21世纪高等院校教材

大学数学教程

第二册：线性代数与空间解析几何

韩旭里 主编
刘伟俊 亢保元 杨文胜 编

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

大学数学教程

第二册：线性代数与空间解析几何

韩旭里　主编

刘伟俊　亢保元　杨文胜　编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是大学数学教程系列教材的第二册（线性代数与空间解析几何），内容包括矩阵与行列式、向量与向量空间、线性方程组、特征值与矩阵对角化、二次型与二次曲面、线性空间与线性变换、应用数学模型．本书体系新颖，结构严谨，内容丰富，叙述清晰，重点突出，难点分散，例题典型，重视对学生分析、推理、计算和应用数学能力的培养．

本书可作为高等学校理工科非数学专业本科生的高等数学教材或教学参考书，也可供科学研究与工程技术人员学习参考．

图书在版编目(CIP)数据

大学数学教程：第二册·线性代数与空间解析几何/韩旭里主编；刘伟俊等编．—北京：科学出版社，2004

21世纪高等院校教材

ISBN 7-03-013383-8

Ⅰ.大… Ⅱ.①韩… ②刘… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材

Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第044591号

责任编辑：李鹏奇/责任校对：陈丽珠

责任印制：安春生/封面设计：陈 敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004年8月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2004年8月第一次印刷 印张：10

印数：1—7 000 字数：186 000

定价：15.00元

大 学 数 学 教 程

韩旭里　主编

第一册　一元函数微积分与无穷级数
韩旭里　刘碧玉　李军英　编

第二册　线性代数与空间解析几何
刘伟俊　亢保元　杨文胜　编

第三册　多元函数微积分与常微分方程
秦宣云　刘旺梅　刘碧玉　编

第四册　概率论与数理统计
王家宝　陈亚力　裘亚峥　编

前　　言

大学数学课程是高等教育中最重要和最基础的课程之一，各高等院校都十分重视大学数学基础课程的教学. 为了适应科学技术进步的要求，培养高素质的人才，我们在各级教育主管部门的领导和支持下，进行了多年的大学数学教学改革实践. 我们进行教学改革的特点是，根据大学数学基础课程的内在联系，突破原有课程的界限，将微积分、线性代数、空间解析几何、概率论、数理统计、应用数学模型的内容有机结合，加强相互渗透，加强数学思想方法的教学，加强应用数学能力的培养，统一开设大学数学课程. 按照这种教学改革的思想，我们组织编写了一体化数学教材，并经过多年的教学实践，效果是让人满意的. 现在，我们在原教材的基础上，广泛吸取国内外知名大学的教学经验，并进一步改进，出版了这套系列教材.

本系列教材的目标定位是作为非数学类理工科大部分本科专业的数学基础课的教材，内容经选择也适用于对数学要求较高的其他各类有关专业的数学课程的教学. 本系列教材全部内容按大约260学时的教学计划编写. 对于学时安排较少的专业，可根据要求选择使用. 对全部教学内容，建议按三个学期整体安排.

本系列教材，在数学观点和思想方法上，全书贯穿集合、向量及映射的概念，体现局部线性化、离散化、逼近、最优化等思想. 在内容体系上，进一步理顺了内容之间的关系，整体优化，强调分析、代数、几何的有机结合. 对大学数学基础内容统一安排教学，既有利于学生对知识的理解与深化，又能使大学数学的基本内容在教学管理、教师选课和学生选课上，保持同等重要的地位. 在知识巩固和应用数学能力的培养上，除了精心选取例题和练习外，每册单独给出了与本册内容相关的应用数学模型一章，内容原则上只用到前面所学的知识，可以供相关章节中选讲，以培养学生的应用意识和提高学习兴趣，提高学生分析问题和解决问题的能力.

本系列教材是“湖南省普通高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”重点资助项目的研究成果的延续，得到了“湖南省高等教育21世纪课程教材”立项资助和“中南大学教育教改研究项目”的立项资助. 在此，向对本系列教材的编写与出版给予帮助和支持的同志表示衷心感谢.

由于编者水平有限，若有不妥与错误之处，恳请专家、同行和读者不吝指正.

