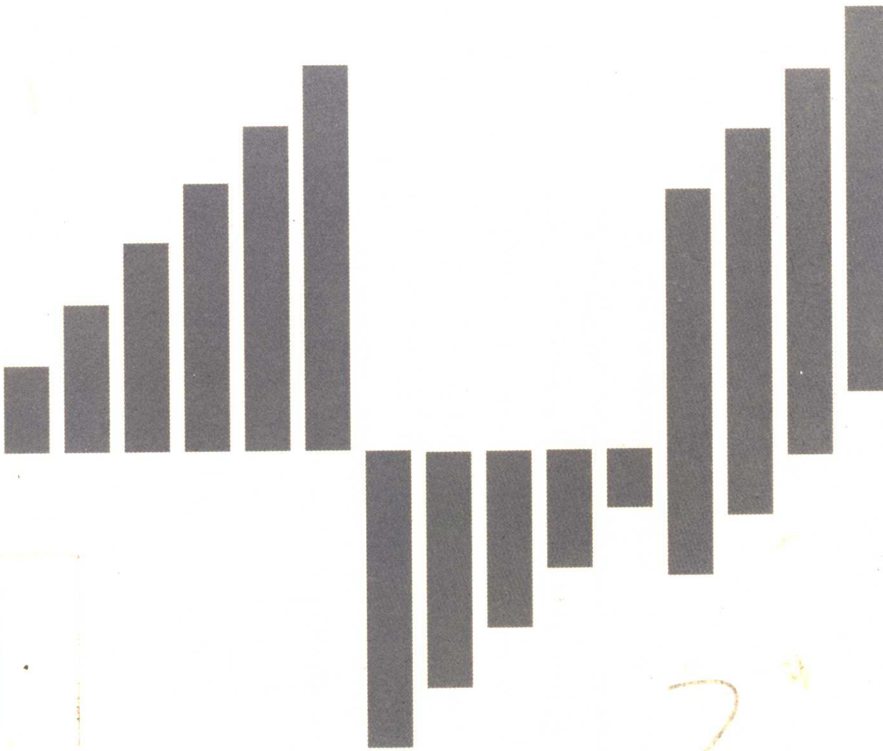
变分法基础

老大中　编著



3

国防工业出版社

http://www.ndip.cn

变分法基础

老大中　编著

国防工业出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

变分法基础/老大中编著 .—北京:国防工业出版社,2004.9

ISBN 7-118-03618-8

Ⅰ.变... Ⅱ.老... Ⅲ.变分法 Ⅳ.0176

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 090116 号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码 100044)

京南印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32 印张 14¼ 375 千字

2004 年 9 月第 1 版 2004 年 9 月北京第 1 次印刷

印数:1—4000 册 定价:20.00 元

前　　言

变分法是 17 世纪末发展起来的一门数学分支。本书主要介绍古典变分法,它理论完整,在力学、物理学、光学、摩擦学、经济学、宇航理论、信息论和自动控制论等诸多方面有广泛的应用。20 世纪中叶发展起来的有限元法,其数学基础之一就是变分法。如今,变分法已成为大学生、研究生、工程技术人员和科学工作者必备的数学基础。

编写本书的目的是为高等院校的研究生和高年级学生提供一本学习变分法的教材或参考书,使他们能够熟悉变分法的基本概念和计算方法,其中包括预备知识、固定边界的变分问题、极值的充分条件、可动边界的变分问题、条件极值的变分问题、参数形式的变分问题、变分原理和变分问题的直接方法。书中的一部分内容是作者的研究成果。本书也可作为有关专业的教师、科学研究人员和工程技术人员的参考书。

