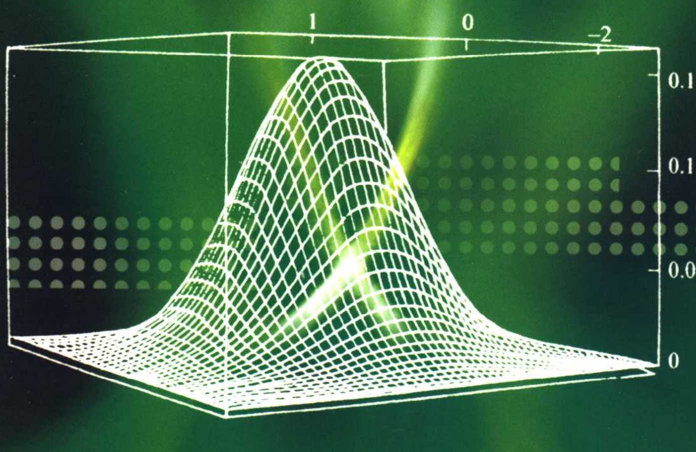
成人教育数学辅导系列

概率论与数理统计攻关

上海交通大学数学系　编



上海交通大学出版社

·成人教育数学辅导系列

概率论与数理统计攻关

上海交通大学数学系　编

上 海 交 通 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书共编选了概率论与数理统计习题350多题(均选自重点大学成人教育院校的教材)。其中“例题精解”180多题,均有详解,有的题给出多种解法,对典型题或难题,还专门作分析、点评;其余“习题精选”170余题,除标“*”号给出详解外都给出了答案或提示。

附录中收编了几家重点大学成人教育院校近年来本科生概率论与数理统计试卷五份,附答案与提示。

本书适合成人教育理、工、农、医科,经济管理和财经类各专业本、专科生阅读,也可作为教师的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计攻关/上海交通大学数学系编. —上海:上海交通大学出版社,2005

(成人教育数学辅导系列)

ISBN 7-313-04029-6

Ⅰ.概… Ⅱ.上… Ⅲ.① 概率论-成人教育:高等教育-教材 ② 数理统计-成人教育:高等教育-教材 Ⅳ.021

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第052329号

概率论与数理统计攻关

上海交通大学数学系 编

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路877号 邮政编码200030)

电话:64071208 出版人:张天蔚

立信会计出版社常熟市印刷联营厂印刷 全国新华书店经销

开本:880mm×1230mm 1/32 印张:8 字数:227千字

2005年8月第1版 2005年8月第1次印刷

印数:1～5 050

ISBN 7-313-04029-6/O·172 定价:13.00元

前　言

众所周知，大学数学是理、工、农、医、管理等各科各专业共同的基础课，其重要性不言而喻。由于数学本身抽象深奥，使不少学生对学数学有畏惧感，特别是数学考试总有人过不了关，因而数学课历来被学生称为“霸王课”。

怎样才能学好数学呢？数学界的名师、学业有成的学子对此回答不尽相同：

“首先要喜欢数学，喜欢了，自然会下功夫去学好。”

“学数学要勤奋，要多动脑、多动手、多动口。”

“课前要预习，课上认真听，课后要复习，作业必须独立完成。”

上述回答有共同之处：学数学要花时间，要多做习题。我国著名数学家苏步青院士在求学期间就曾做过一万余道微积分题。多做习题自然要多花很多时间，这对成人教育学院的学生来讲难度较大：他们白天工作，夜晚上课，有的学生可能还要照顾家庭、子女，能用来做习题的时间实在不多。若遇难题，无处请教，宝贵的时间在苦思冥想中悄悄流失。向书本请教，也不失为一个好方法，但又难以觅到与教科书配套的辅导书。

