系数不定方程称之为“丢番图方程”，并将这个代数分支称之为“丢番图分析”。