



高等数学

物理类

(修订版)

第一册

文 丽 吴良大 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

高等学校数学基础课教材

高等数学

(物理类)

(修订版)

第一册

文 丽 吴良大 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学·第一册:物理类/文丽,吴良大编著.一修订版.一北京:北京大学出版社,2004.8

ISBN 7-301-07542-1

I. 高… II. ①文… ②吴… III. 高等数学-高等学校-教材
N. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 058373 号

书 名: 高等数学(物理类)(修订版)第一册

著作责任者: 文 丽 吴良大 编著

责任编辑: 刘 勇

标准书号: ISBN 7-301-07542-1/O · 0599

出版者: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区中关村北京大学校内 100871

网 址: <http://cbs.pku.edu.cn>

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62752021

电子信箱: zpup@pup.pku.edu.cn

印刷者: 北京大学印刷厂

发 行 者: 北京大学出版社

经 销 者: 新华书店

850×1168 32 开本 16.625 印张 425 千字

1989 年 7 月第 1 版 2004 年 8 月修订版

2004 年 8 月第 1 次印刷(总第 9 次印刷)

印 数: 36001—39000 册

定 价: 22.00 元

内 容 简 介

本书是根据物理类“高等数学教学大纲”编写的教材,全书共分三册。第一册内容是一元函数微积分;第二册内容是向量代数与空间解析几何、多元函数微积分;第三册内容是级数、含参变量的积分与常微分方程等。本套书于1989年7月出版,印数达三万多套,现为修订版。经过十多年的教学实践,此次修订保留了第一版的优点,同时作者按新世纪的教学要求对全套书的内容进行了认真、系统的整合;对部分内容进行了调整,有些重点内容进行了改写,使之难点分散,便于读者理解与掌握;增补了部分典型例题,删减了类型重复的个别例题。具体修订内容请参见“修订版前言”。

本书为第一册,内容包括函数、极限、连续、导数、微分、不定积分、定积分及其应用等。本书总结了作者长期讲授物理类“高等数学”课程的教学经验,注重用典型而简单的物理、几何实例引进数学概念,由浅入深地讲授高等数学的核心内容——微积分。本书叙述简洁,难点分散,例题丰富,逻辑推导细致,对基本定理着重阐明它们的几何意义、物理背景以及实际应用价值,强调基本计算与物理应用,以培养学生解决物理问题的综合能力。根据教学需要,修订版各章配置了适量的习题,按难易程度将“习题”分为A组、B组;书末附有习题答案与提示,便于教师和学生使用。

本书可作为综合性大学、高等师范院校物理学、无线电电子学、信息科学等院系各专业的本科生和工科大学相近专业大学生的教材或教学参考书。

修订版前言

本书是综合性大学和高等师范院校物理类专业本科生使用的教材。全套书分三册,讲授时间约为三个学期。自1989年7月出版以来,10多年中已重印多次,印数达3万多套,拥有固定的读者群,受到了读者的广泛欢迎。

在广大师生多年使用本教材的过程中,我们陆续听取、收集了不少宝贵意见。对于一些比较细小的地方(包括印刷错误),编者已在每次重印时,尽量做了勘误。但是限于原书版面,只能在页码不动、甚至行距不变的前提下,进行有限的修改。经责编刘勇同志多次建议而促成的这次修订,则是一次很好的机会,终于让编者可以在保留第一版优点的同时,改正多年想修改而未能如愿的地方。

编者根据自己和其他任课教师多年积累的教学经验,对修订版内容倾注了大量心血和精力,力求使新版更有利于教和学。修订版对内容作了大量修改,有些内容进行了重写,并对第十七章常微分方程各小节内容进行了调整,较之第一版有了很大变化。这次修订,对理论的讲述,使其逻辑更加清晰;对例题的选取及其编排,更加典型、更加条理化;对过于细致的内容,进行了删繁就简;对于个别定理增补了必要的理论证明(如二阶线性齐次微分方程的通解结构定理);对语言的使用,编者也逐句审查,使之叙述更加准确、通俗易懂。

这套书是基础课教材,基本内容应有相对的稳定性,应格外注重基本知识的传授和基本能力的培养,要有一定的深度。同时要针对大学物理类学生的需要,使内容尽量丰富,并应有一定量的应用例题,启发学生学以致用。这次修订工作,保留了第一版的这些特色。但考虑到基础课也要尽量与后继课甚至其他学科接轨,因此在

