线性代数

辅导与习题精解

高等学校数学辅导系列教材

哈尔滨工程大学应用数学系 编

哈尔滨工程大学出版社

高等学校数学系列教材

线性代数辅导与习题精解

哈尔滨工程大学应用数学系　编

哈尔滨工程大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数辅导与习题精解/哈尔滨工程大学应用数学系编.—哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2005
ISBN 7-81073-665-5

Ⅰ.线… Ⅱ.哈… Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 015549 号

内容简介

本书是配合哈尔滨工程大学应用数学系编写的《线性代数》教材而编写的线性代数辅导参考书。

本书内容有:学习辅导和练习,每章内容包括基本内容、典型例题、练习题和测验题及《线性代数》教材中精选习题精解;线性代数试题及其解答。

本书可作为理、工科和经济学科线性代数的辅导书,也可作为习题课教材,同时也可作为报考硕士研究生的数学复习资料。

哈尔滨工程大学出版社出版发行
哈尔滨市南通大街145号 哈尔滨工程大学11号楼
发行部电话(0451)82519328 邮编:150001
新华书店经销
肇东粮食印刷厂印刷

*

开本 850mm×1 168mm 1/32 印张 9 字数 223 千字
2005 年 2 月第 1 版 2005 年 2 月第 1 次印刷
印数:1—7 000 册
定价:12.00 元

前　言

《线性代数辅导与习题精解》是哈尔滨工程大学高等学校数学系列教材之一。线性代数是高等学校理、工科和经济学科的数学基础课程，也是硕士研究生入学考试必考科目。为了适应广大读者学习和复习的需要，我们编写了本书。

本书旨在帮助、指导广大读者把握线性代数的基本概念和基本解题方法，并在此基础上加深理解线性代数的内容，熟练掌握各种解题方法、技巧和规律，提高解题能力。

本书可作为高等学校理、工科和经济学科有关专业师生的线性代数参考书，亦可作为硕士研究生入学数学考试的复习参考资料。

全书由哈尔滨工程大学应用数学系于飞（第一章）、贾念念（第二章）、邱威（第三章）、陈林珠（第四、五章）、王锋（第一、二章精选习题精解）、卜长江（第三、四章精选习题精解）、沈艳（第五章精选习题精解）编写，试题部分由王锋编写，全书由王锋统稿。

本书的编写和出版工作得以顺利进行，是与哈尔滨工程大学应用数学系全体教师的大力支持和帮助分不开的，并得到了哈尔滨工程大学出版社的大力支持，在此一并表示衷心感谢。书中难免存在不妥之处，恳请读者多提宝贵意见。

编　者

2005 年 1 月

目　录

1 行列式

1.1 基本内容

1.1.1 n 阶行列式的定义

n 阶行列式是一个数,表示 $n!$ 项的代数和,即

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

$p_1 p_2 \cdots p_n$ 是自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,t 是这个排列的逆序数.

1.1.2 n 阶行列式的性质

1.行列式与其转置行列式相等.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 D' 为 D 的转置行列式 $D = D'$

2.互换行列式的两行(列),行列式变号.

3.行列式的某一行(列)所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

4.若行列式的某一行(列)的元素是两数之和,则这个行列式等于两个行列式之和.具体形式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

5.行列式的任一行(列)的元素乘以同一个数后,加到另一行(列)的对应元素上去,行列式的值不变.

1.1.3 行列式的计算

1.利用行列式定义中,行列式的每一项都来自不同行不同列的特点计算行列式.

2.利用性质计算行列式.

3.用行列式按行(列)展开:

(1)行列式中任一行(列)各元素与其代数余子式乘积之和等于此行列式之值,即

$$D = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

(2)行列式中任一行(列)各元素与另一行(列)各元素对应的

代数余子式乘积之和等于零.即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0 \quad (i \neq j) \quad 或 \quad D = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{jk} = 0 \quad (i \neq j)$$

行列式的计算是本章的重点.主要技巧一般采用以下几种:利用性质化行列式为三角形;计算 n 阶行列式时,一般要利用递推公式、数学归纳法、加边法等技巧.

