

大学数学名师导学丛书

数 学 分 析

名师导学

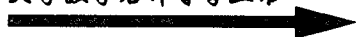
(下)

《大学数学名师导学丛书》编写组 编



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

大学数学名师导学丛书



数 学 分 析

名师导学

三 下 册 三

《大学数学名师导学丛书》编写组 编

本册编写 杨万里



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内容提要

本书是以大学理工科的《数学分析》的教学大纲为依据,结合大学数学教学大纲并参考最主流教材编写而成。内容简练明确,解决问题透彻明了,易学易用。本书的结构特点是,在每章的开头,首先列出本章的知识要点,然后扼要论述知识要点分析和学习要求,随后通过丰富的典型例题,详细讲述解析方法和答案,最后附有极具针对性的习题与自测。

本丛书具有三“导”合一的特点:集中知识要点“导”学,典型例题与习题“导”讲,知识点学习和自测紧密“导”练。

本书适合学习《数学分析》的大学理工科学生使用。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析名师导学.下册/《大学数学名师导学丛书》编写组编. —北京:中国水利水电出版社,2004

(大学数学名师导学丛书)

ISBN 7-5084-2254-6

I. 数… II. 大… III. 数学分析—高等学校—教学参考资料 IV. O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 071620 号

书 名	大学数学名师导学丛书 数学分析名师导学(下册)
编 者	《大学数学名师导学丛书》编写组 编 本册编写 杨万利
出版发行	中国水利水电出版社(北京市三里河路 6 号 100044) 网址 www. waterpub. com. cn E-mail: sales@waterpub. com. cn 电话 (010)63202266(总机)、68331835(营销中心)
经 销	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	北京雪光科技发展有限公司
印 刷	北京市优美印刷有限责任公司
规 格	787mm×1092mm 16 开本 23.5 印张 421 千字
版 次	2005 年第 1 版 2005 年 1 月第 1 次印刷
印 数	0001—6000 册
定 价	30.00 元

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社营销中心负责调换

版权所有·侵权必究

《大学数学名师导学丛书》编写组

主 编：牛庆银

副 主 编：董玉才

编写人员：杨万利 牛庆银 董玉才

郑素文 刘文学 陈建华

前言

大学数学是理工科院校的重要基础课程。在教学改革后,由于授课时间的减少,很多学生陷入了“上课能听懂,课后解题却不知如何下手,考试更无所适从”的困境。为帮助学生摆脱困境,我们对辅导方式进行了积极创新,希望以有效的名师指导式辅导,使学生轻松学数学,牢固并灵活地掌握知识,从而取得优异的考试成绩。

本丛书根据目前大学数学教学大纲并参考最主流教材编写而成,由数位工作在教学一线的、教授级的中青年教师编写。内容简练明确,解决问题透彻明了,易学易用。本套丛书的结构特点是,在每章的开头,首先列出本章的知识要点,然后扼要论述知识要点分析和提出学习要求,随后通过丰富的典型例题,详细讲述解析方法和答案,最后附有极具针对性的习题与自测,供学生灵活运用所学知识进行实践,使学生“知其然,更知其所以然”,巩固所学知识,从而协助学生顺利通过相应的日常学习和严格的考核。

本丛书具有三“导”合一的特点:

1) 集中知识要点“导”学。通过把知识要点串联在一起,将大纲和知识要点分层讲解,方便学生查找,有的放矢地学习,避免遗漏。

2) 典型例题与习题“导”讲。针对典型例题和习题,结合知识点进行精讲,给出多种解题思路、方法,使学生能触类旁通,从而轻松学习、解题和通过考试。

3) 知识点学习和自测紧密“导”练。结合老师课堂练习必考和可能考的知识点以及考试要求，给出极具针对性的习题与自测，方便学生自我测试和掌握学习情况。

由于编者水平有限，时间仓促，不妥之处在所难免，书中如有错漏之处，敬请广大读者批评、指正。

编 者

2004 年 6 月

目 录

第十二章 数项级数	1
第一节 级数的收敛性	1
第二节 正项级数	9
第三节 一般项级数	21
参考答案与提示	32
第十三章 函数列与函数项级数	38
第一节 一致收敛性	38
第二节 一致收敛函数列与函数项级数的性质	49
参考答案与提示	57
第十四章 幂级数	60
第一节 幂级数	60
第二节 函数的幂级数展开	71
参考答案与提示	88
第十五章 傅里叶级数	91
第一节 傅里叶级数	91
第二节 以 $2l$ 为周期的函数的展开式	103
第三节 收敛定理的证明	115
参考答案与提示	122
第十六章 多元函数的极限与连续	124
第一节 平面点集与多元函数	124
第二节 二元函数的极限	129
第三节 二元函数的连续性	136
参考答案与提示	142
第十七章 多元函数微分学	144
第一节 可微性	144
第二节 复合函数微分法	152
第三节 方向导数与梯度	157

第四节 泰勒公式与极值问题·····	161
参考答案与提示·····	171
第十八章 隐函数定理及其应用·····	174
第一节 隐函数·····	174
第二节 隐函数组·····	182
第三节 几何应用·····	192
第四节 条件极值·····	201
参考答案与提示·····	208
第十九章 含参量积分·····	212
第一节 含参量正常积分·····	212
第二节 含参量反常积分·····	219
第三节 欧拉积分·····	227
参考答案与提示·····	235
第二十章 曲线积分·····	239
第一节 第一型曲线积分·····	239
第二节 第二型曲线积分·····	244
参考答案与提示·····	251
第二十一章 重积分·····	252
第一节 二重积分概念·····	252
第二节 直角坐标系下二重积分的计算·····	262
第三节 格林公式、曲线积分与路线的无关性·····	268
第四节 二重积分的变量变换·····	274
第五节 三重积分·····	281
第六节 重积分的应用·····	291
*第七节 n 重积分·····	297
第八节 反常二重积分·····	304
参考答案与提示·····	312
第二十二章 曲面积分·····	317
第一节 第一型曲面积分·····	317
第二节 第二型曲面积分·····	323
第三节 高斯公式与斯托克斯公式·····	329
*第四节 场论初步·····	336
参考答案与提示·····	344
第二十三章 流形上微积分学初阶·····	347

第一节	n 维欧氏空间与向量函数	347
第二节	向量函数的微分	351
第三节	反函数定理和隐函数定理	355
第四节	外积、微分形式与一般斯托克斯公式	358
参考答案与提示		363

第十二章 数项级数

第一节 级数的收敛性

一、知识要点

数项级数的定义 数项级数收敛、发散定义 级数收敛的柯西准则 级数收敛的性质 几个典型级数的敛散性

二、知识要点分析

1. 数项级数的定义

给定一个数列 $\{u_n\}$, 对它的各项依次用“+”号连接起来的表达式

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \quad (1)$$

称为数项级数或无穷级数(也简称级数), 其中 u_n 称为数项级数(1)的通项, 数

项级数(1)常简记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

第 n 个部分和(部分和)记为

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n. \quad (2)$$

被称为第 n 个部分和, 数列 $\{S_n\}$ 亦被称为部分和数列.

2. 数项级数收敛、发散定义

若数项级数(1)的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛于 S (即 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$), 则称数项级数

(1)收敛, 其和为 S , 记 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = S$. 否则称数项级数(1)发散.

注 级数的敛散性是由它的部分和数列 $\{S_n\}$ 的敛散性来确定的. 且对于任一个数列 $\{a_n\}$, 总可对应于一个数项级数的前 n 项和数列, 即级数 $a_1 + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) + \cdots$ 的部分和数列, 即数列 $\{a_n\}$. 故有时对数列的探讨亦

可化成相应级数问题进行处理.