呈现在眼前的这套成人教育数学辅导系列丛书，就是作为全国工科数学教学基地的上海交通大学数学系，专为接受成人高等教育的学生而组织编写的，作者都是教学第一线的老教师。他们根据数学教学大纲（本科非数学专业）的要求，精心编选了数百道习题，并对其中一半给予精解，即不但给出解题思路与方法（有的题给出多种解法），还对难点与易错之处进行分析、点评。通过对各种含不同知识点的典型例题的剖析，使读者加深对本课程基本概念、基本理论和基本方法的理解与掌握。每章的“习题精选”供读者练习之用，均给出了答案或提示。附录中收编了几家重点大学成人教育院校近年的试卷，供读者在复习迎

考时作练兵之用(附答案)。

由于非数学专业的每门数学课时都比较少,课堂上教师举例讲解的时间非常有限,所以这套成人教育数学辅导系列丛书,既是对课时不足的一种补偿,也是对学生的课外辅导。编者期望本丛书能使读者用不太多的时间比较扎实地掌握相关课程的基本知识,提高解题能力,攻下考试难关。

本系列丛书由《高等数学攻关》、《线性代数攻关》和《概率论与数理统计攻关》组成。其中《概率论与数理统计攻关》,前四章由冯卫国副教授编写,后两章由武爱文副教授编写,最后由冯卫国统稿。

随着社会和科学技术的发展,人们越来越重视对随机现象规律性的研究。例如,如果你投资股票、彩票、期货等,那么你必定要考虑投资的收益及风险问题;如果你是企业管理者,必定要考虑如何提高产品质量,使产品为顾客喜爱,使企业效益达到最大,等等。所以,掌握一些随机现象理论和研究方法,对你的日常工作和生活将带来很大益处。

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门数学学科,学好这门课对你来说显然十分重要。由于本课程是随机数学,区别于其他传统数学,所以在学习本课程时要特别注意它的特点。本书的概率统计习题大部分是从实际生活中提炼出来的,既真实、生动,又具有很强的实用性,因此,除了做好习题以外,还需要思考其本质问题,做到举一反三。

限于编者水平,难免有疏漏与不当之处,敬请同行与读者不吝赐教。

编　者

于上海交通大学

2005年8月

目　　录

第1章 概率论的基本概念

关键词

随机试验　随机事件　概率　古典概型　几何概型　随机事件的独立性　条件概率

教学要求

(1) 理解随机试验、样本空间和随机事件的概念.

(2) 熟练掌握随机事件之间的关系和运算.

(3) 理解概率的定义,掌握概率的基本性质并能用来计算随机事件的概率.

(4) 会计算古典概型和几何概型的概率.

(5) 理解随机事件独立性概念,会利用事件独立性进行概率计算.

(6) 理解条件概率的概念,会利用乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式进行概率计算.

重点与难点

概率的计算是本章的重点与难点,关键在于会判别概率的各种类型,然后选择相应的公式进行计算.

方法提要

见下面框图:

- 随机事件的概率计算
  - 直接计算法
    - 古典概型$P(A)=k/n$
    - 几何概型$P(A)=G$的测度$/\Omega$的测度
  - 间接计算法
    - 差事件概率$P(B-A)=P(B-A)\quad(A\subset B)$
    - 和事件概率$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$
    - 积事件概率$P(AB)=\begin{cases}P(A)P(B|A)\\P(B)P(A|B)\end{cases}$
    - 条件概率$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$
    - 全概率公式$P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$
    - 贝叶斯公式$P(B_j|A)=P(B_j)P(A|B_j)\Big/\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$
    - 伯努利概型$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$
    - 逆事件概率$P(A)=1-P(\bar{A})$

本章知识结构

- 概率论的基本概念
  - 随机试验
    - 定义
    - 样本空间
    - 独立性（n 重伯努利试验概型）
  - 随机事件
    - 定义
    - 关系（饱含、相等、互斥）
    - 运算（逆、交、并、差）
    - 独立性
  - 随机事件概率
    - 定义
      - 统计定义
      - 公理化定义
      - 古典概型定义
      - 几何概型定义
      - 条件概率定义
    - 计算
      - 概率运算的基本性质
      - 乘法公式
      - 全概率公式
      - 贝叶斯公式

A 例题精解

【1-1】 一盒中装有 5 个同样的零件，其中编号为 1,2,3 的是正品零件，编号为 4,5 的是次品零件. 现从盒中先后取出 2 个零件，试写出：

(1) 该试验的样本空间；

(2) 取出的第一个零件是次品的事件 A；

(3) 取出的第一个零件是正品而第二个是次品的事件 B；

(4) 取出的 2 个零件均为次品的事件 C.