在作者看来,衡量对于一门数学学科知识的掌握程度,有两个基本的检验手段:一是看是否清楚基本概念,因为概念是构建科学大厦的基石;二是看是否会做习题,因为做习题的过程就是消化知识的过程,同时也是加深理解概念的过程,只有会做习题,才能达到会应用的目的。对于变分法这个数学分支来说,如果只会机械地背诵书上的概念和定理,而不动手演算习题,恐怕掌握不好这门知识。书中例题和习题比较丰富。各章均配有相当数量的习题,大多数习题选自本书所附的参考文献,在此谨向这些参考文献的作者表示感谢。为了帮助读者加深对基本概念的理解和解决学习中遇到的困难,本书提供了各章共 145 道习题(未计子习题)的全

部解答或证明，其中包括参考文献 2 中几乎全部习题的解答，供读者参考，同时这些习题解答也可看作是书中例题的补充。

变分法是一门饶有趣味的数学学科，作者本人就曾在变分法的学习和教学过程中体验到这种趣味。但作者认为学以致用才是更重要的目的。希望读者以愉悦的心情阅读本书，能从本书中学到所需要的知识，并能把这些知识应用到实践中去。在计算机高速发展的时代，为了提高计算精度和应用的普遍性，特别是在第 8 章中，一些例题和习题的解尽量给出分数和代数的形式，这很容易变成小数形式。

为使读者了解变分法的发展历史，本书还对其中所涉及的 37 位科学家进行了最多 200 多字的简要介绍，其中的译名以 1993 年全国自然科学名词审定委员会公布的《数学名词》为准。

本书初稿曾经用作三届北京理工大学工科硕士研究生的讲座材料，部分内容也曾经向博士研究生和大学四年级学生讲授过。

作者在本书编写过程中曾得到北京理工大学前党委书记谈天民教授的指导与帮助。国防工业出版社张文峰处长对本书的出版给予了大力支持。研究生李雪芳和李秀明帮助作者校验了部分习题。谨在此表示衷心地感谢。

具有高等数学知识的读者就可阅读本书，当然，如果读者具有线性代数、物理和力学等基础知识，阅读本书就会更容易。

限于作者水平，书中若有不妥或错误之处，恳请读者批评指正。

作者的通讯地址：laodazhong@tsinghua.org.cn

老大中

2003 年 9 月于北京

内 容 简 介

编写本书的目的是希望为高等院校的研究生和高年级学生提供一本学习变分法课程的教材或参考书，使他们能够熟悉变分法的基本概念和计算方法。内容包括预备知识、固定边界的变分问题、极值的充分条件、可动边界的变分问题、条件极值的变分问题、参数形式的变分问题、变分原理和变分问题的直接方法。其中一部分内容是作者的研究成果。本书也可供有关专业的教师和科技人员参考。

本书概念清楚，内容丰富，深入浅出，便于自学，既注重方法的介绍，又不失数学的系统性、科学性和严谨性。书中列有大量例题和习题。为了帮助读者解决学习中遇到的困难，本书提供了各章共 145 道习题的全部解答，供读者参考。