3. 级数收敛的柯西准则

级数(1)收敛的充要条件: $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 当 $n, p > N$ 时,

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

级数(1)发散的充要条件: $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N$, 总存在 $m_0 (> N), p_0 > 0$, 使

$$|u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p_0}| \geq \varepsilon_0.$$

级数(1)收敛的必要条件: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

级数(1)发散的充分条件: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ 或不存在.

4. 级数收敛的性质

(1)若级数 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 收敛, 则 $\forall c, d$ 为常数, 级数 $\sum (cu_n + dv_n)$ 亦收敛, 且 $\sum (cu_n + dv_n) = c \sum u_n + d \sum v_n$.

注 若级数 $\sum u_n$ 收敛, $\sum v_n$ 发散, 则 $\forall c, d$ 为常数, 且 $d \neq 0$, 级数 $\sum (cu_n + dv_n)$ 亦必发散.

(2)级数(1)的前有限项的变动, 不改变原级数的收敛性和发散性.

(3)在收敛级数的项中任意加括号, 既不改变级数的收敛性, 亦不改变级数的和.

注 性质(3)对发散级数而言, 是不成立的.

5. 几个典型级数的敛散性

(1)等比级数(几何级数)

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots, a \neq 0,$$

则 $|q| < 1$ 时收敛; $|q| \geq 1$ 时发散.

(2)调和级数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

是发散的.

三、学习要求

深刻理解数项级数的概念及收敛、发散定义.

四、典型例题与方法解析

例1 计算 $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} + \cdots$.

分析 一般而言,级数求和是相当困难的,常常采用分解、化简其部分和 S_n 的方法,以求得到 S_n 的极限,本例中分子是等差数列,分母是等比数列,这类问题有一个一般的形式:

$$a_1q + a_2q^2 + a_3q^3 + \cdots + a_nq^n + \cdots \quad (3)$$

其中 $\{a_n\}$ 为等差数列,公差为 d , $|q| < 1$.

$$\text{设 } S_n = \sum_{k=1}^n a_k q^k,$$

则

$$\begin{aligned} S_n - qS_n &= a_1q + (a_2 - a_1)q^2 + (a_3 - a_2)q^3 + \cdots + (a_n - a_{n-1})q^n - a_nq^{n+1} \\ &= a_1q - a_nq^{n+1} + d \cdot \frac{q^2 - q^{n+1}}{1 - q}. \end{aligned}$$

$$S_n = \frac{a_1q}{1-q} - \frac{a_n}{1-q}q^{n+1} + d \cdot \frac{q^2 - q^{n+1}}{(1-q)^2}.$$

$a_n = a_1 + (n-1)d$, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} nq^n = 0$. 故可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1q}{1-q} + \frac{q^2d}{(1-q)^2}.$$

本例中, $a_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$, $d = 2$, 则

$$S = 3.$$

例 2 求证如下级数是收敛的, 并求其和:

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2^n}}{1 - x^{2^{n+1}}}, 0 < x < 1;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos n\alpha, |q| < 1.$$

分析 如例 1 所叙那样,关键是分析前 n 项和的特征,通过拆项、归纳等方式,以求得解析表达式,或求极限,总之,明确的一点应该是:数项级数只是数列的不同表达形式,一切能用于数列极限的方法,均可适当修正而应用于数项级数的研讨.

(1)注意到

$$\frac{1}{1-x^{2^k}} - \frac{1}{1-x^{2^{k+1}}} = \frac{1+x^{2^k}}{1-x^{2^{k+1}}} - \frac{1}{1-x^{2^{k+1}}} = \frac{x^{2^k}}{1-x^{2^{k+1}}}.$$

这样,原级数的前 n 项和数列 $\{S_n\}$ 便为

$$S_n = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{2^{n+1}}}.$$

显然, $0 < x < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{x}{1-x}$.