编　者

2004年3月

目　　录

第 1 章　矩阵与行列式

矩阵与行列式是线性代数的一个最基本的内容,它是高等数学各个分支必不可少的工具,在其他学科分支(如物理学、力学、经济学等)也有广泛的应用. 本章主要介绍矩阵与行列式的定义、性质及其运算,为线性代数与空间解析几何的学习提供必要的基础知识.

1.1　矩阵及其运算

1.1.1　矩阵定义

在许多实际问题中,常常会遇到一些变量要用另外一些变量线性地表示,设变量 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 能用变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性地表示,即

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2, + \cdots + a_{mn}x_n, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

其中 a_{ij} 为常数($i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$),这种从变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的变换叫做线性变换,线性变换(1.1.1)式中的系数可以排成一个 m 行 n 列(横排叫行,纵排叫列)的数表:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

同样,含有 n 个未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 m 个线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

的系数 a_{ij} 也可以排成这样的数表. 这种形式的数表就叫做矩阵.

定义 1.1.1　由 $m\times n$ 个数 a_{ij}($i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$)排成的 m 行 n 列的数表

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1.2}$$

叫做 m 行 n 列矩阵，简称 $m\times n$ 矩阵. 这 $m\times n$ 个数叫做矩阵 A 的元素，a_{ij} 叫做矩阵 A 的第 i 行第 j 列元素. 元素都是实数的矩阵叫实矩阵，元素是复数的矩阵叫复矩阵. 除特别声明外，本书中的矩阵均指实矩阵.(1.1.2)式也可简记为

$$A=(a_{ij})_{m\times n} \quad \text{或} \quad A=(a_{ij}),$$

这里，下标 i 指明行序号，下标 j 指明列序号. 矩阵通常用大写英文字母 A,B,C 等表示，$m\times n$ 矩阵也记作 $A_{m\times n}$，只由一行元素组成的 $1\times n$ 矩阵叫做行矩阵，形如

$$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n).$$

只由一列元素组成的 $m\times 1$ 矩阵叫做列矩阵，形如

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

行矩阵和列矩阵又常常分别叫做行向量和列向量. 如果 $m=n$，则称 A 为 n 阶方阵或 n 阶矩阵，例如：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{是 } 4\times 3 \text{ 矩阵，} B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{是 3 阶方阵，} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{是列向量，}$$

$(1\quad 0\quad 1\quad 1)$是行向量.

如果两个矩阵的行数相等，列数也相等，则称它们是同型矩阵. 如果 $A=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{ij})$ 是同型矩阵，并且它们的对应元素相等，即

$$a_{ij}=b_{ij}\ \ (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),$$

那么称矩阵 A 与矩阵 B 相等，记作 $A=B$.

元素都是零的矩阵称为零矩阵，记作 0. 注意不同型的零矩阵是不同的.

对方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

而言，元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 组成主对角线，而元素 $a_{1n},a_{2,n-1},\cdots,a_{n1}$ 组成次对角线．除了主对角线元素外，其他元素全为零的方阵，即形如

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

的方阵称为对角阵，并且记作 $A=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$．如果 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n$，那么矩阵就称为纯量矩阵．当 $\lambda=1$，纯量矩阵就称为单位阵或单位矩阵，并且记作

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

形如

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_{11} & 0 & \cdots & 0\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}$$

的方阵，分别称为上三角形矩阵与下三角形矩阵，简称上三角阵与下三角阵．

矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

称为阶梯形矩阵，其中数 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{rr}$ 中还可能有零．确切地说，阶梯形矩阵的每行形成一级“阶梯”，满足下列两个条件：

(1) A 中若有零行（元素全为零的行），那么说明以下的行（如果有的话）就全是零行；

(2) 非零行中左起第一个不为零的元素的位置按行从上到下往右移动，例如

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

都是阶梯形矩阵,而

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

均不是阶梯形矩阵.

1.1.2　矩阵的运算

(1) 矩阵的加(减)法

定义 1.1.2　设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$,$B=(b_{ij})_{m\times n}$是两个同型矩阵.它们的和指的是矩阵$(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$,记为

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}.$$

称为矩阵的加法.

应该注意,只有当两个矩阵是同型矩阵时,它们才能进行加法运算.

设 A,B,C 都是 $m\times n$ 矩阵,$O=O_{m\times n}$,则矩阵加法满足以下运算规律:

(i) $A+O=A$;

(ii) $A+B=B+A$;

(iii) $(A+B)+C=A+(B+C)$.

若矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$,记

$$-A=(-a_{ij})_{m\times n}.$$

称 $-A$ 为 A 的负矩阵,这里有

(iv) $A+(-A)=O$.

由此,矩阵的减法定义为 $A-B=A+(-B)$.

(2) 数与矩阵相乘

定义 1.1.3　数 λ 与矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$的乘积记为 $A\lambda$ 或 λA,规定为

$$\lambda A=A\lambda=(\lambda a_{ij})_{m\times n},$$

称为矩阵的数量乘积,简称数乘.

设 A,B 为 $m\times n$ 矩阵,λ,μ 为数,则数乘矩阵满足下列运算规律

(i) $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$;

(ii) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$;

(iii) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.

矩阵的加法与数乘,统称为矩阵的线性运算.

例 1.1.1 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}5 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 0\\ 2 & 8 & 1\end{pmatrix},$$

则

$$\begin{aligned}3A+(-2B)&=\begin{pmatrix}3\times 5 & 3\times 2 & 3\times(-1)\\ 3\times 3 & 3\times 0 & 3\times 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}(-2)\times(-1) & (-2)\times 4 & (-2)\times 0\\ (-2)\times 2 & (-2)\times 8 & (-2)\times 1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}15 & 6 & -3\\ 9 & 0 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -8 & 0\\ -4 & -16 & -2\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}17 & -2 & -3\\ 5 & -16 & 4\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

1.1.3 矩阵的乘法

矩阵的数乘和加法的定义比较自然,它们的运算规律和数的乘法运算规律比较类似,因而容易接受.下面引入矩阵的乘法,这种运算初看起来会显得有些不自然,不易接受,但以后就会看到这种定义的内在背景,它正是某类事物规律的反映.

定义 1.1.4 设 $A=(a_{ij})_{m\times s}$是一个 $m\times s$ 矩阵,$B=(b_{ij})_{s\times n}$是一个 $s\times n$ 矩阵,则规定矩阵 A 与矩阵 B 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵 $C=(c_{ij})_{m\times n}$,其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+b_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$
$$(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),$$

并将此乘积记为 $AB=C$.

注意,只有当左边矩阵的列数等于右边矩阵的行数时,两个矩阵才能相乘.

由定义 1.1.4 可知,行矩阵 $A_{1\times s}$与列矩阵 $B_{s\times 1}$的乘积是一个 1 阶方阵,即一个数

$$(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{is})\begin{pmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{sj}\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}=c_{ij}.$$

这表明乘积 $AB=C$ 的第i 行第j 列元素c_{ij}就是A 的第i 行元素与B 的第j 列相应元素乘积之和.

例 1.1.2 设

$$A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},\quad B=(b_1,b_2,\cdots,b_n),$$

求 AB,BA.

解

$$AB=\begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n\end{pmatrix},$$

$$BA=(b_1a_1+b_2a_2+\cdots,b_na_n)_{1\times1}.$$

例 1.1.3　设

$$A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2&0\\0&-2\end{pmatrix},$$

求 AB,AC 及 BA.

解

$$AB=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\-2&-2\end{pmatrix},$$

$$AC=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\-2&-2\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

从上面例题可以看出矩阵乘法和我们熟悉的数的乘法运算规律有许多不同之处.

(1) 矩阵乘法交换律不成立,即不是对所有矩阵 A,B 都有 $AB=BA$.

(2) 存在矩阵 $A\neq0,B\neq0$,使得 $AB=0$,这表明若 $AB=0$,则不能推出 $A=0$ 或 $B=0$.

(3) 消去律不成立,即由 $A\neq0,AB=AC$,不能导出 $B=C$(例 1.1.3).

例 1.1.4　设

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix},$$

试确定所有与 A 乘法可交换的矩阵,即求满足条件 $AX=XA$ 的矩阵 X.

解　由题设 AX,XA 均有意义,但 X 应是 2×2 矩阵.设

$$X=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}.$$

由 $AX=XA$ 得

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ -x_{11} & -x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{11}-x_{12} & 0\\ x_{21}-x_{22} & 0\end{pmatrix},$$

由矩阵相等的定义知

$$\begin{cases}x_{11}=x_{11}-x_{22},\\ x_{12}=0,\\ -x_{11}=x_{21}-x_{22},\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x_{12}=0,\\ x_{11}=x_{22}-x_{21}.\end{cases}$$

于是所有与 A 乘法可交换的矩阵为

$$\begin{pmatrix}x_{22}-x_{21} & 0\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix},$$

其中 x_{21},x_{22}为任意常数.