分析 随机试验的全体样本点的集合就是样本空间，而随机事件可表述为样本空间中的某个子集合. 本题的关键是要先找出全部样本点，而不能有一个遗漏.

解 设样本点(i,j)表示取出的第一个零件为 i 号，第二个零件为 j 号.

(1) 该试验的样本空间

$$\Omega=\begin{Bmatrix}(1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5)\\ (2,1) & (2,3) & (2,4) & (2,5)\\ (3,1) & (3,2) & (3,4) & (3,5)\\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,5)\\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4)\end{Bmatrix},$$

它所包含的样本点共有

$$C_5^1C_4^1=20\text{ 个}.$$

(2)

$$A=\begin{Bmatrix}(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,5)\\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4)\end{Bmatrix},$$

它所包含的样本点共有

$$C_2^1C_4^1=8\text{ 个}.$$

(3)

$$B=\begin{Bmatrix}(1,4) & (1,5) & (2,4)\\ (2,5) & (3,4) & (3,5)\end{Bmatrix},$$

它所包含的样本点共有

$$C_3^1C_2^1=6\text{ 个}.$$

(4) $C=\{(4,5)\quad(5,4)\}$,仅含 $C_2^1=2$ 个样本点.

【1-2】 某学生做 3 道习题. A,B,C 分别表示一、二、三题做对. 试用 A,B,C 的运算关系表示下列事件:

(1) 第一题做对,第二、三题做错;

(2) 第一、二题做对,第三题做错;

(3) 3 题都做对;

(4) 3 题都做错;

(5) 3 题中至少有 1 题做对;

(6) 3 题中至少有 2 题做对;

(7) 3 题中不多于 1 题做对;

(8) 3 题中恰有 2 题做对.

分析 由于事件有各种运算关系,所以答案形式不唯一.

解 (1) $A\bar{B}\bar{C}$ 或 $A-B-C$;

(2) $AB\bar{C}$ 或 $AB-C$;

(3) ABC;

(4) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$;

(5) $A\cup B\cup C$;

(6) $AB\cup AC\cup BC$;

(7) $\bar{A}\bar{B}\cup\bar{A}\bar{C}\cup\bar{B}\bar{C}$(3 题中至少有 2 题做错)

或$\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{BC}$(3 题中任 2 题都做错)

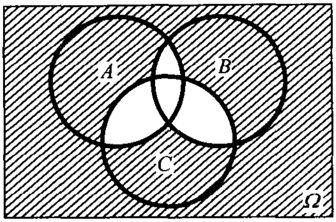
或 $A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup\bar{A}\bar{B}\bar{C}$(3 题中恰有 1 题做对或都做错);

(8) $AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC$

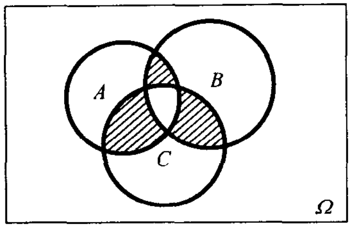
或 $AB\cup AC\cup BC-ABC$.

点评 题(4)和题(5)两个事件是对立事件,故题(5)可表示成 $\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}$,但不能表示成 $\Omega-\bar{A}\bar{B}\bar{C}$,因为后一表示法不符合题目要求. 题(6)和题(7)也是对立事件.

若利用文氏图求解题(7),题(8)更加直观方便(见图 1-1).



题(7)



题(8)

图 1-1

【1-3】 设 x 表示一个在数轴上某一段$[-7,8]$中作随机运动的质点的位置.试说明下列各事件的关系：

$$A=\{x\mid -1<x\leqslant 5\},\quad B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 3\},$$

$$C=\{x\mid -7\leqslant x\leqslant -1, 5<x\leqslant 8\},$$

并写出下列事件：

(1) $A(\overline{B}\cup C)$；　　(2) $\overline{(A-B)}C$.

