高级微观经济学

Advanced Microeconomics

新坐标经济系列精品课程

张军　主编

清华大学出版社

新坐标经济系列精品课程

高级微观经济学

Advanced Microeconomics

张军 主编

清华大学出版社
北京

内容简介

本书突出了最优化的数学结构和数理思维训练与技巧。以最优化的数学结构和理论为起点，分别从偏好理论和消费者的最优化决策、生产的最优化选择、不同市场结构下的生产决策逻辑以及博弈论和信息经济学等方面深入浅出地讲述了微观经济学的静态均衡、比较静态均衡以及微观经济学的重要原理形成的来龙去脉。与同类的高级教科书相比，本书不追求面面俱到，但力求把初级微观经济学的那些基本原理背后的数理结构和证明过程展现出来，让学生不仅知其然，而且知其所以然。每章后附有一定量的习题供学生复习。

本书适合做经济学、管理学和相关财经专业硕士研究生和博士研究生的教材。

图书在版编目(CIP)数据

高级微观经济学/张军主编. --北京：清华大学出版社，2005.9

(新坐标经济系列精品课程)

ISBN 7-302-11637-7

Ⅰ.高…　Ⅱ.张…　Ⅲ.微观经济学—研究生—教材　Ⅳ.F016

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 094166 号

出 版 者：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦

http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084

社 总 机：010-62770175　　**客户服务**：010-62776969

组稿编辑：刘志彬

文稿编辑：陆浥晨

封面设计：紫深蓝工作室

版式设计：肖　米

印 装 者：北京嘉实印刷有限公司

发 行 者：新华书店总店北京发行所

开　　本：185×230　**印张**：12.5　**插页**：1　**字数**：246 千字

版　　次：2005 年 9 月第 1 版　2005 年 9 月第1 次印刷

书　　号：ISBN 7-302-11637-7/F·1309

印　　数：1～3000

定　　价：25.00 元

张　军

经济学博士。复旦大学经济学教授，中国经济研究中心主任。1997 年以来，曾在伦敦经济学院、哈佛大学、东京都立大学、韩国庆北国立大学等做访问研究员和讲座教授；中欧国际工商学院、上海交通大学安泰管理学院的受聘讲座教授。对制度经济学，尤其是中国的工业改革、经济增长和当代中国的经济政策有深厚的研究。

他在包括《经济研究》、*Journal of Asian Economics*, *East Asian Review* 等中外学术刊物上发表了数十篇研究论文。最近出版的著作包括《中国的工业改革与经济增长：问题与解释》(2003)、《组织、制度和中国的经济改革》(2004) 和《资本形成、投资效率与中国的经济增长》等。他还是 *Financial Times*、《经济观察报》、《上海证券报》等多家财经报刊的专栏作家。

参加编写者：

张　军	冯　曲
陈　钊	施少华
潘瑞娇	郑祖玄

目录

CONTENTS

第1章　最优化的逻辑结构 …… 1

1.1　最优规划问题 …… 1
1.2　梯度向量 …… 2
1.3　等式约束极值的拉格朗日求解法 …… 7
1.4　非线性规划问题的求解：库恩—塔克条件 …… 8
1.5　二阶条件 …… 11
1.6　凹规划 …… 18
1.7　最优化问题的解 …… 23
1.8　比较静态分析 …… 27
1.9　包络定理 …… 30
习题一 …… 35

第2章　效用理论与消费者行为 …… 37

2.1　偏好与效用函数 …… 38
2.2　消费者行为的比较静态学 …… 45
2.3　对偶性、支出函数与间接效用函数 …… 51
2.4　价格效应 …… 56
2.5　显示性偏好的理论 …… 60
2.6　劳动供给与时间分配 …… 65
2.7　消费与时间分配 …… 68
2.8　不确定条件下的消费者选择问题 …… 72
习题二 …… 80