目　　录

第 1 章　预备知识 …… 1

1.1　泰勒公式 …… 1

1.1.1　一元函数的情形 …… 1

1.1.2　多元函数的情形 …… 2

1.2　含参变量的积分 …… 4

1.3　场论基础 …… 7

1.3.1　方向导数及梯度 …… 8

1.3.2　矢量场的通量及散度 …… 11

1.3.3　高斯定理与格林公式 …… 14

1.4　直角坐标与极坐标的坐标变换 …… 20

1.5　变分法基本引理 …… 24

1.6　名家介绍 …… 32

习题 1 …… 35

第 2 章　固定边界的变分问题 …… 37

2.1　古典变分问题举例 …… 37

2.2　变分法的基本概念 …… 41

2.3　最简泛函的变分与极值的必要条件 …… 48

2.4　最简泛函的欧拉方程 …… 58

2.5　欧拉方程的几种特殊类型及其积分 …… 63

2.6　依赖于多个一元函数的变分问题 …… 70

2.7　依赖于高阶导数的变分问题 …… 74

2.8　依赖于多元函数的变分问题 …… 82

2.9　欧拉方程的不变性 …… 92

2.10 名家介绍 …… 96
习题 2 …… 98
第 3 章 泛函极值的充分条件 …… 105
3.1 极值曲线场 …… 105
3.2 雅可比条件和雅可比方程 …… 107
3.3 魏尔斯特拉斯函数与魏尔斯特拉斯条件 …… 114
3.4 勒让德条件 …… 118
3.5 泛函极值的充分条件 …… 120
3.6 泛函的高阶变分 …… 124
3.7 名家介绍 …… 131
习题 3 …… 132
第 4 章 可动边界的变分问题 …… 135
4.1 最简泛函的变分问题 …… 135
4.2 依赖于多个函数的泛函的变分问题 …… 146
4.3 依赖于高阶导数的泛函的变分问题 …… 153
4.4 依赖于多元函数的泛函的变分问题 …… 158
4.5 具有尖点的极值曲线 …… 167
4.6 单侧变分问题 …… 173
4.7 名家介绍 …… 182
习题 4 …… 182
第 5 章 条件极值的变分问题 …… 185
5.1 整型约束条件 …… 185
5.2 微分型约束条件 …… 192
5.3 等周问题 …… 194
5.4 哈密顿原理及其应用 …… 203
5.5 简单混合型泛函的极值问题 …… 219
5.6 名家介绍 …… 227
习题 5 …… 228
第 6 章 参数形式的变分问题 …… 231
6.1 曲线的参数形式及齐次条件 …… 231

6.2 参数形式的等周问题 …… 234
6.3 可动边界参数形式泛函的极值 …… 240
习题 6 …… 242
第 7 章 变分原理 …… 244
7.1 集合与空间 …… 244
7.1.1 集合与映射 …… 244
7.1.2 集合与空间 …… 247
7.2 算子与泛函 …… 253
7.3 泛函的导数 …… 259
7.4 算子方程的变分原理 …… 261
7.5 与自共轭常微分方程边值问题等价的变分问题 …… 263
7.6 与自共轭偏微分方程边值问题等价的变分问题 …… 270
7.7 名家介绍 …… 278
习题 7 …… 281
第 8 章 变分问题的直接方法 …… 285
8.1 直接法的基本概念 …… 285
8.2 极小(极大)化序列 …… 285
8.3 欧拉有限差分法 …… 287
8.4 里茨法 …… 290
8.5 坎托罗维奇法 …… 296
8.6 伽辽金法 …… 298
8.7 最小二乘法 …… 313
8.8 算子方程的特征值和特征函数 …… 314
8.9 名家介绍 …… 323
习题 8 …… 324
附录 1 习题全解 …… 328
第 1 章 预备知识 …… 328
第 2 章 固定边界的变分问题 …… 331
第 3 章 泛函极值的充分条件 …… 356
第 4 章 可动边界的变分问题 …… 367

第 5 章　条件极值的变分问题…………………………… 378
第 6 章　参数形式的变分问题…………………………… 393
第 7 章　变分原理………………………………………… 399
第 8 章　变分问题的直接方法…………………………… 409
附录 2　索引 ……………………………………………… 436
参考文献………………………………………………… 445

第 1 章　预备知识

工欲善其事，必先利其器。学习变分法需要一些必备的基础知识，如一元和多元函数的泰勒展开，含参变量的积分，矢量分析与场论，坐标变换和变分法的基本引理等。本章简要介绍这些基础知识。

1.1　泰勒公式

1.1.1　一元函数的情形

定理 1.1.1　若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个开区间 (a,b) 内具有 $n+1$ 阶连续导数，则当 x 在 (a,b) 内时，$f(x)$ 可表示为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n \tag{1-1-1}$$