解　试验的样本空间

$$\Omega=\{x\mid -7\leqslant x\leqslant 8\},$$

各事件的情况如图 1-2 所示.

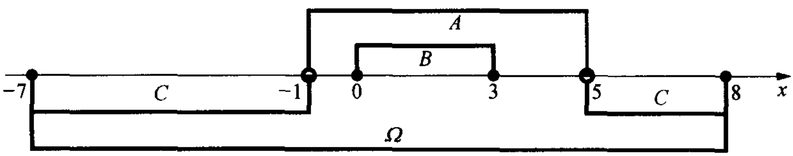


图 1-2

由图 1-2 可见，$B\subset A$；A 与 C，B 与 C 互不相容，即 $AC=\varnothing$，$BC=\varnothing$；A 与 C 为对立事件，即 $AC=\varnothing$，$A\cup C=\Omega$.

(1) $A(\overline{B}\cup C)=A\overline{B}\cup AC=A\overline{B}=A-B$

$$=\{x\mid -1<x<0, 3<x\leqslant 5\};$$

(2) $\overline{(A-B)}C=\overline{A\overline{B}}C=(\overline{A}\cup B)C=\overline{A}C\cup BC$

$$=C\cup\varnothing=C=\{x\mid -7\leqslant x\leqslant -1, 5<x\leqslant 8\}.$$

【1-4】 在船舶与海洋工程系的学生中任选一名学生.若事件 A 表示被选学生是男生，事件 B 表示该学生是三年级学生，事件 C 表示

该学生是运动员，则

(1) 叙述事件 $AB\overline{C}$ 的意义.

(2) 在什么条件下 $ABC=C$ 成立?

(3) 什么时候关系式 $C\subset B$ 是正确的?

(4) 什么时候 $\overline{A}=B$ 成立?

解 (1) 事件 $AB\overline{C}$ 表示挑选的是一名三年级男生，但不是运动员.

(2) 等式 $ABC=C$ 等价于 $C\subset AB$，即在"全系运动员都是三年级男生"这一条件下，等式 $ABC=C$ 成立.

(3) 在全系运动员都是三年级学生时，$C\subset B$ 是正确的.

(4) 当全系女生都在三年级，且三年级学生都是女生时 $\overline{A}=B$ 成立.

【1-5】 设 A,B 为随机事件，证明：

$$(A-AB)\cup B=A\cup B.$$

证 ***方法 1*** 等价法

事件 $A-AB$ 等价于"A 发生，而 A,B 不同时发生"等价于"A 发生而 B 不发生"，从而事件 $(A-AB)\cup B$ 等价于"A,B 中至少有一个发生"，即

$$(A-AB)\cup B=A\cup B.$$

方法 2 推演法

$$\begin{aligned}(A-AB)\cup B&=A\overline{AB}\cup B=A(\overline{A}\cup\overline{B})\cup B=A\overline{A}\cup A\overline{B}\cup B\\&=A\overline{B}\cup B=A\overline{B}\cup B\overline{B}\cup AB\cup B\\&=(A\cup B)(\overline{B}\cup B)=A\cup B.\end{aligned}$$

点评 不能把数的运算律，如去括号、移项等用到事件的运算中去，否则会出错. 例如：

① $(A-AB)\cup B\neq A-AB\cup B$，因为运算顺序是先并后差；

② 不能由 $A\overline{B}\cup B=A\overline{B}\cup B\overline{B}\cup AB\cup B$ 移项 B，推出

$$A\overline{B}=A\overline{B}\cup B\overline{B}\cup AB,$$

显然 $A\overline{B}\cup B\overline{B}\cup AB=A\overline{B}\cup AB=A\neq A\overline{B}$.

方法 3 图示法

如图 1-3 所示.

