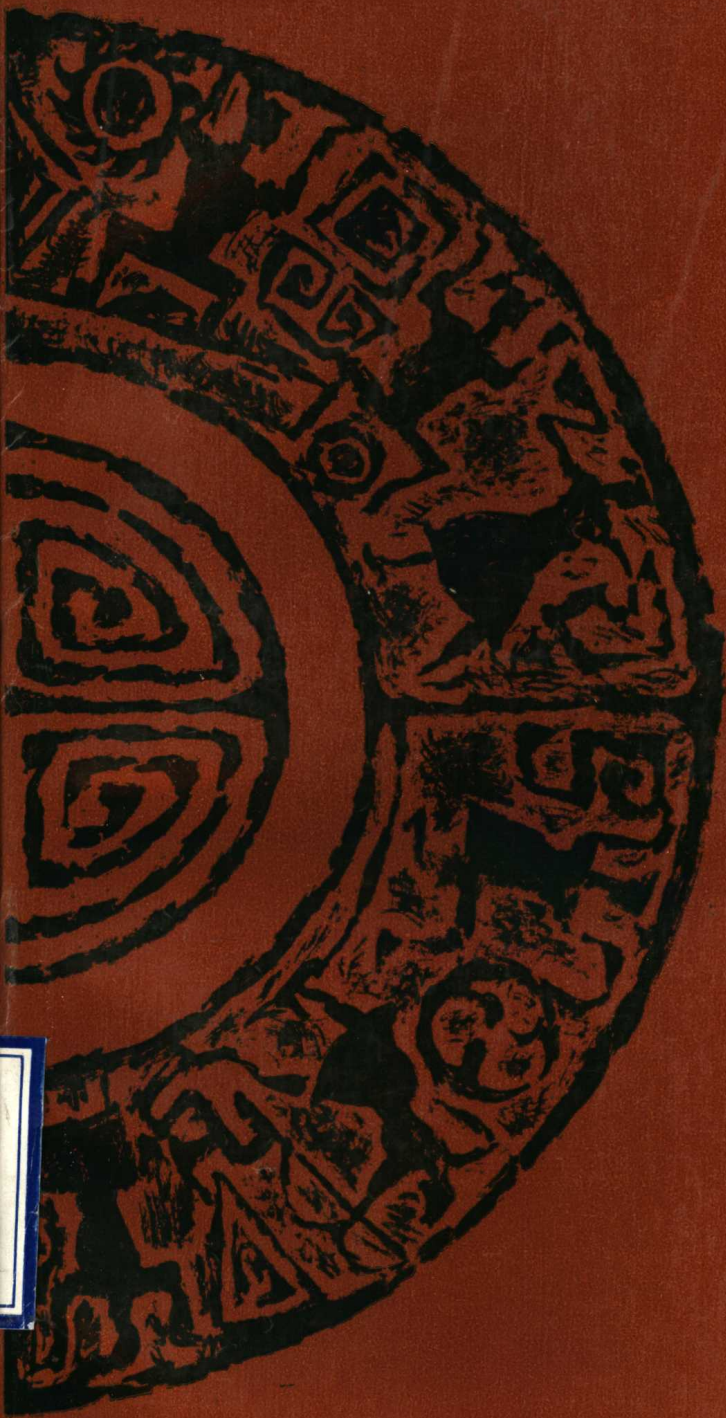


古代世界数学泰斗刘徽

郭书春 著

山东科学技术出版社



古代世界数学泰斗刘徽

郭书春 著

山东科学技术出版社

(鲁)新登字05号

古代世界数学泰斗刘徽

郭书春 著

*

山东科学技术出版社出版

(济南市玉函路 邮政编码250002)