虽然矩阵乘法与数的乘法有不同的地方,不过,矩阵乘法仍满足下列运算规律(假设运算都是可行的):

(i) $AE=EA=A$, $AO=OA=O$;

(ii) $(AB)C=A(BC)$;

(iii) $A(B+C)=AB+AC$, $(B+C)A=BA+CA$;

(iv) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$($\lambda$ 是数).

有了矩阵的乘法,我们可以定义方阵的幂.

定义 1.1.5 设 A 是 n 阶方阵,则规定

$$A^0=E,\quad A^1=A,\quad A^2=A\cdot A,\cdots,A^{k+1}=A^k\cdot A,$$

其中 k 为正整数或零,即 A^k 是 k 个 A 的连乘,称为 A 的 k 次幂.

容易看出,方阵的幂满足以下运算规律:

$$A^k\cdot A^l=A^{k+1},\quad (A^k)^l=A^{kl},$$

其中 k,l 为正整数,因为矩阵乘法不满足交换律,所以,一般地,$(AB)^k\neq A^kB^k$.

设 $f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$,系数 $a_0,a_1,\cdots,a_m$ 均为常数,A 为 n 阶方阵,那么

$$a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0E$$

有意义,它仍为 n 阶方阵,记为 $f(A)$,即

$$f(A) = a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E,$$

称它为 A 的矩阵多项式.

例 1.1.5　求证

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

证　用数学归纳法,当 $n=1$ 时,等式显然成立.设 $n=k$ 时成立,即设

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}.$$

要证 $n=k+1$ 时,等式也成立.因为

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{k+1} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^k \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos k\theta \cdot \cos\theta - \sin k\theta \sin\theta & -\cos k\theta \sin\theta - \sin k\theta \cos\theta \\ \sin k\theta \cos\theta + \cos k\theta \sin\theta & -\sin k\theta \sin\theta + \cos k\theta \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(k+1)\theta & -\sin(k+1)\theta \\ \sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

所以等式成立.

例 1.1.6　设 $f(x)=x^2-2x-3, A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, 求 $f(A)$.

解

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 9 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
f(A) &= A^2 - 2A - 3E \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

1.1.4　矩阵的转置

定义 1.1.6　把矩阵 A 的行换成同序号的列所得到的矩阵,称为 A 的转置矩阵,记作 A'或A^T,即若

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m\times n},$$

则

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{n\times m}.$$

矩阵的转置也是矩阵的一种运算,满足下列运算规则:

(i) $(A')' = A$;

(ii) $(A+B)' = A' + B'$;

(iii) $(\lambda A)' = \lambda A'$;

(iv) $(AB)' = B'A'$.

(i),(ii),(iii)显然成立,下面证明(iv).

设 $A = (a_{ij})_{m\times s}$, $B = (b_{ij})_{s\times n}$,记 $AB = C = (c_{ij})_{m\times n}$, $B'A' = D = (d_{ij})_{n\times m}$,于是有$(AB)' = C' = (c_{ji})_{n\times m}$,其中

$$c_{ji} = a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{js}b_{si} = \sum_{k=1}^{s} a_{jk}b_{ki}.$$

$\lambda B'$的第 i 行为$(b_{1i}, b_{2i}, \cdots, b_{si})$, A'的第 j 列为$(a_{j1}, a_{j2}, \cdots, a_{js})$.故

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{s} b_{ki}a_{jk} = \sum_{k=1}^{s} a_{jk}b_{ki} = c_{ji}.$$

所以 $D = C'$,即 $B'A' = (AB)'$.

设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$为 n 阶方阵,如果 $A = A'$,即 $a_{ij} = a_{ji}$ $(i,j = 1,2,\cdots,n)$,则 A 称为对称(矩)阵;如果 $A' = -A$,即 $a_{ji} = -a_{ij}$ $(i,j = 1,2,\cdots,n)$,则 A 称为反对称(矩)阵.

例 1.1.7 证明任何 n 阶方阵均能表示为一个对称矩阵和一个反对称矩阵之和.