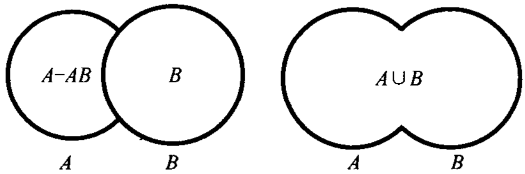


图 1-3

【1-6】 设事件 A、B 互不相容，且 $P(A)=0.1$，$P(A\cup B)=0.7$. 求 $P(B)$，$P(A\overline{B})$，$P(\overline{A}B)$ 和 $P(\overline{A}\overline{B})$.

解 由题设得 $P(AB)=P(\varnothing)=0$，从而有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.1+P(B)=0.7,$$

故

$$P(B)=0.6.$$

$$P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$$
$$=P(A)=0.1.$$

同理

$$P(\overline{A}B)=P(B-A)=P(B-AB)=P(B)-P(AB)$$
$$=P(B)=0.6.$$

$$P(\overline{A}\overline{B})=1-P(\overline{\overline{A}\overline{B}})=1-P(A\cup B)=1-0.7=0.3.$$

【1-7】 设事件 A,B 满足 $P(A)=0.7$，$P(A-B)=0.3$. 求 $P(\overline{AB})$.

解 ***方法 1***

$$P(\overline{AB})=P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\overline{B})$$
$$=1-P(A)+P(\overline{B}-\overline{A}\overline{B})=0.3+P(\overline{B}-\overline{A})$$
$$=0.3+P(\overline{B}A)=0.3+P(A-B)$$
$$=0.3+0.3=0.6.$$

方法 2 利用对立事件公式

$$P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$$
$$=0.7-P(AB)=0.3,$$
$$P(AB)=0.4,$$
$$P(\overline{AB})=1-P(AB)=0.6.$$

点评 题 1-6 和 1-7 都用到了概率的一个重要转换公式

$$P(A-B)=P(A-AB)=P(A\bar{B}),$$

它是由随机事件特殊的运算公式——差化积公式

$$A-B=A-AB=A\bar{B}$$

而得到.

【1-8】 事件 A,B,C 满足 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$, $P(AB)=P(AC)=0$, $P(BC)=\frac{1}{8}$，试证：A,B,C 中至少有一个发生的概率为 $\frac{5}{8}$.

分析 本题的关键是需证明 $P(ABC)=0$，这样由广义加法公式便可得欲证结论.

证 由 $ABC\subset AB$ 得 $0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0$，从而得 $P(ABC)=0$. 于是

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)\\&\quad -P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=3\times\frac{1}{4}-0-0-\frac{1}{8}+0=\frac{5}{8}.\end{aligned}$$

点评 初学者最容易发生如下误证：

因为 $P(AB)=0$，所以 $AB=\varnothing$，于是 $ABC=\varnothing C=\varnothing$，从而 $P(ABC)=P(\varnothing)=0$.

错误原因：概率为零的事件未必是不可能事件.

【1-9】 设事件 A,B,C 同时发生必导致事件 D 发生，则

$$P(A)+P(B)+P(C)\leqslant 2+P(D).$$

分析 由于概率的性质很多，所以证明方法也很多.

第一类方法是利用广义加法公式：

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

或

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)\\&\quad -P(AC)-P(BC)+P(ABC).\end{aligned}$$

第二类方法是利用广义加法公式的推论

$$P(A\cup B\cup C)\leqslant P(A)+P(B)+P(C).$$

第三类方法是利用积化差公式

$$P(A\bar{B}) = P(A-B) = P(A) - P(AB).$$

证　方法 1

由题设可知 $ABC \subset D$，得 $P(ABC) \leqslant P(D)$，

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) \leqslant 1, \quad (1)$$

$$P(AB \cup AC \cup BC) = P(AB) + P(AC) + P(BC) - 2P(ABC), \quad (2)$$

式(1)+式(2)得

$$P(A) + P(B) + P(C) - P(ABC) \leqslant 2,$$

从而有

$$P(A) + P(B) + P(C) \leqslant 2 + P(ABC) \leqslant 2 + P(D).$$

方法 2　由 $P(A \cup B) \leqslant 1$ 可得 $P(A) + P(B) \leqslant 1 + P(AB)$，两边加 $P(C)$ 并再一次应用广义加法公式，得

$$\begin{aligned} P(A) + P(B) + P(C) &\leqslant 1 + P(AB) + P(C) \\ &\leqslant 1 + P(AB \cup C) + P(ABC) \\ &\leqslant 2 + P(ABC) \leqslant 2 + P(D). \end{aligned}$$