第 3 章　古典的企业理论 …… 81

3.1　生产函数 …… 81
3.2　生产规划问题 …… 85
3.3　完全竞争市场 …… 90
3.4　完全垄断 …… 100
习题三 …… 106

第 4 章　博弈论 …… 107

4.1　博弈的描述:标准型和扩展型 …… 108
4.2　纳什均衡 …… 112
4.3　纳什均衡的精炼 …… 116
4.4　囚徒困境 …… 122
4.5　重复博弈与无名氏定理 …… 125
4.6　再谈判 …… 131
习题四 …… 134

第 5 章　寡头垄断 …… 136

5.1　古诺模型与伯川德模型 …… 136
5.2　先动优势:斯塔克伯格模型 …… 144
5.3　差异产品:霍特林模型 …… 148
5.4　串谋 …… 154
5.5　市场进入阻挠 …… 157
5.6　限制性定价 …… 164
习题五 …… 169

第 6 章　信息经济学 …… 170

6.1　逆选择 …… 171
6.2　信号发送与信息甄别 …… 175
6.3　委托-代理理论 …… 183
6.4　信贷配给与非对称信息 …… 190
习题六 …… 194

参考文献 …… 196

第1章 CHAPTER 1

最优化的逻辑结构

1.1 最优规划问题

$$\max_{x} f(x)$$

$$\text{s.t. } g(x) = c$$

这样一个规划问题可以用来表达一个在一定资源约束情况下的经济决策问题。其中 $f(x)$称为目标函数，x 为选择变量，$g(x)$为约束函数。如果用集合 $S=\{x|g(x)=c\}$表示约束，则此规划问题可以看作是在集合 S(可以看作是欧氏空间的一个子集，称为可行集)上选择一个点 x(或向量)，使得目标函数 $f(x)$的值最大。如图 1.1 所示，在二维情形下，S 表示可行集，$f(x)=k$ 表示目标函数的等值线，则上述规划问题就变成了在 S 中找一点，使得目标函数的等值线达到一个最高的位置。

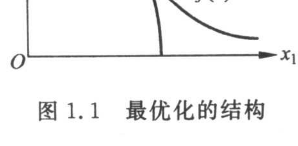

图 1.1　最优化的结构

从这样的角度看规划问题，我们可以将研究的重点放在目标函数的性质和可行集的性质两个部分。

1.2 梯度向量

梯度(grad)f 的概念一般和目标函数的等值线(面)的变化有关。我们分两种情况来从梯度的角度看最优化问题。

1.2.1 无约束极值问题

一维情况下：

$$df(x)=f'(x)\cdot dx$$

此时，目标函数值的变化，是两部分的乘积。第一部分是导数；第二部分是 x 的微分，或者说是 x 的变化，可以取正也可以取负。

若 $f'(x)>0$，则可以取 $dx>0$，使得 $df(x)>0$，即通过点 x 的移动，可以使目标函数值增加；若 $f'(x)<0$，则可以取 $dx<0$，从而 $df(x)>0$，目标函数值还可以继续增加。因此，当 $f(x)$ 取得极值，即目标函数值不再增加时，上述情形不可能发生，即有 $f'(x)=0$。

含义 一维无约束极值问题中，目标函数的梯度就是导数，表示目标函数值变化(增加)的方向。

多维情形下：

$$df(x)=f_x\cdot dx$$

此时，f_x 即为 $f(x)$ 在点 x 处的梯度向量，为横向量 $(f_1,\cdots,f_n)$，其中每一个分量为偏导数；dx 为纵向量，表示 x 的变化。上式表示目标函数 $f(x)$ 的变化可以用梯度向量和 dx 的内积来衡量：

$$df(x)=f_x\cdot dx=(f_1,\cdots,f_n)\begin{pmatrix}dx_1\\ \vdots\\ dx_n\end{pmatrix}=f_1\,dx_1+\cdots+f_n dx_n$$

向量的内积：

x,y 是两个向量，其内积定义为：

$$x\cdot y=(x_1,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=x_1\,y_1+\cdots+x_n\,y_n$$

同时，也可以表示成：$x\cdot y=|x|\,|y|\cos\alpha$，或 $\cos\alpha=\dfrac{x\cdot y}{|x|\,|y|}$，其中 α 表示向量 x,y 之间的夹角，$|x|$，$|y|$ 分别表示向量 x,y 的模(原点到点 x、y 的距离)。