(2) 令 $S_n = q \cos \alpha + q^2 \cos 2\alpha + \cdots + q^n \cos n\alpha$

是等比数列 $\{q^n\}$ 与数列 $\{\cos n\alpha\}$ 对应项乘积相加而得的数列. 我们有过处理“等比数列”与“等差数列”对应项乘积相加所得数列情形的经验(见例 1). 这里 $\{\cos n\alpha\}$ 不是等差数列. 如果仍采用例 1 的方法, 会出现这样的项

$$\begin{aligned} q^k [\cos k\alpha - \cos(k+1)\alpha] &= -2q^k \sin \frac{k-1-k}{2} \alpha \sin \frac{k+k+1}{2} \alpha \\ &= 2q^k \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \left(k + \frac{1}{2}\right) \alpha \end{aligned}$$

不能产生共同的因子, 而应该修改例 1 的方法. 另一方面, 同样的三角函数的积化和差给我们以如下启示

$$2\cos k\alpha \cdot \cos \alpha = \cos(k+1)\alpha + \cos(k-1)\alpha.$$

这样, 便有如下恒等式

$$\begin{aligned} 2S_n \cos \alpha &= \sum_{k=1}^n q^k [\cos(k+1)\alpha + \cos(k-1)\alpha] \\ &= (q^{n+1} \cos(n+1)\alpha + S_n - q \cos \alpha) + (q^2 + q^2 S_n - q^{n+1} \cos \alpha) \\ &\Rightarrow S_n = \frac{q^{n+1} \cos n\alpha - q^{n+1} \cos(n+1)\alpha + q \cos \alpha - q^2}{1 + q^2 - 2q \cos \alpha}. \end{aligned}$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{q \cos \alpha - q^2}{1 + q^2 - 2q \cos \alpha}.$$

例 3 将级数 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$ 的各项重新安排, 使先依次出现 p 个正项, 再出现 q 个负项, 然后如此交替, 试证新级数的和为

$$\ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}.$$

分析 对级数 $\sum u_n$ 而言, 如果 $\lim u_n = 0$, 且其前 n 项和数列 $\{S_n\}$ 存在“序号长不超过定数”的子列 $\{S_{n_k}\}$ 其极限为 S , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

所谓序号长不超过定数的子列 $\{S_{n_k}\}$ 是指, 存在正整数 k_0 , 使得

$$0 < n_{k+1} - n_k \leq k_0, k = 1, 2, \cdots.$$

这一原理的证明是简单的, 只需使用级数收敛的定义即可. 但却是解决级数收敛甚至求级数和的重要方法. 依题意, 本例可以挑选一个序号长为 $p+q$ 的前 n 项和列 $\{S_n\}$ 的子列作为研究对象(其通项 $(-1)^n \frac{1}{n} \rightarrow 0$ 是显然的). 记为

$\{S_{(p+q)n}\}$, 则

$$\begin{aligned}
 S_{(p+q)n} &= \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2p-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2q}\right) + \left(\frac{1}{2p+1} + \cdots + \frac{1}{4p-1}\right) \\
 &\quad - \left(\frac{1}{2q+2} + \frac{1}{2q+4} + \cdots + \frac{1}{4q}\right) + \cdots \\
 &\quad + \left(\frac{1}{2np-(2p-1)} + \frac{1}{2np-(2p-3)} + \cdots + \frac{1}{2np-1}\right) \\
 &\quad - \left(\frac{1}{2nq-(2q-2)} + \frac{1}{2nq-(2q-4)} + \cdots + \frac{1}{2nq}\right) \\
 &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2np-1} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2nq}\right) \\
 &= \sum_{k=1}^{2np} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{np} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{nq} \frac{1}{k}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

此时, 可以利用调和级数的欧拉(Euler)公式予以运算上式了.