式中

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \tag{1-1-2}$$

这里 ξ 是介于 x_0 和 x 之间的某个值。

定理 1.1.1 称为一元函数的**泰勒中值定理**。公式(1-1-1)称为 $f(x)$ 在点 x_0 按 $(x-x_0)$ 的幂展开到 n 阶的**泰勒公式**。而公式(1-1-2)称为**拉格朗日型的余项**。当 $x\to x_0$ 时，R_n 是一个比 $|x-x_0|^n$ 更高阶的无穷小，或者说 R_n 是一个比 $|x-x_0|$ 高 n

阶的无穷小。

定理 1.1.2 设可导函数 $f(x)$在点 x_0 有极值,则在该点必有 $f'(x_0)=0$。该定理称为**一元函数的极值定理**。

1.1.2 多元函数的情形

一元函数的泰勒中值定理可推广到多元函数的情形。下面先讨论二元函数余项为拉格朗日型的泰勒公式。

定理 1.1.3 若函数 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某个邻域内连续且有直到 $n+1$ 阶的连续偏导数,并设$(x=x_0+\Delta x, y=y_0+\Delta y)$为该邻域内的任意一点,则总存在 $\theta(0<\theta<1)$,使下面的 n 阶泰勒公式成立:

$$\begin{aligned}
&f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)= \\
&\quad f(x_0,y_0)+\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)+ \\
&\quad \frac{1}{2!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)+\cdots+ \\
&\quad \frac{1}{n!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0)+R_n
\end{aligned}\qquad(1-1-3)$$

式中

$$\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0,y_0)=$$

$$\sum_{r=0}^{k}C_k^r(\Delta x)^r(\Delta y)^{n-r}\frac{\partial^k f(x_0,y_0)}{\partial x^r\partial y^{k-r}}$$

C_k^r 为k 个事物中取r 个的组合数。

$$\begin{aligned}
R_n&=\frac{1}{(n+1)!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} \\
&\quad f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)
\end{aligned}\qquad(1-1-4)$$

R_n 称为$f(x,y)$在点(x_0,y_0)的 n 阶**拉格朗日形式的余项**。

定理 1.1.3 称为**二元函数的泰勒中值定理**。

令 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$，$\Delta x=\rho\cos\alpha$，$y=\rho\sin\alpha$

由于 $f(x,y)$的各 $n+1$ 阶偏导数都连续，在点(x_0,y_0)的闭邻域内 $f(x,y)$的各 $n+1$ 阶偏导数的绝对值都不超过一个正数 M。因此对于该邻域上任意一点$(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$，余项的绝对值为

$$|R_n|\leqslant\frac{M}{(n+1)!}(|\Delta x|+|\Delta y|)^{n+1}=$$

$$\frac{M\rho^{n+1}}{(n+1)!}(|\cos\alpha|+|\sin\alpha|)^{n+1}\leqslant 2M\rho^{n+1}$$

这表明 R_n 是一个比 ρ 高 n 阶的无穷小。

定理 1.1.4　设可导函数 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)有极值，则在该点必有 $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$。该定理称为**二元函数的极值定理**。

上述定理推广到 m 元函数的情形，并有下述定理。

定理 1.1.5　若函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_m)$在点$(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0)$的某个邻域内连续且有直到 $n+1$ 阶的连续偏导数，并设$(x_1,x_2,\cdots,x_m)$为该邻域内的任意一点，则总存在 $\theta(0<\theta<1)$，使下面的 n 阶泰勒公式成立：

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,\cdots,x_m) = {} & f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0)+\\ & \frac{1}{1!}\left(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\Delta x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+\Delta x_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)\times\\ & f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0)+\\ & \frac{1}{2!}\left(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\Delta x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+\Delta x_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^2\times\\ & f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0)+\cdots+\\ & \frac{1}{n!}\left(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\Delta x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+\Delta x_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^n\times\\ & f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0)+R_n\end{aligned}\qquad(1-1-5)$$