如果　$0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$，则 $x\cdot y>0$；

$\alpha=\frac{\pi}{2}$，则 $x\cdot y=0$，即向量 x,y 正交(垂直)；

$\frac{\pi}{2}<\alpha\leqslant\pi$，则 $x\cdot y<0$。

现在分析梯度向量 f_x 和 $\mathrm{d}x$ 的几何含义。

$\mathrm{d}x$ 代表欧氏空间中一点 x 微小变化的向量，方向可以是任意的，取决于每一个分量变化的大小。具体如图 1.2 所示。以二维为例，$\mathrm{d}x=(\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2)$ 的分量分别表示从点 x 出发横轴和纵轴变化的方向，向量 $\mathrm{d}x$ 则表示从点 x 变化的整体方向，具体的，满足平行四边形法则。

与无约束问题相比，存在约束时，可以选择的点(可行集)不再是整个欧氏空间，而是由具体的约束条件构成的欧式空间的一个子集。因此，此时从点 x 移动的方向不再是任意的，而只能在这个可行集内移动。可以想像一下：

在一个没有围墙的校园内，可以向任何方向行走；如果有了围墙，则在围墙的附近就不能朝任意方向走了，最多只能沿着围墙走。如在消费者选择的问题(两个商品的情形)上，其约束满足：

$$p_1x_1+p_2x_2=I\quad x_1\geqslant0,x_2\geqslant0$$

预算线如同围墙一般，在其附近就只能沿其方向移动。如图 1.3 所示。

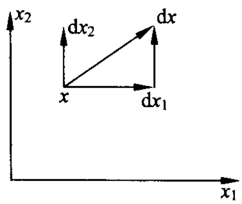

图 1.2　$\mathrm{d}x$ 的几何含义

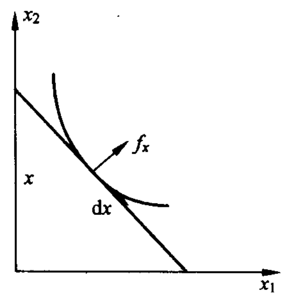

图 1.3　有约束的可行集成最大化问题

从代数上看，我们也可以得到上述直观的理解。对上式两边全微分，并且 p_1,p_2,I 是参数，保持不变，得：

$$p_1x_1+p_2x_2=0$$

与无约束相比，$\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2$ 的大小不是任意的，而是相互联系的，即确定了 $\mathrm{d}x_1$，则 $\mathrm{d}x_2$ 也就

相应确定了（一般的，相互联系的机制由约束条件决定）。在这个例子中，dx_2和dx_1的比例就等于预算线的斜率，作为平行四边形对角线的dx的方向也就确定了，就是沿预算线移动。

梯度向量f_x的几何意义是：等值面$f(x)=k$在点x处指向值增加（变化）的法方向，也就是在点x处$f(x)$值增加最快的方向，其变化率为f_x的模。如图1.3，在无差异曲线（二维情形下，等值面就是无差异曲线）上点x处作切线（多维情形下就是切平面），f_x就是和切线垂直的、无差异曲线增加的向量。

由上述的讨论，对于$df(x)=f_x\cdot dx$，如果梯度向量f_x和dx的方向是一致的$\left(\text{夹角小于}\dfrac{\pi}{2}\right)$，则$df(x)>0$，即从点$x$移动，可以使$f(x)$的值增加；如果梯度向量$f_x$和$dx$的方向不一致$\left(\text{夹角大于}\dfrac{\pi}{2}\right)$，则$df(x)<0$，即从点$x$移动，可以使$f(x)$的值减少；当且仅当梯度向量$f_x$和$dx$正交或其中有一个向量为零向量时（当其中有一个向量为零向量时，我们也可以将这两个向量看作是垂直的），$df(x)=0$，即随点x的微小移动，目标函数值不再增加，或者讲在点x处的一个邻域内，找不到一个可移动的方向，使得目标函数值增加，即在最优解$\bar{x}$处，一定有$df(x)=0$。