山东省新华书店发行

山东新华印刷厂潍坊厂印刷

*

850×1168毫米 32开本 15印张 5插页 322千字

1992年3月第1版 1992年3月第1次印刷

印数：1—1,000

ISBN 7—5331—0979—1/O·44

定价 10.20 元

“泰山科技专著出版基金”顾问、
评审委员会、编辑委员会

顾 问 宋木文 伍 杰 苗枫林

评审委员会 (以姓氏笔画为序)

卢良恕	吴阶平	杨 乐	何祚庥
罗沛霖	高景德	唐敖庆	蔡景峰

戴念慈

编辑委员会

主任委员 杜秀明 石洪印

副主任委员 梁 衡 邓慧方 王为珍

委 员 (以姓氏笔画为序)

邓慧方	王为珍	卢良恕	石洪印
刘韶明	吴阶平	杨 乐	何祚庥
杜秀明	罗沛霖	林凤瑞	唐敖庆
高景德	梁 衡	梁柏龄	蔡景峰

戴念慈

我们的希望(代序)

进行现代化建设必须依靠科学技术。作为科学技术载体的专著，正肩负着这一伟大的历史使命。科技专著面向社会，广泛传播科学技术知识，培养专业人才，推动科学技术进步，对促进我国现代化建设具有重大意义。它所产生的巨大社会效益和潜在的经济效益是难以估量的。

基于这种使命感，自1988年起，山东科学技术出版社设“泰山科技专著出版基金”，成立科技专著评审委员会，在国内广泛征求科技专著，每年补贴出版一批经评选的科技著作。这一创举已在社会上引起了很大反响。

但是，设基金补助科技专著出版毕竟是一件新生事物，也是出版事业的一项改革。它不仅需要在实践中不断总结经验，逐步予以完善；同时，也更需要社会上有关方面的大力扶植，以及学术界和广大读者的热情支持。

我们希望，通过这一工作，高水平的科技专著能够及早问世，充分显示它们的价值，发挥科学技术作为生产力的作用，不断推动社会主义现代化建设的发展。愿“基金”支持出版的著作如泰山一样，耸立于当代学术之林。

泰山科技专著评审委员会

1989年3月

目 录

引言	1
第一章 算经之首《九章算术》(上)	4
第一节 《九章算术》的算术成就	5
第二节 《九章算术》的代数成就	28
第三节 《九章算术》的几何成就	55
第二章 算经之首《九章算术》(下)	87
第一节 《九章算术》的结构和特点	87
第二节 《九章算术》的编纂	94
第三节 《九章算术》的历史地位	106
第四节 《九章算术》的缺点	115
第三章 采所见 悟其意	
——刘徽《九章算术注》	120
第一节 刘徽《九章算术注》的构成	120
第二节 刘徽之前关于《九章算术》的研究	126
第三节 悟其意——刘徽的数学成就举要	139
第四章 算法之纲纪——率	142
第一节 率的定义和性质	142
第二节 率在算术问题中的应用	150
第三节 率在方程中的应用	159
第四节 率在几何问题中的应用	174
第五章 出入相补原理	185

第一节	幂、多边形和勾股问题	185
第二节	测望重差问题	200
第三节	多面体体积	207
第四节	开方术的几何解释	216
第六章	割之又割——刘徽的无穷小分割思想	221
第一节	割圆术——圆面积公式的证明	222
第二节	阳马和鳖臑体积公式的证明	226
第三节	极限思想在近似计算中的应用	234
第四节	刘徽和王莽铜斛	250
第五节	截面积理论	256
第六节	刘徽无穷小分割思想纵横谈	260
第七章	析理以辞 解体用图	
	——刘徽的逻辑思想	268
第一节	刘徽的辞与理、类、故	269
第二节	刘徽关于数学概念的定义	276
第三节	刘徽的类比与归纳	279
第四节	刘徽的演绎推理	286
第五节	刘徽的数学证明	294
第八章	枝条虽分而同本干	
	——刘徽的数学体系	301
第一节	《九章算术》的数学框架	301
第二节	刘徽的面积和勾股理论系统	304
第三节	刘徽的体积理论	309
第四节	刘徽的数学理论体系	314
第九章	撷取百家精华的巨将	321
第一节	辩难之风与刘徽析理	321