1.1.4 Cramer 法则

Cramer 法则为解含 n 个未知数的 n 个方程的线性方程组提供了一种公式解法(在系数行列式的值不为零时).

如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

的系数行列式 D 不等于零,则方程组(1)有惟一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n = \frac{D_n}{D} \tag{2}$$

其中,$D_j(j = 1,2,\cdots,n)$是系数行列式 D 中第j列元素用方程组右端的自由项代替后得到的 n 阶行列式.

1.1.5 常见行列式

1.对角行列式(对角线上的元素是 λ_i,未写出的元素都是 0)

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

2.上三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

3.下三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

4.范德蒙(Vandermonde)行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$

其中记号“$\prod$”表示全体同类因子的乘积.

1.2 典型例题

例 1 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & x-1\\ 1 & -1 & x+1 & -1\\ 1 & x-1 & 1 & -1\\ x+1 & -1 & 1 & -1\end{vmatrix}$$

分析:可根据行列式性质进行计算,将各列加到第一列,提取因子,消元化简便可计算.

解 $D=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & x-1\\ 1 & -1 & x+1 & -1\\ 1 & x-1 & 1 & -1\\ x+1 & -1 & 1 & -1\end{vmatrix}$

$$\overset{\substack{c_2+c_1\\ c_3+c_1}}{\underset{c_4+c_1}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}x & -1 & 1 & x-1\\ x & -1 & x+1 & -1\\ x & x-1 & 1 & -1\\ x & -1 & 1 & -1\end{vmatrix}$$

$$=x\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & x-1\\ 1 & -1 & x+1 & -1\\ 1 & x-1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\end{vmatrix}$$

$$=x\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & x\\ 1 & 0 & x & 0\\ 1 & x & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=x^4$$

例 2 计算 $D=\begin{vmatrix}x_1+1 & x_1+2 & \cdots & x_1+n\\ x_2+1 & x_2+2 & \cdots & x_2+n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_n+1 & x_n+2 & \cdots & x_n+n\end{vmatrix}$.

解 当 $n=2$ 时,有

$$D=\begin{vmatrix}x_1+1 & x_1+2\\ x_2+1 & x_2+2\end{vmatrix}=x_1-x_2$$

当 $n > 2$ 时,将 D 的第一列乘 -1 后加到其余各列,则

$$D = \begin{vmatrix} x_1+1 & 1 & 2 & n-1 \\ x_2+1 & 1 & 2 & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n+1 & 1 & 2 & n-1 \end{vmatrix}$$

即 $D = 0$.

例 3 已知行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & -9 \\ 23 & 1 & 12 & 4 \\ -4 & 1 & 3 & 45 \\ 4 & 1 & 7 & 2 \end{vmatrix}$,求 $A_{14} + A_{24} + A_{34} + A_{44}$ 的值,其中 A_{ij} 为行列式 D_4 中元素 a_{ij} 的代数余子式.

解 如直接计算很麻烦且容易出错,所以不可取.由于

$$A_{14} + A_{24} + A_{34} + A_{44} = 1 \cdot A_{14} + 1 \cdot A_{24} + 1 \cdot A_{34} + 1 \cdot A_{44}$$

它是行列式 D_4 中第二列元素与第 4 列对应元素代数余子式的乘积之和,故由展开式定理得 $A_{14} + A_{24} + A_{34} + A_{44} = 0$.

例 4 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$.

解 将第二列的 $-1/2$ 倍,第三列的 $-1/3$ 倍,……,第 n 列的 $-1/n$ 倍都加到第一列上,则

$$D = \begin{vmatrix} 1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = n!(1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i})$$

例 5 已知 204,527,255 都能被 17 整除,试证明

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

能被 17 整除.