在无约束极值问题中，dx可以是任意向量，因此只要f_x不是零向量，总可以在点x处找到一个变化方向，使得向量dx和梯度向量f_x成锐角，从而有$df(x)>0$。故而当目标函数在点$\bar{x}$取得极值处，一定有梯度向量$f_x(\bar{x})=0$，这就是无约束极值问题的一阶条件。

1.2.2 约束极值问题

当存在约束（不管是等式约束还是不等式约束）时，点x处的变化方向是有限制的，即向量dx不是任意的。比如在上面所举的消费者选择的例子中，在预算线上，向量dx的方向为沿预算线移动。此时，按我们上面对梯度向量f_x和向量dx的几何意义的讨论，当点$x^1(x^3)$处梯度向量f_x和向量dx不正交时，所以向右（左）移动，可以使目标函数值增大；在点x^2处，梯度向量f_x和向量dx正交，$df(x)=0$，目标函数取得极值。由前面的讨论，向量dx的方向即为预算线的方向，而梯度向量f_x为无差异曲线的法方向，也就是与无差异曲线切线垂直的方向。由几何知识，我们知道，在点x^2（最优解）处，无差异曲线的切线的斜率一定与预算线的斜率相同，如图1.4所示，无差异曲线在点x^2处一定与预算线相切。这个结论与我们在消费者选择定性讨论的结果是一致的。

一般来说，约束由等式$g(x)=c$表示，点x的变化向量dx是受限制的，具体的，将约

束等式全微分，

$$g_1\mathrm{d}x_1 + \cdots + g_n\mathrm{d}x_n = 0$$

由于 c 是常数，等式的右边等于零。写成向量的形式为：

$$(g_1,\cdots,g_n)\begin{pmatrix}\mathrm{d}x_1\\ \vdots\\ \mathrm{d}x_n\end{pmatrix}=0\text{，或 } g_x\cdot\mathrm{d}x=0\text{，其中 } g_x=(g_1,\cdots,g_n)$$

因此，在点 x 处，向量 $\mathrm{d}x$ 的方向由上式确定，即向量 $\mathrm{d}x$ 与向量 g_x 垂直。

由在最优解 $\bar{x}$ 处，满足 $f_x\cdot\mathrm{d}x=0$，即梯度向量 f_x 与向量 $\mathrm{d}x$ 垂直。由几何知识，我们知道，在最优解 $\bar{x}$ 处，梯度向量 f_x 一定与向量 g_x 平行，即存在常数 λ 使得：

$$f_x = \lambda g_x,$$

或

$$\frac{f_x}{g_x} = \lambda$$

这就是我们熟悉的等式约束极值问题的一阶条件。

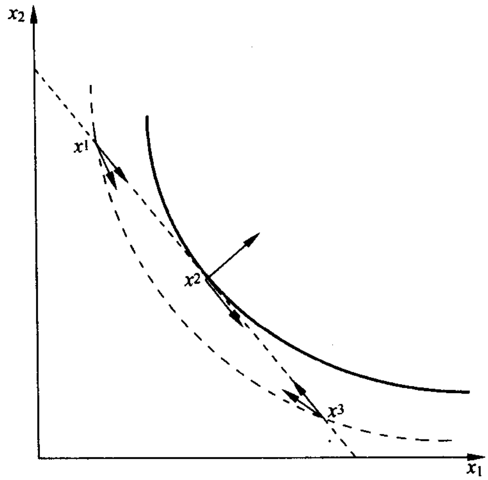

图 1.4　约束极值原理

正如前面对梯度向量 f_x 的讨论，此处我们也可以将向量 g_x 看作是约束函数 g_x 在点 x 处的梯度向量，即等值面 $g(x)=c$ 在点 x 处的法向量。由 $g_x\cdot\mathrm{d}x=0$，向量 $\mathrm{d}x$ 与梯度向量 g_x 是垂直的，或者说向量 $\mathrm{d}x$ 可以看作是等值面 $g(x)=c$ 的切平面中的一个向量。又由在点 $\bar{x}$ 处，$f_x\cdot\mathrm{d}x=0$，即梯度向量 f_x 和向量 $\mathrm{d}x$ 垂直，也就是说向量 $\mathrm{d}x$ 也在等值面 $f(x)=k$ 的切平面中。因此，在最优解点 $\bar{x}$ 处，两个等值面 $f(x)=k$、$g(x)=c$ 的切平面重合，推得法向量 f_x、g_x 平行，即有 $f_x=\lambda g_x$。

