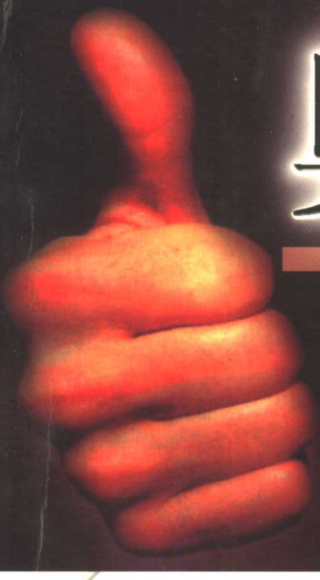

奥林匹克

小学数学解题思路

主编：王超群

六年级

湖北武汉市／黄冈地区特高级教师 编写

小学数学奥林匹克

解题思路

（六年级）

主　编：王超群
副主编：梅　林　吴天寿

新疆青少年出版社

责任编辑：金　锐
责任校对：梅　琳

小学数学奥林匹克解题思路(六年级)

王超群　主编

新疆青少年出版社出版发行
（乌鲁木齐胜利路100号　邮编830001）
武汉市佳汇印务有限公司印刷
880×1230毫米　32开　7.5印张　140千字
2000年7月第1版　2000年7月第1次印刷
印数：1—10000册

ISBN7－5371－3330－1/G·1519
全套定价：35.20元（分册定价：8.80元）

前 言

近几年来,小学数学竞赛活动十分活跃。一年一届的小学数学奥林匹克竞赛使各年级小学生学习数学的兴趣越来越浓。随着竞赛活动不断开展和深入,广大教师、学生和家长都希望有一套与之配套的参考资料。

为适应需要,我们以小学数学教学大纲与竞赛考纲为依据,参照近年来国内外小学数学竞赛的动向和趋势,组织编写成这套书。

这套书在内容的安排上,与现行教材同步,由浅入深、通俗易懂揭示解题规律。在例题的安排上注意典型引路,举一反三,以帮助学生扩展知识视野,掌握解题方法,逐步完善解题思路。每个专题后面都配有适量的练习题及综合自测题,六年级还附有竞赛模拟题,并都附有参考答案。

本套书由多年从事小学数学竞赛辅导的有丰富实践经验的老师编写。

由于水平有限,加之时间仓促,书中不妥或错误之处恳请读者不吝赐教。

编　者

目　　录

一　巧算妙解

四则运算是小学数学的重要组成部分，也是数学竞赛的重要内容之一。

学生在进行计算时既有知识要求又有能力培养。定律、性质、法则是学生进行计算的依据。要使计算快速、准确，关键在于掌握运算技巧。对算式进行认真观察，剖析算式的特点及各数之间的关系，巧妙地、灵活地运用运算定律，改变运算程序，使计算简便易行，既快又准。这对开拓知识、启迪思维，培养学生综合分析、推理能力，灵活、快速、准确的运算能力，使知识能得到协调地发展，都有很大的帮助。

大家都非常熟悉德国著名数学家高斯，他在十岁时，巧算出了前 100 个自然数之和的故事吧！从某种意义上说，计算方法的巧妙，在一定程度反映一个人智商的高低。本讲就此问题给同学们提供一些帮助，愿你能较好地掌握巧算妙解的方法。

1. 运用定律、性质、法则进行简算

运算定律与性质是进行运算的依据，合理、灵活地运用运算定律会使运算简单得多。

例 1　$4.5 \div 8 \div 125 = 4.5 \div (8 \times 125) = 0.0045$

根据除法与减法类似的性质，连除可以变成乘了再除。

例 2　$102 \times 9.9 - 0.25 \times 9.9 \times 4$

【分析与解】 这里应综合运用乘法的交换律、结合律及分配律。

$$\begin{aligned}
&102\times9.9-0.25\times9.9\times4\\
=&102\times9.9-0.25\times4\times9.9\\
=&102\times9.9-9.9\\
=&9.9\times(102-1)\\
=&9.9\times(100+1)\\
=&990+9.9\\
=&999.9
\end{aligned}$$

例 3 $\underbrace{1.25\times1.25\times\cdots\cdots\times1.25}_{1994个1.25}\times\underbrace{0.8\times\cdots\cdots\times0.8}_{1993个0.8}$

【分析与解】 这里必须注意到 $1.25\times0.8=1$，因此适当拆、拼，就可以简算。

$$\begin{aligned}
&\underbrace{1.25\times1.25\times\cdots\cdots\times1.25}_{1994个1.25}\times\underbrace{0.8\times0.8\times\cdots\cdots\times0.8}_{1993个0.8}\\
=&\underbrace{(1.25\times0.8)\times(1.25\times0.8)\times\cdots\cdots\times(1.25\times0.8)}_{1994个(1.25\times0.8)}\div0.8\\
=&\underbrace{1\times1\times\cdots\cdots\times1}_{1994个1}\div0.8\\
=&1.25
\end{aligned}$$