方法 3　由题设可知 $ABC \subset D$，得 $P(\overline{ABC}) \geqslant P(\bar{D})$，于是

$$\begin{aligned} P(A) + P(B) + P(C) &= 3 - P(\bar{A}) - P(\bar{B}) - P(\bar{C}) \\ &\leqslant 3 - P(\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}) \\ &= 3 - P(\overline{ABC}) \leqslant 3 - P(\bar{D}) = 2 + P(D). \end{aligned}$$

方法 4　因为 $P(\bar{B}) \geqslant P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB)$，同理

$$P(\bar{C}) \geqslant P(AB\bar{C}) = P(AB) - P(ABC),$$

故

$$\begin{aligned} P(A) - P(\bar{B}) - P(\bar{C}) &\leqslant P(A) - [P(A) - P(AB)] \\ &\quad - [P(AB) - P(ABC)] \\ &= P(ABC) \leqslant P(D), \end{aligned}$$

于是有

$$P(A) + P(B) + P(C) \leqslant 2 + P(D).$$

【1-10】　大城市电话号码由 8 位数组成，除首位数非 0 外，其余位数可以是 0,1,2,…,9 中的任一数，求电话号码是由完全不同的数字组成的概率.

解　设样本空间中基本事件总数 $n = 10^8$.

有利场合是：首位数有 9 种取法，由于不重复，其余 7 位数有 P_9^7 种取法. 根据乘法原理，有利的基本事件数 $k=9P_9^7$. 故所求概率

$$p=\frac{k}{n}=\frac{9P_9^7}{10^8}=\frac{163\,296}{10^7}\approx 0.016\,3.$$

【1-11】 某人买了若干大小相同的新鲜鸭蛋，其中有 a 只青壳的，b 只白壳的. 他准备将青壳蛋加工成咸蛋，故将鸭蛋一只只从箱中摸出进行分类，求第 k 次摸出的是青壳蛋（设为事件 A）的概率 $P(A)$（$1\leqslant k\leqslant a+b$）.

分析 本题是古典概型中非常典型的摸"球"概型. 由于对同一随机试验可作不同的设计，故求解方法也各不相同.

解 **方法 1** （选排列）

将蛋从 1 至 $a+b$ 进行编号，基本事件总数为从 $a+b$ 只蛋中选出 k 只进行排列的排列数 P_{a+b}^k，有利事件数为 $P_a^1P_{a+b-1}^{k-1}$. 由古典概型即有

$$P(A)=\frac{P_a^1P_{a+b-1}^{k-1}}{P_{a+b}^k}=\frac{a}{a+b}.$$

方法 2 （全排列）

仍将蛋编号，将所有的蛋摸出来排列在 $a+b$ 个位置上，基本事件总数为 $(a+b)!$，要求在第 k 个位置上放青壳蛋，有利事件数为 $a(a+b-1)!$，所以

$$P(A)=\frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}.$$

方法 3 （组合）

对同色蛋不加区别，构造的随机试验是将 $a+b$ 只蛋放在一直线的 $a+b$ 个位置上，且只需考虑青壳蛋的放法. 把 a 只青壳蛋放在 $a+b$ 个位置上的所有不同的放法总数为 C_{a+b}^a，有利事件数为 C_{a+b-1}^{a-1}，故

$$P(A)=\frac{C_{a+b-1}^{a-1}}{C_{a+b}^a}=\frac{a}{a+b}.$$

方法 4 构造的随机试验只考虑第 k 次摸出的是何种颜色的蛋，把所有的可能结果作为基本事件全体，显然总数为 $a+b$. 要求第 k 次摸出青壳蛋，有利事件数为 a，所以