梯度向量 f 在一维的情形下就是导数 $f'(x)$，而在 n 维情形下就是偏导数向量 f_x。

1. 雅克比矩阵

在上面的例子中，如果约束不是单个等式，而是由 m 个等式组成的，即 $g(x)$ 和 c 都是向量，具体的：

$$\begin{matrix} g^1(x_1,\cdots,x_n) = c_1\\ \vdots \qquad\qquad \vdots\\ g^m(x_1,\cdots,x_n) = c_m\end{matrix}$$

则，$G=g_x\equiv\dfrac{\partial(g^1,\cdots,g^m)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\equiv\begin{pmatrix}\dfrac{\partial g^1}{\partial x_1}, & \cdots, & \dfrac{\partial g^1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial g^m}{\partial x_1}, & \cdots, & \dfrac{\partial g^m}{\partial x_n}\end{pmatrix}$，我们称之为 $g(x)$ 的雅克比矩阵。在隐函数定理的讨论中，会涉及雅克比矩阵的概念。

2. 隐函数定理

(1) 在隐函数 $f(x,y)=0$ 中，(x,y 都是一维向量)，如果在点(x^0,y^0)的一个邻域内有 $f_y\neq 0$，则 y 可以表示成 x 的函数，即 $y=\phi(x)$，并且$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{f_x}{f_y}$。

(2) 当 x 是 n 维向量时，如果在点(x^0,y^0)的一个邻域内有 $f_y\neq 0$，则 y 可以表示成 n 维向量 x 的函数，即 $y=\phi(x)$，且$\dfrac{\partial y}{\partial x_i}=-\dfrac{f_i}{f_y}$，$i=1,\cdots,n$。

这可以通过对隐函数 $f(x,y)=0$ 求全微分，$f_1\mathrm{d}x_1+\cdots+f_n\mathrm{d}x_n+f_y\mathrm{d}y=0$ 求得。

(3) 当 y 是一个 m 维向量时，根据方程组的知识，y 的值要能够被确定，$f(x,y)$ 也一定是一个 m 维的向量，即：

$$\begin{aligned}f^1(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_m)&=0\\ &\vdots\\ f^m(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_m)&=0\end{aligned}$$

此时，$f_y=\dfrac{\partial(f^1,\cdots,f^m)}{\partial(y_1,\cdots,y_m)}\equiv\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f^1}{\partial y_1}, & \cdots, & \dfrac{\partial f^1}{\partial y_m}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial f^m}{\partial y_1}, & \cdots, & \dfrac{\partial f^m}{\partial y_m}\end{pmatrix}$，我们称之为 $f^1,\cdots,f^m$ 对于 $y_1,\cdots,y_m$ 的雅克比矩阵($m\times m$)。

如果在点(x^0,y^0)的一个邻域，有雅克比矩阵 f_y 是非奇异的，或 $\det f_y\neq 0$，即雅克比行列式不等于零，则向量 y 可以写成向量 x 的函数，即 $y=\phi(x)$，其中 $\phi(x)$ 是一个向量，并且有：

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_i}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_i}\end{pmatrix}=-f_y^{-1}\cdot f_i=-\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f^1}{\partial y_1}, & \cdots, & \dfrac{\partial f^1}{\partial y_m}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial f^m}{\partial y_1}, & \cdots, & \dfrac{\partial f^m}{\partial y_m}\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f^1}{\partial x_i}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial f^m}{\partial x_i}\end{pmatrix}$$

此结果可以通过对下列式子全微分，

$$\begin{gathered} f^1(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_m)=0 \\ \vdots \\ f^m(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_m)=0 \end{gathered}$$

