偏微分方程数值解法（第2版）

陆金甫 关 治 编著

清华大学出版社

偏微分方程数值解法

（第2版）

陆金甫 关 治 编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书介绍了偏微分方程数值解的两类主要方法：有限差分方法和有限元方法. 其内容包括有限差分方法的基本概念；双曲型方程、抛物型方程、椭圆型方程及非线性问题的有限差分方法；数学物理方程的变分原理；有限元离散方法以及其他一些相关的课题等. 在介绍每种具体方法的同时，还给出相应的理论分析. 各章附有习题.

本书可作为高等学校理工科专业研究生教材，有关本科专业也可作教材使用，此外也可供从事科学与工程计算的科技人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

偏微分方程数值解法/陆金甫，关治编著. —第 2 版. 北京：清华大学出版社，2003
ISBN 7-302-07529-8

Ⅰ. 偏… Ⅱ. ①陆… ②关… Ⅲ. 偏微分方程—数值计算 Ⅳ. O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 099151 号

出 版 者：清华大学出版社 **地 址**：北京清华大学学研大厦
http://www tup.com.cn **邮 编**：100084
社 总 机：010-62770175 **客户服务**：010-62776969
组稿编辑：潘真微
文稿编辑：刘 颖
印 刷 者：北京四季青印刷厂
装 订 者：三河市新茂装订有限公司
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开 本：185×230 **印张**：20.75 **字数**：428 千字
版 次：2004 年 1 月第 2 版 2004 年 1 月第 1 次印刷
书 号：ISBN 7-302-07529-8/O · 330
印 数：1～5000
定 价：26.00 元

第1版前言

偏微分方程的数值解法在数值分析中占有重要的地位，很多科学技术问题的数值计算包括了偏微分方程的数值解问题. 近三十多年来，它的理论和方法都有了很大的发展，而且在各个科学技术的领域中应用也愈来愈广泛. 在我国，偏微分方程数值解法作为一门课程，不但在计算数学专业，而且也在其他理工科专业的研究生和大学生中开设. 这本书的目的就是为大学课程提供一本教材，同时也为从事这方面工作的科研、工程技术人员提供一本参考书.

本书着重介绍当今流行的偏微分方程数值解的两类主要方法，即有限差分方法和有限元方法. 目前，这两类方法在应用上有不同的侧重，所以本书在选材上也有差别. 有限差分方法主要集中在依赖于时间的问题（双曲型和抛物型方程），而有限元方法则侧重于定态问题（椭圆型方程），至于用这两类方法离散化后得到的代数方程组的数值解法，虽然是十分重要和引起人们浓厚兴趣的问题，但是为了不使本书篇幅过长，我们没有讨论它，好在一般数值分析教科书和有关专著中，对一些基本的数值代数方法都有所介绍.

本书讨论的两类方法，都以基本概念和基本方法为主，同时也介绍了一些近年发展起来的方法和技巧. 我们希望本书能够帮助读者确切地理解基本概念，掌握和正确使用基本方法. 书中对模型问题作了详细的分析，而对较为复杂的问题只作近似的分析或简单的介绍. 本书没有采用高深的数学工具，因此学过微积分和线性代数，而且具有数值分析和数学物理方程初步基础的理工科学生和工程技术人员均可阅读. 对专门从事计算数学的学生和研究人员来说，本书只是给出偏微分方程数值解的一些最基础的知识和方法.

本书的前 4 章是关于有限差分方法的，其中第 1 章集中讨论了有限差分法的基本概念，我们认为弄清楚这些基本概念再具体讨论各种差分格式，将会有较大的好处. 第 2、3、4 章分别讨论双曲型、抛物型和椭圆型方程的差分解法. 如上所说，对椭圆型方程的讨论是较为简单的. 第 5 章叙述了基本的变分原理，为下一章打下基础. 第 6 章讨论了椭圆型方程的有限元方法. 为了阐述基本的概念和方法，这两章我们都从一维问题开始讨论. 本书最后一章简单介绍了一些以上各章未涉及的问题. 其中前 4 节是有限元方法进一步的应用. 第 5 节利用变分原理列出差分方程. 最后两节则不是专属于有限差分方法和有限元方法的. 其一是目前在很多工程技术问题应用的边界元方法. 其二是多网格方法，这是近年来十分活跃的课题. 我们特别请顾丽珍同志执笔写了这一节.