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \epsilon_n.$$

其中 C 为欧拉(Euler)常数, $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$, 则式(4)成为

$$\begin{aligned}
 S_{(p+q)n} &= \ln 2np + \epsilon(2np) - \frac{1}{2} \ln(np) - \frac{1}{2} \epsilon_{np} - \frac{1}{2} \ln nq - \frac{1}{2} \epsilon_{nq} \\
 &= \ln \frac{2np}{\sqrt{npnq}} + \epsilon_{2np} - \frac{1}{2} \epsilon_{np} - \frac{1}{2} \epsilon_{nq}.
 \end{aligned}$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{(p+q)n} = \ln 2 \sqrt{\frac{p}{q}}.$$

例 4 设 $x \in [0, \pi]$, 试求如下级数之和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

分析 分析通项特点, 便知 $(\sin nx)' = n \cos nx$. 这样, 我们仍可立足于求前 n 项和的解析表达式来解决此类问题.

$$\text{设 } S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k},$$

$$\text{则 } S'_n(x) = \sum_{k=1}^n \cos kx.$$

而 $S'_n(x)$ 是可求和的, 我们得到

$$2 \sin \frac{x}{2} S'_n(x) = \sin \frac{2n+1}{2} x - \sin \frac{x}{2},$$

即

$$S'_n(x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2}. \quad (5)$$

式(5)对任意 $x \in (0, \pi]$ 均成立. 再返回到 $S_n(x)$, 便有

$$\begin{aligned} -S_n(x) &= \int_x^\pi S'_n(t) dt \Rightarrow S_n(x) \\ &= -\frac{1}{2} \int_x^\pi \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt + \frac{1}{2}(\pi - x) \quad x \in (0, \pi]. \end{aligned}$$

此时, 可以借用黎曼(Riemann)引理:

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, $f(x)$ 以 T 为周期, 在 $[0, T]$ 上可积, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) g(nx) dx = \frac{1}{T} \int_0^T g(x) dx \int_a^b f(x) dx. \quad (6)$$

得

$$S(x) = \begin{cases} 0, & x=0, \\ \frac{1}{2}(\pi-x), & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

例 5 设 $a_n > 0$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$, 试证:

(1) 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n^p}$ 当 $p < 1$ 时收敛, $p \geq 1$ 时发散.

(2) 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$ 当 $p \leq 1$ 时发散, $p > 1$ 时收敛.

分析 S_n 称为前 n 项和, r_n 则称为前 n 项余项和. 它们与通项 a_n 之间具备如下简单关系是解决这类问题必须了解的关键:

$$S_{n+1} - S_n = a_{n+1}, \quad r_n - r_{n+1} = a_n.$$

提请注意的是, 当且仅当 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在时 (即级数收敛时), r_n 才有意义, 且对于正项级数而言, $r_n \downarrow$, $S_n \uparrow$.

解 (1) $\frac{a_n}{r_n^p} = \frac{r_n - r_{n+1}}{r_n^p},$

可设 $f(x) = x^{1-p}$, 在 $[r_{n+1}, r_n]$ 上, 应用中值公式, 有

$$r_n^{1-p} - r_{n+1}^{1-p} = \frac{1-p}{\xi^p} (r_n - r_{n+1}) = \frac{(1-p)a_n}{\xi^p}, \quad \xi \in [r_{n+1}, r_n],$$

当 $p < 1$ 时,

$$r_n^{1-p} - r_{n+1}^{1-p} > \frac{(1-p)a_n}{r_n^p}$$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{r_n^p} < \frac{1}{1-p} (r_n^{1-p} - r_{n+1}^{1-p}).$$

$$\forall m > n > 0,$$

$$0 < \sum_{k=n}^m \frac{a_k}{r_k^p} < \frac{1}{1-p} (r_n^{1-p} - r_{m+1}^{1-p}). \quad (7)$$

由于 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$, 式(7)表明 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{r_k^p}$ 的前 n 项和数列是柯西 (Cauchy) 列, 由柯西 (Cauchy) 收敛准则知

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{r_k^p}$$

收敛.