并利用克莱姆法则求得。

3. **超平面**

在上面消费者选择的例子中，预算约束等式为 $p_1x_1+p_2x_2=I$，即 $p\cdot x=I$。在平面 x_1-x_2 中表现为一条直线；当 x 是三维向量时，预算约束等式为 $p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3=I$，在三维空间(x_1,x_2,x_3)中表示一个平面，法方向为(p_1,p_2,p_3)；当 $n>3$ 时，预算约束 $p\cdot x=I$ 在 n 维欧氏空间$(x_1,\cdots,x_n)$中表现为超平面。

1.3 等式约束极值的拉格朗日求解法

前面我们从梯度的角度得出了约束等式极值问题

$$\max_x f(x)$$
$$\text{s.t. } g(x)=c$$

在最优解 $\bar{x}$ 处的一阶条件，即 $f_x=\lambda g_x$，其中 λ 为常数。

此处，我们给出一个一般的求解方法——拉格朗日方法：通过引入一个参数，将一个约束极值问题转化成无约束极值问题。具体的，通过构造拉格朗日函数：

$$L(x,\lambda)=f(x)+\lambda(c-g(x))$$

其中 x 是 n 维向量，λ 是参数，我们称之为拉格朗日乘子。上述约束极值在最优解 $\bar{x}$ 处的一阶条件可以用拉格朗日函数的一阶导数表示：

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_i}=f_i-\lambda g_i=0\quad(i=1,\cdots,n)$$

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda}=c-g(x)=0$$

第一个式子用向量表示，即为 $f_x=\lambda g_x$，其中 f_x，g_x 分别表示目标函数和约束函数在最优解点 $\bar{x}$ 处梯度向量的取值；第二个式子是约束等式的重新表述。共有 $n+1$ 个变量$(x_1,\cdots,x_n,\lambda)$和 $n+1$ 个等式，一般能直接求出最优解$(\bar{x},\lambda)$，拉格朗日乘子 λ 是作为最优解的一部分求出来的。

当约束 $g(x)=c$ 表示 m 个等式时，求解过程与上面一样，此时拉格朗日乘子 λ 是一

个 m 维的向量$(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)$，一阶条件由 $f_x=\lambda g_x$和约束等式 $g(x)=c$ 组成，共有 $n+m$ 个变量$(x_1,\cdots,x_n;\lambda_1,\cdots,\lambda_m)$，$n+m$ 个等式，在一定的条件下（在最优解 $\bar{x}$ 处，雅克比矩阵 g_x是非奇异的），可以求解出最优解$(\bar{x},\lambda)$。

1.4 非线性规划问题的求解：库恩—塔克条件

前面我们讨论了等式约束的极值问题，但在经济学中，很多经济问题的约束都是以不等式形式出现的。如前面讨论的消费者选择问题中，我们给出的预算约束是所有的收入必须花完，但更为现实的是，只要满足支出不超过收入就可以了。此外，我们还要加上选择变量非负的约束，比如商品的消费量不能小于零。

不等式约束及选择变量非负的最优化问题称之为非线性规划问题。一般的，可以用如下数学模型表示：

$$\max_x f(x)$$
$$\text{s.t. } g(x)\leqslant c$$
$$x\geqslant 0$$

对于这个问题的求解，我们只要在等式约束极值问题解法的基础上作一点修正。

第一步：作拉格朗日函数

$$L(x,\lambda)=f(x)+\lambda(c-g(x))$$

这个函数与等式约束极值问题的拉格朗日函数是一样的。

第二步：求一阶条件。显然，因为选择变量加上了非负的约束，所以原来在最优解 $\bar{x}$ 处拉格朗日函数对选择变量的一阶偏导等于零的一阶条件就要变为：

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_i}=f_i-\lambda g_i\leqslant 0,x_i\geqslant 0,x_i\frac{\partial L}{\partial x_i}=0\quad(i=1,\cdots,n)$$