某些地方(比如第三册的傅氏级数部分),编者也简单地作了指引。

此外,这次修订编者也对习题进行了重新审视和选编,力求与正文配合更加紧密。并增加了一些加强演算能力、注重实际应用的题目。为了方便读者学习,第一册各章内的习题分为A组、B组两部分,对于一些较难的习题,还提供了解题思路。

新版全套书仍分十七章,次序未动。但使用时,可根据内容难易、前后衔接,或教学计划、学期安排而适当调整(比如学完一元函数微积分之后,接着学习微分方程。当然,如果这样做,那就需要把第十七章后面的附录放到无穷级数之后再讲)。

本套书中有些内容标有“*”号,均非基本要求,读者可根据实际情况自行选用。

编者文丽负责修订了全书除第一册的附录和第九章(空间解析几何)以外的全部章节,编者吴良大负责修订第一册的附录一、附录二,以及第九章,并修订了全部习题,给出了习题答案与提示。

修订版难免还有不少缺点,诚恳欢迎广大读者随时给予批评、指正。

编 者

2004年3月于北京大学
数学科学学院

序 言

本书是根据“全国理科教材编写大纲讨论会”所制定的“高等数学教学大纲”(物理类各专业用)、针对我校物理类各专业的教学要求编写的。

“高等数学”作为统称,它有许多重要的分支,内容极其丰富。“高等数学”作为一门具体课程,只是其中的一个基础部分。

“高等数学”作为理工科大学的一门重要基础理论课,其主要内容有

I. 数学分析,包括:

一元函数微分学

一元函数积分学

多元函数微积分学(包括场论)

} 即微积分;

级数(数项级数、函数项级数、幂级数、泰勒级数、傅氏级数、傅氏积分);

II. 向量代数,空间解析几何;

III. 常微分方程;

IV. 高等代数。

其中高等代数另有教材,我们编著的这本《高等数学》书只包括前面三部分内容。全书分三册。第一册是一元微积分,第二册是多元微积分,第三册是级数与常微分方程。数学分析(主要内容是微积分)内容最多,向量代数和空间解析几何主要是为多元微积分服务的,而常微分方程则是微积分在自然科学、工程技术以及其他许多学科的最直接的应用。全书讲授时间为三个学期,约 200~210 学时。

本书是作者主要根据近几年在北京大学讲授物理类“高等数

学”课程的讲稿和讲义编写而成的。根据我们的教学经验,一元微积分是高等数学的基础,学好这一部分,以后几部分就不难学习了;尤其是学习第一册教材的同学大多是刚从中学来的,对于高等数学的学习方法还不太入门,因此,为了培养他们的自学能力,我们在第一册中,对一些概念的分析比较深入,逻辑推导比较细致,例题也比较多。而在后两册中,考虑到学生已有一定的自学能力,因此我们编写得相对简明些。

本教材对数学上的严谨性与学生计算能力的培养给予了充分重视,并注意与物理、无线电内容相配合,以适应物理类各专业的需要。

邓东皋教授悉心审阅了本书初稿,提出了许多宝贵的修改意见。田茂英、王卫华、刘勇同志对书中习题逐题计算,给出了答案。蒋定华同志为本书选配了插图。作者在此一并致谢。

还应当感谢我系其他许多长期从事物理类“高等数学”教学的老师。长期以来,他们积累了不少宝贵的经验和资料,这一切,无疑对于本书的编写有着重要的参考价值。

由于作者水平有限,书中缺点与错误在所难免,我们诚恳希望读者批评指正。

编 者

1986年4月于北京大学数学系

目 录

预备知识	(1)
一、充分条件、必要条件及充要条件	(1)
二、实数及其绝对值	(2)
三、集合及其表示法	(4)
四、区间	(5)
第一章 函数	(6)
§1 函数的概念	(6)
1.1 常量与变量	(6)
1.2 变量之间确定的依赖关系——函数关系	(7)
§2 几类常见的函数	(15)
2.1 单调函数	(15)
2.2 奇函数与偶函数	(16)
2.3 周期函数	(17)
2.4 有界函数	(18)
习题 1.1	(20)
§3 复合函数与反函数	(23)
3.1 复合函数	(23)
3.2 反函数	(25)
§4 基本初等函数的性质及图形	(28)
4.1 常数函数	(28)
4.2 幂函数	(28)
4.3 指数函数	(29)
4.4 对数函数	(30)
4.5 三角函数	(31)