亦可用积分进行估计

$$\frac{a_n}{r_n^p} < \int_{r_{n+1}}^{r_n} \frac{dx}{x^p}, \quad p < 1.$$

从而

$$0 < \sum_{k=n}^m \frac{a_k}{r_k^p} < \int_{r_{m+1}}^{r_n} \frac{dx}{x^p}.$$

由于 $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$, 在 $p < 1$ 时收敛, 故

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \int_{r_{m+1}}^{r_n} \frac{dx}{x^p} = 0.$$

即仍由柯西 (Cauchy) 收敛准则知, 级数收敛.

当 $p > 1$ 时, 由于 $r_n \rightarrow 0$, $\exists N$, 使

$$\frac{a_n}{r_n^p} > \frac{a_n}{r_n}, \quad n = N, N+1, \dots,$$

则 $\forall m < n$, 有

$$\begin{aligned} \frac{a_m}{r_m} + \frac{a_{m+1}}{r_{m+1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{r_{n-1}} &> \frac{1}{r_m} (a_m + a_{m+1} + \dots + a_{n-1}) \\ &= \frac{1}{r_m} (r_m - r_n) = 1 - \frac{r_n}{r_m}. \end{aligned} \quad (8)$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{r_n}{r_m}) = 1$$

故, $\exists N_0, n > N_0$ 时,

$$\frac{a_m}{r_m} + \frac{a_{m+1}}{r_{m+1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{r_{n-1}} > \frac{1}{2}. \quad (9)$$

由柯西 (Cauchy) 准则, 知 $p > 1$ 时, 级数发散.



$p=1$ 时, 式(9)表明级数发散.

(2) 证明思路与(1)同(读者可仿(1)给出).

注 1 这种利用积分去研究级数的方法在级数敛散性讨论中是常用的.

注 2 设 $f(x)$ 单调下降且非负, 则积分 $\int_1^{\infty} f(x)dx$ 与级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ 具有相同的敛散性.

事实上

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n).$$

故有

$$\sum_{k=1}^n f(k+1) \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^n f(k).$$

例 6 设 $f(x)$ 单调下降且非负, $a>1$ 则 $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ 与 $\sum_{k=1}^{\infty} a^k f(a^k)$ 有相同的敛散性.

分析 这个问题与例 5 注 2 有类同之处.

$$a^k(a-1)f(a^{k+1}) \leq \int_a^{a^{k+1}} f(x)dx \leq a^k(a-1)f(a^k).$$

从而

$$\frac{a-1}{a} \sum_{k=1}^{n+1} a^{k+1} f(a^{k+1}) \leq \int_a^{a^{n+1}} f(x)dx \leq (a-1) \sum_{k=1}^n f(a^k).$$

例 7 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是: 对于任意的正整数序列 $p_1, \dots, p_k \dots$ 及自然数的任意子序列 $\{n_k\}$, 皆有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (a_{n_k+1} + a_{n_k+2} + \dots + a_{n_k+p_k}) = 0$$

证 必要性是显然的.

充分性: 若 $\sum a_n$ 发散, 则 $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N > 0, \exists n > N$ 及 $p \in \mathbb{N}$. 使得

$$|a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| \geq \varepsilon_0.$$

可构造正整数序列 $\{p_k\}$ 及自然数的任意子序列 $\{n_k\}$ 如下:

$N_1=1$, 存在 $n_1 > 1, p_1 \in \mathbb{N}$.

$$|a_{n_1+1} + \dots + a_{n_1+p_1}| \geq \varepsilon_0.$$

$N_2 = \max\{n_1, 2\}$, $\exists n_2 > N_2, p_2 \in \mathbb{N}$. 使

$$|a_{n_2+1} + \dots + a_{n_2+p_2}| \geq \varepsilon_0$$