想一想 上面的例题除了这样拆拼，还有无别的方法，试试看。

例 4 $1.38\times3.5+5.4\times1.38+8.9\times8.62$

【分析与解】 此题乍看似乎只有前一部分可以简算，不妨先分组，试试看。

$$\begin{aligned}
&1.38\times3.5+5.4\times1.38+8.9\times8.62\\
=&1.38\times(3.5+5.4)+8.9\times8.62\\
=&1.38\times8.9+8.9\times8.62
\end{aligned}$$

$=8.9\times(1.38+8.62)$

$=89$

恰当分组,再连续运用运算定律,就是上题的解答方法。

在进行简便运算时,根据题目的具体特点,采取相应策略,恰当变式,可以达到简单的目的。

例 5　$0.16\times160+4\times3.6$

【分析与解】　从表面上看,本题似乎没有简算方法,但如果将下式变形为:

$0.16\times160+4\times3.6$

$=6.4\times4+4\times3.6$

$=4\times(6.4+3.6)$

$=40$

你知道这种变形的根据是什么?

练一练　$43.2\times9.867+0.432\times13.3$

合理地拼、拆数字也是简算中常用的小窍门。

例 6　$8.3\times64+1.7\times65$

【分析与解】　合理想象将 1.7×65 拆成 $1.7\times64+1.7$

$8.3\times64+1.7\times65$

$=8.3\times64+1.7\times64+1.7$

$=(8.3+1.7)\times64+1.7$

$=641.7$

2. 仔细观察、发现规律、难题妙解

有些计算题,粗略一看,似乎很难下手,但如果仔细观察,就能发现规律,运用运算律,使难题化简,巧妙解答。

例 1　$1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{10}$

【分析与解】 这道题如果靠硬算，虽然可解答，但却非常麻烦。有什么巧妙的算法吗？

观察 $1+1=2^1\quad 2+2=2^2\quad 2^2+2^2=2^3$

猜想 $2^3+2^3=2^4$ 对吗？因为 $2^3=8\quad 8+8=16=2^4$

故 $\quad 1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{10}$

$=(1+1)+2+2^2+\cdots\cdots+2^{10}-1$

$=2^{11}-1=2048-1$

$=2047$

例 2 $\quad(1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+2000^3)\div(2000\times2001)$

【分析与解】 仍用上例方法处理：

计算 $1^3+2^3=(1+2)^2=9\quad\therefore 1^3+2^3=(1+2)^2$

$1^3+2^3+3^3=1+8+27=36,(1+2+3)^2=36$

$\therefore 1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2$

猜想 $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=(1+2+3+4+5)^2$

验证 $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=1+8+27+64+125=225$

$(1+2+3+4+5)^2=15^2=225$

规律 $(1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+\cdots\cdots+2000^3)=(1+2+\cdots\cdots+2000)^2$

巧算 $(1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+\cdots\cdots2000^3)\div(2000\times2001)$

$=(1+2+3+\cdots\cdots+2000)^2\div(2000\times2001)$

$=\dfrac{(1+2000)\times2000}{2}\times\dfrac{(1+2000)\times2000}{2}\times\dfrac{1}{2000\times2001}$

$=1000500$

例 3 $\quad\dfrac{\overbrace{99\cdots\cdots9}^{9个9}\times\overbrace{99\cdots\cdots9}^{9个9}}{1+2+3+4+5+6+7+8+9+8+7+\cdots\cdots+1}$

$$=\frac{9\times\overbrace{11\times\cdots\cdots1}^{9个1}\times9\times\overbrace{11\times\cdots\cdots1}^{9个1}}{9\times9}$$

$$=\overbrace{11\cdots\cdots1}^{9个1}\times\overbrace{11\cdots\cdots1}^{9个1}$$

因 $1\times1=1\quad 11\times11=121\quad 111\times111=12321$

故原式 $=12345678987654321$

例 4　求 $\frac{3^2+1}{3^2-1}+\frac{5^2+1}{5^2-1}+\frac{7^2+1}{7^2-1}+\cdots\cdots+\frac{1993^2+1}{1993^2-1}$

【分析与解】 本题如不采用巧算的方法，是难以得到计算结果的。那么如何巧算呢？我们不妨寻找每一个加数的规律及它们之间的联系。

$$\frac{3^2+1}{3^2-1}=\frac{5}{4}=1+\frac{1}{4}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$$

$$\frac{5^2+1}{5^2-1}=\frac{13}{12}=1+\frac{1}{12}=1+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}$$

$$\frac{7^2+1}{7^2-1}=\frac{25}{24}=1+\frac{1}{24}=1+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}$$

……

$$\frac{1993^2+1}{1993^2-1}=1+\frac{1}{1992}-\frac{1}{1994}$$

故 $\frac{3^2+1}{3^2-1}+\frac{5^2+1}{5^2-1}+\frac{7^2+1}{7^2-1}+\cdots\cdots+\frac{1993^2+1}{1993^2-1}$

$$=(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(1+\frac{1}{4}-\frac{1}{6})+\cdots\cdots+(1+\frac{1}{1990}-\frac{1}{1992})+(1+\frac{1}{1992}-\frac{1}{1994})$$

$$=1\times996+(\frac{1}{2}-\frac{1}{1994})$$

$$=996\frac{498}{997}$$

(1)这里必须注意的是：

$$\frac{(2n+1)^2+1}{(2n+1)^2-1}=1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}$$