本书的初稿是为清华大学理工科各专业研究生和应用数学专业大学生开设的偏微分

方程数值解课程的讲义，经过在教学中试用、修改而成书. 本书得到胡显承同志的认真审阅. 顾丽珍同志两次使用我们的讲义，十分详细地提出了改进意见，又认真看了修改后的书稿，改正了一些疏漏之处，并为本书补充了多重网格方法的一节. 此外，从编写讲义到成书的整个过程中，我们都得到李庆扬同志的热情鼓励和支持. 对他们的帮助，我们深表感谢. 同时也希望读者指出本书的错误和不足，使我们的工作得到改进.

陆金甫　关　治

1985 年 4 月于清华园

第2版前言

本书初版至今已有十多年了，其间老师和同学指出了书中的一些不妥并提出修改意见，在这次修改中我们做了认真的研究和改进．有关偏微分方程初步知识以及有关数学知识专列一章，非线性问题的差分方法也集中于一章．这样本书的基本内容为第1章至第5章以及第7章和第8章．第6章和第9章分别为非线性问题的差分方法以及一些与有限元相关的课题，如特征值问题的有限元方法、边界元方法、多重网格方法等，这两章内容可选学．在这次修改中，第2章至第6章由陆金甫修改，其余均由关治修改．

陆金甫　关　治

2003年2月

目　　录

第 1 章　引论、准备知识

1 引　论

在科学和技术的发展过程中，科学的理论和科学的实验一直是两种重要的科学方法和手段. 虽然这两种科学方法都有十分重要的作用，但是一些研究对象往往由于它们的特殊性（例如太大或者太小，太快或者太慢等）不能精确地用理论描述或者用实验手段来实现. 自从计算机出现和发展以来，情况就大大不同了，人们可以用计算机计算那些过去根本不能求解的科学技术问题，模拟那些不容易观察到的现象，得到实际应用所需要的数值结果，揭示各种现象的规律和基本性质. 所以，现在普遍认为科学计算已经和两种传统的科学方法——理论和实验相并列，成为第三种科学方法.

科学计算在各门自然科学（物理学、气象学、地质学和生命科学等）和技术科学与工程科学（核技术、石油勘探、航空与航天和大型土木工程等）中起着越来越大的作用，在很多重要领域中成为不可缺少的工具. 而科学与工程计算中最重要的内容就是求解在科学研究和工程技术中出现的各种各样的偏微分方程或方程组.

例如，核武器的研制要有理论设计和核试验. 但核反应和核爆炸的过程是在高温高压的条件下进行的，而且巨大的能量在极短的时间内释放出来，核装置内部的细致反应过程及各个物理量的变化是根本不能用仪器测量出来的，核试验只是提供综合的数据. 而描述核反应和爆炸物理过程的数学模型是一个很复杂的非线性偏微分方程组，也根本没有办法得到这个方程组理论上的精确解. 所以发展核武器的国家都在计算机上对核反应过程进行数值模拟，这也称为“数值核试验”，它可以大大减少核试验的次数，节约大量的经费，缩短研制的周期. 历史上各时期各国最先进的计算机总是装备在核研究部门，我国也不例外，有资料表明，从开始研制直至达到与美、苏基本相抗衡的水平时，我国当时只进行了 338 次核试验，而美、苏则分别进行了 936 次和 716 次，这是我国研制人员更多地利用数值模拟手段所取得的成果.[1]

过去，在飞行器的设计过程中要做大量的风洞实验. 实验设备的建设费用和每次实验的花费是十分昂贵的. 但是人们现在可以在计算机上进行数值模拟，也就是数值求解有关空气动力学的偏微分方程组. 20世纪 90 年代初期，某公司研制出当时运算速度最快的计算机就称为“数值风洞”，用于航天飞机返回时的计算. 进行这类数值实验有周期短、费用低及容易改变参数进行重复计算的特点. 有资料说明，数值模拟已经使新型号飞机设计过程减少了三分之一以上的风洞实验.

科学计算在战争决策上应用的一个例子常常被人称道.那是海湾战争期间,某大国决策者要介入战争,但又担心一旦该地区的数百口油井被人点燃,是否会引起一场巨大的灾难,使全球气候剧烈变化,造成生态系统和经济系统的巨大损失.科学家们设计了一个和Navier-Stokes方程组有关的计算模型,用计算机进行了一系列的模拟试验,得出的结论认为灾难是局部性的,不会对全球产生严重后果,这促使决策者下决心介入战争,到后来油井果然被点燃,事实也证明了的确没有造成全球性的灾难.