在最优解 $\bar{x}$ 处，选择变量和相应的一阶偏导数乘积为零，表明当选择变量为正时（我们称之为内点解），一阶偏导为零，这是和等式约束一样的；而当选择变量取零时（我们称之为角点解），一阶偏导小于或等于零。这样的关系，我们称之为互补松弛条件。

在等式约束极值问题的一阶条件中，拉格朗日函数对乘子 λ 的一阶导数等于零就是约束等式的重新表述；现在约束是以不等式形式出现的，对 λ 的一阶条件相应的修正为：

$$\frac{\partial L}{\partial\lambda}=c-g(x)\geqslant 0,\lambda\geqslant 0,\lambda\frac{\partial L}{\partial\lambda}=0$$

和选择变量非负约束一样，不等式约束时的一阶条件需要添加一个互补松弛条件，即

当 λ 为正时，约束取等号，此时我们称之为约束是紧的（binding）；λ 为零时，约束取不等号，则称此时约束为松的（non-binding）。这个互补松弛条件告诉我们，拉格朗日乘子的符号与约束的松紧情况是相关的：正的拉格朗日乘子对应紧的约束；拉格朗日乘子为零则对应松的约束。

把上面两个式子结合起来，就是非线性规划问题在最优解 $\bar{x}$ 处的一阶必要条件，我们称之为库恩—塔克条件（Kuhn-Tucker condition）。

当约束个数是 $m(m>1)$ 个时，$g(x)$，c，λ 都表示 m 维的向量，相应的，乘积变为内积即可。

与等式约束极值问题的一阶必要条件相比，库恩—塔克条件是以不等式形式出现的，因此给求解带来了很大的麻烦。比如，在前面的两种商品的消费者选择例子中，等式约束极值问题的一阶条件表现为(x_1, x_2, λ)三个未知量，三个方程；而当预算约束以不等式形式出现，并且加上 $x_1 \geqslant 0$，$x_2 \geqslant 0$ 条件后，库恩—塔克条件表现为三个未知量，三个不等式（及互补松弛条件），具体的求解需要讨论选择变量 $x_1>0, x_1=0; x_2>0, x_2=0; \lambda>0, \lambda=0$ 等各种情况后才能将不等式转化成等式，再进一步求解。三个变量每一个都有为正、零两种情况，所以组合起来一般的求解过程需要讨论 $2^3=8$ 种情形，并在每一种情形下求出最优解。下面我们用一个具体的例子来看非线性规划库恩—塔克条件的求解过程。

例：拟线性偏好（quasi-linear preference）

$$
\begin{aligned}
\max_{x} \quad & u(x_1, x_2) = x_2 + a\ln x_1 \\
\text{s.t.} \quad & p_1 x_1 + p_2 x_2 \leqslant I \\
& x_1, x_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

作拉格朗日函数 $L(x_1, x_2, \lambda) = x_2 + a\ln x_1 + \lambda(I - p_1 x_1 - p_2 x_2)$，一阶必要条件（库恩—塔克条件）：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{a}{x_1} - \lambda p_1 \leqslant 0, x_1 \geqslant 0, x_1 \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\
&\frac{\partial L}{\partial x_2} = 1 - \lambda p_2 \leqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_2 \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \\
&\frac{\partial L}{\partial \lambda} = I - p_1 x_1 - p_2 x_2 \geqslant 0, \lambda \geqslant 0, \lambda \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0
\end{aligned}
$$

如何求解？一般情况下，我们要讨论 $x_1>0, x_1=0; x_2>0, x_2=0; \lambda>0, \lambda=0$ 组合成的 8 种情况，不过，在这一具体的问题中，我们可以通过分析题目中隐含的条件（经济含义）初步确定未知量的范围，以减少讨论的可能情形。

比如，在此问题中，边际效用 u_1，u_2 均为正（即偏好关系满足局部非饱和性），推得不会有收入剩余，否则可以通过继续增加消费使得效用增加，因此预算约束是紧的，即 $\lambda>0$；另外，由效用函数的形式，$x_1>0$。因此，需要讨论的情形只有两种：