第二节 刘徽与先秦诸子	330
第三节 刘徽与两汉学者	338
第十章 齐鲁文化的结晶	346
第一节 刘徽祖籍在今山东省考	346
第二节 荟萃齐鲁文化	353
第三节 刘徽测望过泰山吗	356
第四节 学识和品格的泰斗	363
第十一章 后世关于《九章算术》和刘徽注的	
研究(上)	369
第一节 祖冲之父子及其《缀术》	370
第二节 李淳风、李籍等对《九章算术》和	
刘徽的研究	378
第三节 贾宪《黄帝九章算经细草》与杨辉	
《详解九章算法》	392
第四节 《九章算术》与刘徽对秦九韶、李冶、	
朱世杰的影响	412
第五节 《九章算术》和刘徽注的厄运	415
第六节 中国筹算数学刍议	421
第十二章 后世关于《九章算术》和刘徽注的	
研究(下)	428
第一节 《九章算术》的版本	428
第二节 戴震对《九章算术》的整理	441
第三节 李潢、焦循等对《九章算术》和	
刘徽注的阐释	448
第四节 李俨、钱宝琮的研究	458
以刘徽的精神研究刘徽(代后记)	460

引 言

谈到中国古代数学家，人们首先想到祖冲之。祖冲之将圆周率精确到八位有效数字，后与他儿子祖暅之提出祖暅之原理，彻底解决球体积问题，这些杰出成就早已蜚声中外。可是，祖冲之父子的数学著作早已失传，仅存的上述两项成果，都是刘徽开其先河。刘徽在我国首创圆周率的科学计算程序，才有祖冲之的计算结果；刘徽设计了牟合方盖，指出了彻底解决球体积的正确途径。由于种种原因，国人对刘徽了解较少，长期以来，他基本上是数学史界所熟悉，数学界和历史界偶而才提到的人物，这与他在中国科学史上的实际地位是极不相称的。

打开本书，找不到本书主人公的生平、传记。确实，刘徽和中国历史上大多数杰出的数学家一样，史书无传。他自述“徽幼习《九章》，长再详览。观阴阳之割裂，总算术之根源。探赜之暇，遂悟其意，是以敢竭顽鲁，采其所见，为之作注。”史书载“魏陈留王景元四年（263）刘徽注《九章算术》”。关于刘徽的生平，可靠的记载仅此而已。此外，刘徽在北宋大观三年（1109）被封为淄乡男。由此推断，他的籍贯在今山东省。

不过，由于刘徽的杰作《九章算术注》基本完整地保存下来，关于他的数学成就、数学理论以及数学思想，在中国古代数学家中，却是我们了解得比较多的一位。

成书于汉代的《九章算术》是中国古代最重要的数学经

典。它的数学方法、成就和形式对中国和东方数学产生了深远的影响，并且标志着世界数学研究中心从地中海东部沿岸的古希腊转移到了太平洋东岸的华夏大地。刘徽全面证明了《九章算术》的公式、解法，弥补了《九章算术》的不足，在数学方法、数学理论上贡献卓著，奠定了中国古代数学的理论基础。

《九章算术注》是中国古代最伟大的数学家为最重要的数学著作所作的注。吴文俊先生说：“从对数学贡献的角度来衡量，刘徽应该与欧几里得、阿基米德等相提并论。”刘徽是当之无愧的世界数学泰斗。他的成就和思想是应当被大书特书的。