式中

$$\Delta x_k = x_k - x_k^0\quad(k=1,2,\cdots,m)$$

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{n+1} \times$$
$$f(x_1^0 + \theta\Delta x_1, x_2^0 + \theta\Delta x_2, \cdots, x_m^0 + \theta\Delta x_m) \tag{1-1-6}$$

当 $\rho=\sqrt{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+\cdots+\Delta x_m^2}\to 0$ 时，R_n 是一个比 ρ 高 n 阶的无穷小。定理 1.1.5 称为**多元函数的泰勒中值定理**。

定理 1.1.6 设可导函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 在点 $(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0)$ 有极值，则在该点必有 $f_{xk}(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0)=0$，其中 $k=1,2,\cdots,m$。该定理称为**多元函数的极值定理**。

n 阶泰勒展开式(1-1-5)可写成下面简洁的形式：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_m) = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\left(\sum_{k=1}^{m}\Delta x_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)^i f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0) + R_n \tag{1-1-7}$$

式(1-1-1)和式(1-1-3)可以看作是式(1-1-5)中 m 分别等于 1 和 2 的情况。

1.2 含参变量的积分

设函数 $f(x,y)$ 是矩形域 $D[a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d]$ 上的有界函数，对于 $[c,d]$ 上任何固定的 y_0，函数 $f(x,y_0)$ 就是 x 的函数，若这个函数在 $[a,b]$ 上可积，则 $\int_a^b f(x,y_0)\mathrm{d}x$ 就惟一地确定一个数，这个数与 y_0 有关，当 y_0 在 $[c,d]$ 上变动时，所得到的积分值一般来说是不同的，记为

$$\varphi(y) = \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x \tag{1-2-1}$$

它是 y 的函数，定义域为 $[c,d]$，通常 y 称为**参变量**(积分过程中看作常量)，并且积分 $\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ 称为**含参变量的积分**。下面讨论含参变量积分对参变量的连续性、可导性与可积性等性质。

性质 1(连续性)　设函数 $f(x,y)$在闭区域$[a,b;c,d]$上连续,则

$$\varphi(y) = \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$$

在区间$[c,d]$上连续。这个性质也可以改写成

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)\mathrm{d}x \quad (1-2-2)$$

即极限与积分的运算次序可以交换。此性质又称为**积分号下求极限**。本性质的证明涉及一致连续概念,证明从略。

性质 2(积分顺序的可交换性)　若 $f(x,y)$在矩形域$[a,b;c,d]$上连续,则

$$\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^d f(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \quad (1-2-3)$$

即积分顺序可以交换,又称为**积分号下求积分**。

性质 3(求导与积分顺序的可交换性)　若 $f(x,y)$及 $f_y(x,y)$在矩形域 $D[a,b;c,d]$上连续,则积分 $\varphi(y) = \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ 在$[c,d]$上可导,且有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^b f_y(x,y)\mathrm{d}x \quad (1-2-4)$$

这个性质又称为**积分号下求微商**。

证　设 $F(y) = \int_a^b f_y(x,y)\mathrm{d}x$,因函数 $f_y(x,y)$在 D 上连续,故它在 D 上的二重积分可以交换积分次序,从而对区间$[c,d]$上的任意 y 有

$$\int_c^y F(y)\mathrm{d}y = \int_c^y\left[\int_a^b f_y(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y =$$

$$\int_a^b\left[\int_c^y f_y(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x =$$

$$\int_a^b [f(x,y) - f(x,c)]\mathrm{d}x = \varphi(y) - \varphi(c)$$

由于 $F(y)$在$[c,d]$上连续,因此对上式两端求导,得

$$\varphi'(y)=F(y)=\int_a^b f_y(x,y)\mathrm{d}x$$

证毕。

有时还会遇到这样一种含参变量的积分，它的上、下限也是参变量的函数，即

$$\varphi(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\mathrm{d}x \qquad (1-2-5)$$