第一种情形：$x_1>0,x_2=0,\lambda>0$。此时库恩—塔克条件变为

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=\frac{a}{x_1}-\lambda p_1=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=1-\lambda p_2\leqslant 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=I-p_1x_1=0$$

求得 $x_1=\dfrac{I}{p_1},x_2=0,\lambda=\dfrac{a}{I}$，并且满足参数条件 $I\leqslant ap_2$。

第二种情形：$x_1>0,x_2>0,\lambda>0$

此时，库恩—塔克条件变为

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=\frac{a}{x_1}-\lambda p_1=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=1-\lambda p_2=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=I-p_1x_1-p_2x_2=0$$

求得 $x_1=\dfrac{ap_2}{p_1},x_2=\dfrac{I-ap_2}{p_2},\lambda=\dfrac{1}{p_2}$，并且有 $I>ap_2$。

从这个例子的讨论中，我们知道，虽然非线性规划的库恩—塔克条件的求解过程一般需要讨论选择变量和拉格朗日乘子为零和为正所组合成的每一种情况，但可以通过对变量的范围的初步分析，以减少求解情形的可能性并简化求解的过程。

另外，从求解的具体过程看，虽然题目没有直接告诉我们，但其实问题中的参数是有条件的，参数空间可以划分成各个不同的部分，每一部分对应于求解的一个具体情形。如本题中，当 $I\leqslant ap_2$ 时，$x_1>0,x_2=0,\lambda>0$；而当 $I>ap_2$ 时，$x_1>0,x_2>0,\lambda>0$。

这个例子告诉我们，在拟线性偏好的效用函数中，收入较低时，只消费商品 1；当收入超过一定水平时，两种商品都消费，但是第一种商品消费的量保持不变，而所有增加的收入都用来消费商品 2。从这个角度看，我们可以将此例中的商品 1 看作是生活中的必需品（如基本的衣食住行），而商品 2 可以看作是高档消费品，低收入时只消费必需品，而当收入上升到一定水平时，必需品的消费不再增加，转而消费高档品。

1.5　二阶条件

前面我们讨论了两类最优化问题：约束极值问题及非线性规划问题，并且给出了求解两类问题的拉格朗日方法和库恩—塔克条件。

不过，从求解的过程看，无论是前面梯度向量的角度，还是后面等式约束问题的拉格朗日方法、非线性规划的库恩—塔克条件，我们都只是分析了在最优解处应满足的性质，而并没有保证满足此性质的点一定是最优解。比如最大值问题和最小值问题的一阶条件是相同的，即由拉格朗日方法推导出的一阶条件和库恩—塔克条件只是解的必要条件。为此，我们需要找到新的条件，以保证由一阶必要条件所求得的解就是此最优规划问题的最优解，这就是二阶条件的讨论。

1.5.1　无约束极值问题

例如，在选择变量 x 是一维情况下，一阶条件为 $f'(x)=0$，体现在平面 x-$f(x)$中，曲线 $f(x)$的斜率为零。从图 1.5 看，点 A 和点 B 都满足这样的性质。显然，这两个点的性质是不同的，函数在点 A 的一个邻域内取得了极大值，而在点 B 取得了极小值。因此，从此例看，由一阶必要条件求得的解不能保证就是最大化极值问题的解。为此，我们需要寻找出新的条件，以保证满足此条件的点就是最优解。

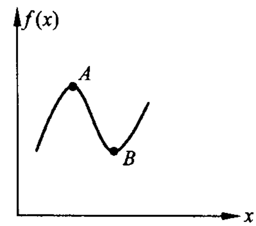

图 1.5　无约束的目标函数

1. 泰勒展开

在进一步讨论之前，我们先给出函数 $f(x)$在点 x_0附近的一个近似估计：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots$$

或
$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$$

等式右边的最后一项是一个与二阶项相比非常小、可忽略的余项(无穷小量)。因此，我们可以写出近似的形式：

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2$$

上述三个式子都可称为函数 $f(x)$在点 x_0附近的泰勒展开。

现在，将 $f(x)$在最优解 $\bar{x}$ 处泰勒展开：