数学和天文历法、农学、中医中药是中国古代最发达的四门基础科学。新文化运动以来，科学民主之风吹进灾难深重、贫穷落后的中国。为了证明中华民族并不是西方列强所诬蔑的劣等民族，中华民族有灿烂过去，科学界许多老前辈以拳拳爱国之心，致力于发掘中国古代科学遗产，以鼓励国人发愤图强，争取美好的明天。李俨、钱宝琮等前辈倡导用现代数学方法整理中国古代数学遗产。中国古代数学的光辉成就日渐被国人所认识，也得到了国外有识之士的肯定。第二次世界大战之后，电子计算机的发明和广泛应用，促使人们重新考察以中国古代数学为代表的以算法见长的东方数学理论，以期从中得到启迪，这就赋予中国数学史研究以新的意义。

《九章算术》及其刘徽注，是东方数学最杰出的代表作。近年来，国内外掀起了研究《九章算术》和刘徽的热潮，其盛况为中国数学史学史上所仅见。人们不仅解决了《九章算术》和刘徽研究中长期悬而未决或未正确解决的若干问题，而且开辟了若干新的领域，站在新的高度认识问题，从而对刘徽有了更加系统、深刻、准确、完整的评价。

本书试图全面评介《九章算术》和刘徽的数学成就，刘徽的数学思想、数学理论、逻辑思想，兼及中国古代数学的特色、《九章算术》的版本和校勘等问题。本书也吸取了李俨、钱宝琮、严敦杰等前辈的工作及海内外同仁近年的研究成果。笔者学陋识薄，错误和失当之处在所难免，恳请各位同仁和读者批评指正。

第一章 算经之首《九章算术》(上)

刘徽是为《九章算术》作注而闻名于世的。《九章算术》包括方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足、方程、勾股九章，上百个一般方法，246个问题。

传本《九章算术》包括《九章算术》本文、魏刘徽注、唐李淳风注。通常说《九章算术》有狭义、广义两种，狭义地仅指《九章算术》本文，广义地则包括以上三者。言成就、编纂、特点及某某为之注，等等，指前者；而言版本和校勘，则指后者。一般说来，这两者不会混淆。

《九章算术》是刘徽数学成就的载体。现在传世的刘徽前的中国数学著作只有《算数书》、《周髀算经》、《九章算术》及赵爽的《周髀算经注》四种。《算数书》和《周髀算经》从数学上说都是比《九章算术》初等的作品，而赵爽的《周髀注》，其可观者，仅“勾股圆方图”五百余字而已。因此，《九章算术》是刘徽所继承的主要数学遗产。刘徽少年时学习《九章》，成年后又深入研究，“遂悟其意”，并“采其所见”，为之作注，在《九章算术》的基础上把中国数学向前推进了一大步。为了充分认识刘徽的建树，首先必须评介《九章算术》。我们首先介绍《九章算术》的数学成就。

数学在中国古代统称为算术，有时称为算学、算数，实际上包括了现今算术、代数、几何、三角等方面的内容。

第一节 《九章算术》的算术成就

《九章算术》不是一部数学启蒙读物，对儿童应当掌握的记数法和整数四则运算法则，没有述及。它的算术内容包括分数四则运算、比例和比例分配、盈不足问题，以及行程、追及等各种算术应用问题，分别在卷一、四的一部分及卷二、三、六、七的整卷中。

一、分数四则运算

在人类数学史上，人们认识分数比认识小数早得多。古埃及人很早就使用了分数，但他们只能使用分子为一的单分数及少数几个如 $\frac{2}{3}$ 之类的分数，遇到其他分数，则要先化成单分数，再投入运算。中华民族是世界上使用分数最早的民族之一，先秦典籍和《周髀算经》中有大量分数运算的记载。《九章算术》集其大成，在世界数学史上第一次建立了完整的分数理论。

1. 分数记法

分数是在物体数量的比较中产生的。刘徽说：“物之数量，不可悉全，必以分言之。”^①确定了度、量、衡或其他数量单位之后，某一物品不一定是其单位度量的整数倍，这就产生了分数。而数学上分数则应导源于整数除法。中国古代，被除数称为“实”，除数称为“法”。古代数学密切联系实际，所分的都是实在的东西，如各种谷物、丝绸之类，故被除数称为实；而用之于分的数实际上是一个标准，故除数称为法。法，标准