4.6 反三角函数	(33)
§ 5 初等函数	(35)
5.1 初等函数	(35)
5.2 函数作图的几种常用的初等方法	(35)
5.3 双曲函数	(41)
习题 1.2	(43)
第二章 极限与连续性	(46)
§ 1 极限的概念	(46)
1.1 数列的极限	(46)
1.2 函数的极限	(56)
1.3 单侧极限	(62)
1.4 数列极限与函数极限的关系	(66)
习题 2.1	(68)
§ 2 极限的基本性质	(70)
§ 3 极限的运算法则	(76)
3.1 四则运算法则	(76)
3.2 复合函数求极限	(80)
习题 2.2	(81)
§ 4 数列极限存在的一个定理	(82)
4.1 有上界或有下界的数列	(82)
4.2 单调数列	(82)
4.3 单调有界数列的极限存在定理	(83)
§ 5 两个重要极限	(85)
5.1 证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	(85)
5.2 证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	(89)
习题 2.3	(93)
§ 6 无穷小量与无穷大量	(94)
6.1 无穷小量的概念	(94)

6.2	无穷小量阶的比较	(94)
6.3	无穷小量的性质	(96)
6.4	无穷大量	(98)
6.5	无穷大量与无穷小量的关系	(99)
6.6	无穷大量阶的比较	(100)
习题 2.4		(100)
§ 7	函数连续性的概念	(102)
7.1	函数连续性的定义	(102)
7.2	间断点的分类	(107)
§ 8	连续函数的运算法则	(108)
8.1	连续函数的四则运算	(108)
8.2	复合函数的连续性	(109)
8.3	反函数的连续性	(110)
§ 9	初等函数的连续性	(111)
§ 10	闭区间上连续函数的性质	(115)
10.1	中间值定理(介值定理)	(116)
10.2	最大值、最小值定理	(117)
10.3	一致连续性	(120)
习题 2.5		(122)
第三章	导数与微分	(125)
§ 1	导数的概念	(125)
1.1	导数的概念	(125)
1.2	利用定义求导数的例子	(135)
§ 2	导数的计算法则	(138)
2.1	导数的四则运算法则	(138)
2.2	复合函数求导法则	(141)
2.3	隐函数求导法则	(145)
2.4	反函数求导法则	(148)
2.5	由参数方程所表示的函数的求导公式	(152)

2.6 导数计算法则小结	(154)
习题 3.1	(155)
§ 3 导数的简单应用	(158)
3.1 切线与法线问题	(158)
3.2 相关变化率问题	(162)
§ 4 高阶导数	(165)
4.1 定义	(165)
4.2 例子	(166)
4.3 运算法则	(168)
习题 3.2	(174)
§ 5 微分的概念	(176)
5.1 函数的微小改变量问题	(176)
5.2 微分的定义和几何意义	(177)
§ 6 微分的基本公式及运算法则	(180)
6.1 微分基本公式表	(180)
6.2 微分的运算法则	(181)
§ 7 微分的简单应用	(185)
7.1 近似计算	(185)
7.2 估计误差	(188)
§ 8 高阶微分	(191)
8.1 定义	(191)
8.2 计算公式	(191)
习题 3.3	(193)
第四章 微分学中值定理	(195)
§ 1 微分学中值定理	(195)
1.1 费马(Fermat)定理	(195)
1.2 罗尔(Rolle)定理	(197)
1.3 拉格朗日(Lagrange)中值定理	(199)
1.4 柯西(Cauchy)定理	(204)

习题 4.1	(205)
§ 2 洛必达法则	(207)
2.1 “ $\frac{0}{0}$ ”型未定式	(208)
2.2 “ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式	(212)
2.3 其他类型的未定式	(215)
§ 3 泰勒(Taylor)公式	(217)
3.1 局部的泰勒公式	(218)
3.2 利用局部泰勒公式求未定式的值和确定 无穷小量的阶	(227)
3.3 带拉格朗日余项的泰勒公式	(229)
习题 4.2	(235)
第五章 微分学的应用	(238)
§ 1 利用导数作函数的图形	(238)
1.1 函数单调性的判别法	(238)
1.2 函数极值的判别法	(242)
1.3 函数的凸性与扭转点	(248)
1.4 曲线的渐近线	(252)
1.5 利用导数作函数的图形	(255)
§ 2 最大值、最小值问题	(257)
§ 3 曲率	(266)
3.1 曲率的定义	(266)
3.2 曲率的计算公式	(269)
3.3 曲率半径、曲率圆、曲率中心	(272)
习题 5.1	(277)
第六章 不定积分	(280)
§ 1 原函数与不定积分的概念	(280)
1.1 原函数	(280)
1.2 不定积分	(281)
§ 2 不定积分的线性运算	(283)