证明 给定的 3 个三位数,其各位数字恰分别为 D_3 的 3 个列的元素,为将 D_3 的第三行的 3 个元素分别化成 204,527,255,将 D_3 的第 1,2 行分别乘上 10^2,10,且都加到第三行,得到

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 204 & 527 & 255 \end{vmatrix}$$

由题设,17 能整除行列式的第三行,故 D_3 能被 17 整除.

例 6 计算 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix}$.

解 从第一行提出 1,第二行提出 2,$\cdots$ 第 n 行提出 n 得

$$D_n = n!\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & n & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}$$

此式为 n 阶范德蒙行列式,则

$$\begin{aligned} D_n &= n!(2-1)(3-1)\cdots(n-1)(3-2)\cdots \\ &\quad (n-2)\cdots[n-(n-1)] \\ &= n!(n-1)!\cdots 2!\cdot 1! \end{aligned}$$

例 7 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1^2+1 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2+1 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2+1 \end{vmatrix}$$

解

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1^2+1 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ 0 & x_2x_1 & x_2^2+1 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2+1 \end{vmatrix}$$（把原行列式加了一行，一列）

$$D_n \xlongequal[i=1,2,\cdots,n+1]{\text{第}i\text{行减第一行的}x_{i-1}\text{倍}} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -x_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -x_n & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n+1]{x_{i-1}c_i+c_1} \begin{vmatrix} 1+\sum_{j=1}^{n} x_j^2 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^{n} x_j^2$$

例 8 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} n & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ n & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 2 \\ n & n-1 & \cdots & 3 & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n-1 & \cdots & n-1 & n-1 & n-1 \\ n & n & \cdots & n & n & n \end{vmatrix}$$

解　将 $n-1$ 列的 -1 倍加到第 n 列，把第 $n-2$ 列的 -1 倍加到第 $n-1$ 列，以此类推，把第一列的 -1 倍加到第二列，可把原行列式化为

$$D_n = \begin{vmatrix} n & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 \\ n & -1 & \cdots & -1 & -1 & 0 \\ n & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(-1)^{n-1}n = (-1)^{\frac{(n-1)(n+2)}{2}}n$$

例 9　证明

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 + x \end{vmatrix}$$

$$= x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n (n \geqslant 2)$$

证明　将 D_n 按第一列展开得

$$D_n = x\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_2 & a_1 + x \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix}-1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ x & -1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & x & -1\end{vmatrix}$$

$$= a_n + xD_{n-1}$$

由此得递推公式 $D_n = a_n + xD_{n-1}$，利用此递推公式可得

$$\begin{aligned}D_n &= a_n + xD_{n-1} = a_n + x(a_{n-1} + xD_{n-2})\\ &= a_n + a_{n-1}x + x^2D_{n-2} = \cdots\\ &= a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1x^{n-1} + x^n\end{aligned}$$

例 10 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n\\ x & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1\\ x & x & 1 & 2 & \cdots & n-2\\ x & x & x & 1 & \cdots & n-3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ x & x & x & x & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

解 从第二行开始，逐行乘以 -1 加到上一行，得

$$D_n = \begin{vmatrix}1-x & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1-x & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ x & x & x & x & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

对列自右向左逐列相减，从 $n-1$ 列开始，依次把前一列乘 -1 加到后一列，得

$$D_n=\begin{vmatrix}1-x & x & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1-x & x & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1-x & x & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1-x & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ x & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x\end{vmatrix}$$

按第一列展开，得

$$D_n=(1-x)\begin{vmatrix}1-x & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1-x & x & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x\end{vmatrix}$$

$$+x(-1)^{n-1}\begin{vmatrix}x & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1-x & x & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1-x & x & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^n[(x-1)^n-x^n]$$

例 11 求 $f(x)=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n\\ 1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n\\ 1 & a_1 & x & \cdots & a_{n-1} & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & x\end{vmatrix}$ 的根.

解 第一行乘 -1 后加到其余各行，得