^① 本书《九章算术》本文及刘徽、李淳风注引文均依笔者汇校《九章算术》（辽宁教育出版社，1990年），并注出主要版本的重要的异文夺字。

也。《管子·七法》：“尺寸也，绳墨也，规矩也，衡石也，斗斛也，角量也，谓之法。”而实并不总是法的整数倍，正如刘徽所说：“法实相推，动有参差，故为术者先治诸分。”分数的引入，是数系的第一次大扩展，使人们能够更精确地描述客观事物的数量关系。

《九章算术》没有分数记法的记载。根据《孙子算经》，整数乘法布算三行，被乘数在上，乘数在下，“以上命下，所得之数列于中位”，而“凡除之法，与乘正异。乘得在中央，除得

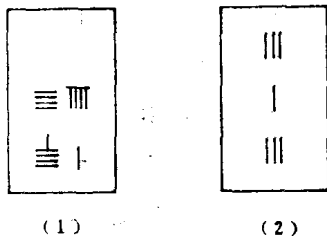


图 1

在上方”。那么，古代真分数的记法应记成二行，分母在下，分子在上，如 $\frac{49}{91}$ ，便记成图 1 (1) 的样子；假分数则记成

三行，如 $3\frac{1}{3}$ 便如图 1 (2) 所示。

2. 分数运算法则

《九章算术》方田章提出了各种分数运算法则。首先是约分术。刘徽说：“分之为数，繁则难用。”约分是化简分数，而不改变分数值。刘徽说：“设有四分之二者，繁而言之，亦可为八分之四，约而言之，则二分之一也。虽则异辞，至于为数，亦同归尔。”怎样约分呢？《九章算术》提出了约分术。

约分术曰：可半者半之。不可半者，副置分母、子之数，以少减多，更相减损，求其等也。以等数约之。

就是说，如果分母、分子都是偶数，可先取其半。若不都是偶

数，可用更相减损的方法求其等数，即最大公约数，然后用等数约简分母、分子，以化简分数。中国古代数学的答案大都以最简分数出现，《九章算术》开其先河。

由约分术可知更相减损的程序是：设要约简的分数为 $\frac{b}{a}$ ，

$b < a$ ，则多次从 a 中减 b ，若减 q_1 次 ($q_1 \geq 1$) 后得余数 $r_1 < b$ ， $r_1 = a - bq_1$ ，则再从 b 中减 r_1 ，若减 q_2 次 ($q_2 \geq 1$) 得余数 $r_2 < r_1$ ， $r_2 = b - r_1q_2$ ，则再从 r_1 中减 r_2 ，如此更相减损，直到出现 $r_n = r_{n-1}$ ，它便是等数。显然，它与欧几里得《几何原本》第七卷中求最大公约数的方法是一致的。不过，《九章算术》和欧几里得一样，没有证明这种方法为什么正确。后来刘徽说：“其所以相减者，皆等数之重叠，故以等数约之。”即可以以等数 r_n 约简的原因是 $a, b, r_1, r_2, \dots, r_{n-1}$ 都可表示成 r_n 的倍数。实际上，将更相减损的过程逆推，便有：

$$r_{n-1} = r_n,$$

$$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n = r_n(q_n + 1),$$

$$r_{n-3} = r_{n-2}q_{n-1} + r_{n-1} = r_n(q_nq_{n-1} + q_{n-1} + 1),$$

$$r_{n-4} = r_{n-3}q_{n-2} + r_{n-2} = r_n(q_nq_{n-1}q_{n-2} + q_{n-1}q_{n-2} + q_{n-2} + q_n + 1),$$

$$\dots\dots$$

$$b = r_nP(q_2, q_3, \dots, q_n),$$

$$a = r_nQ(q_1, q_2, \dots, q_n).$$

其中 P, Q 分别是 $q_2, q_3, \dots, q_n$ 和 $q_1, q_2, \dots, q_n$ 的多项式，实际上是整数。刘徽指出了更相减损的理论根据。目前算术教科书中的辗转相除法便是从更相减损术发展起来的。