2.1 基本积分公式表(I)	(284)
2.2 两个简单法则(不定积分的线性性质)	(285)
§ 3 换元积分法	(286)
3.1 第一换元法(即凑微分法)	(287)
3.2 第二换元法	(290)
习题 6.1	(300)
§ 4 分部积分法	(302)
4.1 分部积分法	(302)
4.2 基本积分公式表(II)	(310)
§ 5 几类可以表为有限形式的不定积分	(312)
5.1 有理函数的积分	(312)
5.2 三角函数的有理式的积分	(320)
5.3 某些根式的有理式的积分	(323)
习题 6.2	(328)
第七章 定积分	(331)
§ 1 定积分的概念	(331)
1.1 两个实例	(331)
1.2 定积分的定义	(335)
1.3 定积分的几何意义	(336)
1.4 关于定积分的两点说明	(337)
1.5 关于函数的可积性	(338)
§ 2 定积分的基本性质	(340)
§ 3 微积分基本公式	(348)
§ 4 微积分基本定理	(351)
4.1 变上限的定积分	(352)
4.2 微积分基本定理	(352)
习题 7.1	(356)
§ 5 定积分的换元积分法和分部积分法	(359)
5.1 定积分的换元积分法	(359)

5.2 定积分的分部积分法	(366)
§ 6 定积分的近似计算	(370)
6.1 梯形公式	(371)
6.2 抛物线公式	(372)
习题 7.2	(376)
§ 7 广义积分	(378)
7.1 无穷积分	(378)
7.2 瑕积分	(393)
7.3 Γ -函数与 B-函数	(404)
习题 7.3	(407)
第八章 定积分的应用	(410)
§ 1 微元法的基本思想	(410)
§ 2 定积分的几何应用	(413)
2.1 平面图形的面积	(413)
2.2 已知平行截面面积,求立体的体积	(419)
2.3 旋转体的体积	(420)
2.4 平面曲线的弧长	(422)
2.5 旋转体的侧面积	(429)
习题 8.1	(431)
§ 3 定积分的物理应用	(433)
3.1 平面曲线弧的质心	(433)
3.2 转动惯量	(436)
3.3 引力	(440)
3.4 变力所做的功	(442)
3.5 交流电的平均功率,电流和电压的有效值	(445)
习题 8.2	(449)
附录一 实数的几个基本定理及其应用	(452)
§ 1 实数的几个基本定理	(452)
1.1 完备性定理	(452)

1.2 确界存在定理	(454)
1.3 单调有界数列必有极限	(456)
1.4 区间套定理	(456)
1.5 外尔斯特拉斯定理	(457)
§ 2 连续函数性质的证明	(459)
习题	(461)
附录二 函数可积性的讨论	(463)
§ 1 大和与小和	(463)
§ 2 函数可积的判别准则	(465)
§ 3 函数可积性的讨论	(467)
附表 简单积分表	(471)
一、简单不定积分表	(471)
二、简单定积分表 (m, n 为自然数)	(472)
习题答案与提示	(473)

预 备 知 识

一、充分条件、必要条件及充要条件

一般说来,某件事情发生或者不发生,总是有条件的.同样地,一个数学命题成立或者不成立,也有一定的条件.通常我们所讨论的条件有:充分条件、必要条件,以及既充分又必要的条件简称充要条件.

充分条件 如果条件 A 成立时结论 B 一定成立,那么我们就说 A 是 B 的充分条件,记作 $A \Rightarrow B$,表示由 A 可以推出 B .

容易了解,能推出 B 的任何前提,都是 B 的充分条件.

例 1 若两数 a, b 都能被 5 整除,则和数 $a+b$ 也能被 5 整除.这里,“ a, b 都能被 5 整除”就是“ $a+b$ 能被 5 整除”的充分条件.

例 2 如果三角形是等腰的,那么它的两底角相等.

“三角形等腰”是“两底角相等”的充分条件.

必要条件 如果条件 A 不成立时结论 B 一定不成立,那么我们就说 A 是 B 的必要条件.

显然,“ A 不成立时 B 一定不成立”与“ B 成立时 A 一定成立”是一回事,因此,“ A 是 B 的必要条件”也记作 $B \Rightarrow A$. 由此可见,由 B 推出的任何结论,都是 B 的必要条件.

例 3 若 a, b 都是正数,则 ab 也是正数.这里,“ ab 是正数”就是“ a, b 都是正数”的必要条件.

例 4 “三角形的两底角相等”是“三角形是等腰三角形”的必要条件.

在“ $A \Rightarrow B$ ”中,既可以说 A 是 B 的充分条件,也可以说 B 是 A 的必要条件.到底怎么说,要看在具体问题中,哪一个条件是条件,哪一