关于它有下列性质：

性质 4 设函数 $f(x,y)$ 与 $f'(x,y)$ 都在闭形域 $D[a,b;c,d]$ 上连续，又函数 $\alpha(y),\beta(y)$ 在区间 $[c,d]$ 上可导，并且当 $c\leqslant y\leqslant d$ 时，有 $a\leqslant\alpha(y)\leqslant b, a\leqslant\beta(y)\leqslant b$，那么函数

$$\varphi(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

在区间 (c,d) 可导，且有

$$\varphi'(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\mathrm{d}x=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f_y(x,y)\mathrm{d}x+ f(\beta(y),y)\beta'(y)-f(\alpha(y),y)\alpha'(y) \qquad (1-2-6)$$

上式称为**莱布尼茨公式**。

证 对 $[c,d]$ 内任何 y，当 y 有改变量 Δy 时，$\alpha(y)$ 和 $\beta(y)$ 分别有改变量

$$\Delta\alpha=\alpha(y+\Delta y)-\alpha(y), \Delta\beta=\beta(y+\Delta y)-\beta(y)$$

而 $\varphi(y)$ 有改变量

$$\begin{aligned}\Delta\varphi(y)&=\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)=\\ &\int_{\alpha+\Delta\alpha}^{\beta+\Delta\beta} f(x,y+\Delta y)\mathrm{d}x-\int_\alpha^\beta f(x,y)\mathrm{d}x=\\ &\left\{\int_\alpha^\beta+\int_\beta^{\beta+\Delta\beta}-\int_\alpha^{\alpha+\Delta\alpha}\right\} f(x,y+\Delta y)\mathrm{d}x-\int_\alpha^\beta f(x,y)\mathrm{d}x=\\ &\int_\alpha^\beta[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]\mathrm{d}x+\int_\beta^{\beta+\Delta\beta} f(x,y+\Delta y)\mathrm{d}x-\\ &\int_\alpha^{\alpha+\Delta\alpha} f(x,y+\Delta y)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

将上式两端同除以 Δy，并对上式右端后面两个积分用中值定理，得

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta y}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}\mathrm{d}x+$$

$$f(\bar{\beta},y+\Delta y)\frac{\Delta\beta}{\Delta y}-f(\bar{\alpha},y+\Delta y)\frac{\Delta\alpha}{\Delta y}$$

式中，$\bar{\alpha}$ 在 α 与 $\alpha+\Delta\alpha$ 之间，$\bar{\beta}$ 在 β 与 $\beta+\Delta\beta$ 之间，由 $f(x,y)$ 的连续性及 $\alpha(y)$，$\beta(y)$ 在区间 $[c,d]$ 上可导性，得

$$\lim_{\Delta y\to 0}f(\bar{\beta},y+\Delta y)\frac{\Delta\beta}{\Delta y}=f(\beta(y),y)\beta'(y)$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}f(\bar{\alpha},y+\Delta y)\frac{\Delta\alpha}{\Delta y}=f(\alpha(y),y)\alpha'(y)$$

由性质 3 可得

$$\lim_{\Delta y\to 0}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}\mathrm{d}x=\int_{\alpha}^{\beta}f_y(x,y)\mathrm{d}x$$

所以

$$\varphi'(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}f_y(x,y)\mathrm{d}x+$$
$$f(\beta(y),y)\beta'(y)-f(\alpha(y),y)\alpha'(y)$$

证毕。

1.3　场论基础

场是现实世界中的物理量与空间和时间关系的一种表现形式，它是物质存在的一种形态。如果在空间中某个区域内的每一点，都对应着某物理量的一个确定的值，则在此空间区域内存在着该物理量的**场**。某物理量在场内的分布可表示为空间位置的函数，这样的函数称为该物理量的**点函数**。当然物理量在场内还可能随时间变化而变化，因而点函数还可以与时间有关。如果这个物理量具有数量的性质，该物理量所形成的场就称为**数量场**或**标**