《九章算术》提出了分数加法法则即合分术。

合分术曰：母互乘子，并以为实；母相乘为法。实如法而一。不满法者，以法命之。

此即

$$\frac{b}{a} + \frac{d}{c} = \frac{bc + ad}{ac}$$

又提出了分数减法法则：

减分术曰：母互乘子，以少减多，余为实；母相乘为法。实如法而一。

即

$$\frac{b}{a} - \frac{d}{c} = \frac{bc - ad}{ac}$$

在未认识负数时，只有 $\frac{b}{a} > \frac{d}{c}$ 时减分术才能施行。怎样知道

$\frac{b}{a} > \frac{d}{c}$ 呢？《九章算术》提出了课分术，即比较分数大小的方法，它与减分术基本相同。李淳风说：“此术多与减分义同。唯相多之数，意共①减分有异。减分知②，求其余数有几；课分知，以其余数相多也。”

《九章算术》还提出了求分数平均值的方法即平分术：

平分术曰：母互乘子，副并为平实。母相乘为法。以列数乘未并者各自为列实。亦以列数乘法。以平实减列实，余，约之为所减。并所减以益于少。以法命平实，各得其平。

设诸分数为 $\frac{b_i}{a_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$)， $\sum_{i=1}^n a_1 a_2 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_n b_i$ 为平

① 共，此依南宋鲍刻本，戴震辑录大典本作“与”，两通。

② 知，训者，下同。其说见第十一章。

实, $a_1 a_2 \cdots a_n$ 为法, $na_1 a_2 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_n b_i$ ($i = 1, 2, \cdots, n$) 为列

实, 则 $\frac{\sum_{i=1}^n a_1 a_2 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_n b_i}{na_1 a_2 \cdots a_n}$ 即是其平均值。而 $\sum_{i=1}^n a_1 a_2 \cdots a_{i-1}$

$a_{i+1} \cdots a_n b_i - na_1 a_2 \cdots a_{j-1} a_{j+1} \cdots a_n b_j$ ($j = 1, 2, \cdots, n$) 便是各分数所应当损益的分子。刘徽认为,《九章算术》这里的计算从数学上说走了弯路:“此当副置列数除平实”^①,即计算

$\frac{\sum_{i=1}^n a_1 a_2 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_n b_i}{n}$, 然后以法除即可, 不必以列数 n 乘诸

$a_1 a_2 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_n b_i$ 和法 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 。可是, 在《九章算术》时代, 人们很讨厌繁分数的情形, 才以列数乘诸 $a_1 a_2 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_n b_i$ 和 $a_1 a_2 \cdots a_n$, 避免了重有分:“若然则重有分, 故反以列数乘同齐。”平分术明确显示了位置值在中国数学中的作用。“法”本来是 $a_1 a_2 \cdots a_n$, 以列数 n 乘, 得 $na_1 a_2 \cdots a_n$, 因为仍在法的位置, 仍称为法。

在合分术、减分术、课分术以及平分术中都需要通分。《九章算术》通过分母相乘为公分母, 分母互乘子为分子来通分, 未提出以分母的最小公倍数作为公分母。少广章少广术则进了一步。少广问题的模式是:“今有田广 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots +$

$\frac{1}{n}$ 步 ($n = 2, 3, 4, \cdots, 12$), 求田一亩, 问从几何?”

少广术曰:置全步及分母、子, 以最下分母遍乘诸分子及全步, 各以其母除其子, 置之于左。命通分者, 又以

① 置、除, 鲍刻本、戴震辑录大典本讹作并。为, 依李潢校正。