还可以举出如数值天气预报、大型水坝应力分析等许多例子,说明数值求解偏微分方程在各门科学和工程中的应用.解偏微分方程已经成为科学与工程计算的核心内容,包括一些大型的计算和很多已经成为常规的计算.为什么它在当代能发挥这样大的作用呢?第一是计算机本身有了很大的发展;第二是数值求解方程的计算方法也有了很大的发展,这两者对人们计算能力的发展都是十分重要的.科学家指出,人类的计算能力正比于计算工具的效率与计算方法效率的乘积.举例说,从20世纪50年代初期(计算机刚出现不久)到90年代中期,计算机的运算速度大约提高了一亿倍(从每秒几千次到几千亿次),而在同一个时期,求解科学与工程中大量出现的椭圆型偏微分方程的算法的速度却提高了一万亿倍,从这里可以看到有效的数值计算方法的重要意义.

2 关于偏微分方程的一些基本概念

2.1 几个典型方程

含有未知函数 $u(x_1,x_2,\cdots,x_n,t)$ 的偏导数的方程称为偏微分方程.这里 u 是 $n+1$ 个自变量的函数.在很多应用问题中,专门用 t 表示时间变量,$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 表示空间变量.记 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$,当 $n=2,3$ 时,也常记 $\boldsymbol{x}=(x,y)$ 和 $\boldsymbol{x}=(x,y,z)$.下面举几个常见的偏微分方程的例子,其中遇到方程和未知函数不止一个时,出现的是偏微分方程组,用到的 Laplace 算子是

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

记

$$\nabla=\boldsymbol{e}_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\boldsymbol{e}_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+\boldsymbol{e}_n\frac{\partial}{\partial x_n},$$

其中 $\boldsymbol{e}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中坐标轴上正向的单位向量,我们有 $\Delta=\nabla\cdot\nabla$.

例 2.1(Laplace 方程)

$$\Delta u=0,$$

其中 $u=u(\boldsymbol{x})$ 称为**调和函数**.在力学、电学常常遇到的势函数满足这个方程.

例 2.2(Cauchy-Riemann 方程组) 在 $n=2$ 时,对于调和函数 $u(x,y)$,存在共轭调和函数 $v(x,y)$,它们满足方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

方程组的解(u,v)给出了一个复自变量 $z=x+\mathrm{i}y$ 的解析函数

$$f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y).$$

$(u(x,y),-v(x,y))$可以解释为流体力学中一个无旋不可压缩流的速度场.

例 2.3(Poisson 方程)

$$-\Delta u = f(\boldsymbol{x}),$$

其中 $u=u(\boldsymbol{x})$，而 $f(\boldsymbol{x})$是给定的函数. 这类方程的更一般形式是

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(k_n(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\right] = F(\boldsymbol{x}),$$

其中 $k_i(\boldsymbol{x})>0$. 如果 $k_1(\boldsymbol{x})=\cdots=k_n(\boldsymbol{x})=k(\boldsymbol{x})$，也可写成

$$-\nabla\cdot(k(\boldsymbol{x})\nabla u) = F(\boldsymbol{x}),$$

当 $k(\boldsymbol{x})$为常数时，就化为 Poisson 方程.

例 2.4(波动方程)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta u + F(\boldsymbol{x},t),$$

其中 $u=u(\boldsymbol{x},t)$，而 $F(\boldsymbol{x},t)$给定. 在一些声学、光学和力学的波动问题中常常出现这类方程. 当 $n=2$ 时，可以解释为膜的振动方程，满足方程的 $u(x,y,t)$是位移函数. 当 $n=1$ 时，方程可看成弦振动方程，即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t),$$

或者是声波一维传播方程，其中 $u=u(x,t)$.

例 2.5(扩散方程、传热方程)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(k_n\frac{\partial u}{\partial x_n}\right) + F(\boldsymbol{x},t),$$

其中，$u=u(\boldsymbol{x},t)$是扩散过程中某种物质的浓度，或是固体的传热过程中在 $\boldsymbol{x}$ 处、t 时刻的温度. 系数 $k_i=k_i(\boldsymbol{x})>0\ (i=1,\cdots,n)$称为扩散系数或热传导系数，当 $k_1=k_2=\cdots=k_n=a(a>0)$时，方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\Delta u + F(\boldsymbol{x},t).$$

$n=1$ 时得到一维扩散(传热)方程，$u=u(x,t)$满足

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t).$$

在例 2.4 或例 2.5 中，如果 $F=F(\boldsymbol{x})$，u 与时间 t 无关，则方程化为例 2.3 方程的形