证 注意到 $A + A'$是对称矩阵,$A - A'$是反对称矩阵,而 $A = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A')$.因此结论成立.

1.1.5 共轭矩阵

设 a_{ij}为复数,$\overline{a_{ij}}$为a_{ij}的共轭复数,则 $A = (a_{ij})$和 $\bar{A} = (\overline{a_{ij}})$为复矩阵,称 $\bar{A}$ 为 A 的共轭矩阵.对复矩阵 A, B 及复数λ,共轭运算满足(假设运算都是可行的):

(i) $\overline{A+B} = \bar{A} + \bar{B}$;

(ii) $\overline{\lambda A} = \bar{\lambda}\,\bar{A}$;

(iii) $\overline{AB} = \bar{A}\,\bar{B}$;

(iv) $\overline{A'} = \bar{A}'$.

1.2 行　列　式

1.2.1　线性映射与置换

定义 1.2.1　设 $f:P\to R$ 是一个映射，这里 P 是一个集合，R 是一数域，说 f 是线性的，如果

1. $f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta),\alpha,\beta\in P$;
2. $f(\lambda\alpha)=\lambda f(\alpha),\lambda\in R,\alpha\in P$.

例 1.2.1　设 P 是 n 阶方阵的全体，则映射 $\mathrm{Tr}:A\to\mathrm{Tr}A$ 是 P 到 R 的一个线性映射，这里 $\mathrm{Tr}A$ 表示矩阵 A 的迹(A 的主对角线元素之和).

例 1.2.2　考察实数域 R 中元素的 n 数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$所构成的集合 R^n，映射

$$f:R^n\to R,$$
$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\to x_1-x_n$$

是线性的.

定义 1.2.2　设 $\Omega=\{1,2,\cdots,n\}$，我们称 Ω 上的 1-1 映射为 Ω 上的置换. Ω 上的全体置换所成的集合用 S_n 表示.

显然，S_n 中恰含有 $n!$ 个元素.

定义 1.2.3　称元素 $\sigma\in S_n$ 为对换，如果对 $i\neq j$，有 $\sigma(i)=j$ 且$\sigma(j)=i$，而且对所有其他的 $k\in\{1,\cdots,n\}$，有 $\sigma(k)=k$. 我们记 S_n 中的这个元素为(i,j).

显然，$(i,j)=(j,i)$且$(i,j)\cdot(i,j)=1$(Ω 上的恒等映射).

定理 1.2.4　每个置换 $\sigma\in S_n(n\geqslant 2)$可表为个数$\leqslant n$ 的对换的乘积. 对 $\sigma\neq 1$(恒等映射)，只需$\leqslant n-1$ 个对换.

证　对 $\sigma=1$，有 $\sigma=(1,2)(1,2)$. 设 $\sigma\neq 1$，于是存在一个最小的 i_1，使得 $\sigma(i_1)=j_1\neq i_1$. 令 $\sigma\cdot(i_1,j_1)=\sigma_1$，对 $i\leqslant i_1$，有 $\sigma_1(i)=i$. 当 $\sigma_1=1$ 时，我们已证. 否则就存在一个最小的 i_2，使得 $\sigma_1(i_2)=j_2\neq i_2$. 令 $\sigma_1\cdot(i_2,j_2)=\sigma_2$，对 $i\leqslant i_2$，有 $\sigma_2(i)=i$. 于是一直这样做下去，总能得到一个 σ_k，$k\leqslant n-1$，使得对 $i<n$，有 $\sigma_k(i)=i$. 于是 $\sigma_k=1$. 于是

$$\sigma=(i_k,j_k)\cdots(i_1,j_1).$$

定义 1.2.5　设 $\sigma\in S_n$，$n\geqslant 2$，称偶(i,j)，$1\leqslant i<j\leqslant n$ 是 σ 的逆置，如果 $\sigma(i)>\sigma(j)$. 定义符号

$$\varepsilon(\sigma)=\prod_{i<j}\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}\in\{+1,-1\}.$$

根据 $\varepsilon(\sigma)=+1$ 或 -1，我们称 σ 为偶置换或奇置换，对 $n=1$，令 $\varepsilon(\sigma)=1$.

注意，对任意 $i<j$，定义 1.2.5 中分式中分子总存在 $j-i$ 或 $-(j-i)$，因此