(2)**想一想** 996是如何推算出来的？

上述解题的方法贵在一个巧字。巧就巧在先把一般问题缩小为特殊问题，以小见大，以少见多，以简取繁，找到规律以后，再解原题就不难了。

3. 估算的巧用

估算是运用各种计算技巧所进行的快速近似计算。估算不仅在日常生活中有着广泛的应用，而且有助于提高检验计算结果正确率的技能，在各级数学竞赛中也经常有估算方面的试题。

例1 $8+8.1+8.2+8.3+8.4+8.5+8.6+8.7+8.8+8.9$的值为( )

A.74.5 B.84.5 C.94.5 D.90.5 E.92.5

【分析与解】 思路1：由于乘法是求相同加数和的简便运算，故可将加法转化为乘法，观察上面的十个数：

8.5位于中间，故$8.5\times10=85$，那么在五个可选择的答案中84.5最接近85，所以

$8+8.1+8.2+8.3+8.4+8.5+8.6+8.7+8.8+8.9=84.5$

思路2 我们不妨先估算一下10个数之和的取值范围：在上述10个数中8最小，8.9最大，那么和定在80－89之间，

答案中只有 84.5 在此范围内。

这种放一放,缩一缩的方法在估算中经常用到。

例 2 $(\frac{1}{2}+\frac{4}{4389})+(\frac{1}{2}+\frac{4}{4289}\times 2)+\cdots\cdots+(\frac{1}{2}+\frac{4}{4389}\times 1994)$的值最接近哪个整数?

【分析与解】 为了便于估算,不妨将算式重新分组为:

$$原式=(\frac{1}{2}+\frac{4}{4389})+(\frac{1}{2}+\frac{4}{4289}\times 2)+\cdots\cdots+(\frac{1}{2}+\frac{4}{4389}\times 1994)$$

$$=\frac{1}{2}\times 1994+\frac{4}{4389}\times(1+2+3+\cdots\cdots+1994)$$

$$=997+\frac{4}{3\times 7\times 19\times 11}\times\frac{3\times 7\times 19\times 5\times 1994}{2}$$

(注:$3\times 7\times 19\times 5=1995$)

$$=997+\frac{19940}{11}$$

$$=997+1812\frac{8}{11}$$

$$=2809\frac{8}{11}>2809\frac{5.5}{11}$$

所以最接近整数为 2810

例 3 求 $S=(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11})\times 1001$ 的整数部分。

【分析与解】 该题采用直接通分再求值方法也可求出 S 的整数部分。但若将原式适当变形,然后采用估值法则简单得多。

因为 $1001=11\times 7\times 13,\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=1+\frac{1}{30}$

所以 $S=(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11})\times 1001$

$$=(1+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{30})\times 11\times 7\times 13$$

$$=1001+143+91+\frac{1}{30}\times 11\times 7\times 13$$

又因为 $\frac{1}{30}\times 11\times 7\times 13=\frac{1}{30}\times 1200-\frac{1}{30}\times 199$

$$=40-6\frac{19}{30}$$

故 $S=1001+143+91+40-6\frac{19}{30}$

$$=1268\frac{11}{30}$$

所以 S 的整数部分是 1268。

在估算一些较复杂的分数的和时,往往采用放一放,缩一缩的方法。下面举例说明:

例 4 $\square<\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{10}<\square$

在□中应填哪两个相邻的整数

【分析与解】 因为 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$

所以 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{10}$

$$=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$$

$$=1+\frac{3}{8}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$$

$$=1+\frac{3}{8}+\frac{3}{10}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}$$

显然,$1+\frac{3}{8}+\frac{3}{10}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}<1+\frac{3}{8}+\frac{3}{10}+\frac{1}{8}+\frac{1}{5}$

想一想 ①为什么将$\frac{1}{7}$、$\frac{1}{9}$分别换为$\frac{1}{5}$和$\frac{1}{8}$?

②左边为什么小于右边？

$$而\ 1+\frac{3}{8}+\frac{3}{10}+\frac{1}{8}+\frac{1}{5}=1+(\frac{1}{8}+\frac{3}{8})+(\frac{3}{10}+\frac{1}{5})$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

$$=2$$

所以在□中分别填入 1 和 2。

例 5　已知 $S=\dfrac{1}{\frac{1}{1990}+\frac{1}{1991}+\frac{1}{1992}+\cdots\cdots+\frac{1}{1999}}$，那么 S 的整数部分为多少？

【分析与解】 不妨将繁分数分母中的 10 个小分数全部视为$\frac{1}{1990}$。(**想一想**　是将繁分数值扩大了还是缩小了)？

那么 $S=\dfrac{1}{\frac{1}{1990}\times 10}=199$

同理将 11 个小分数全部视为$\frac{1}{1999}$

则　$S=\dfrac{1}{\frac{1}{1999}\times 10}=199\frac{9}{10}$

故 $199<S<199\frac{9}{10}$故 S 的整数部分为 199。

例 6　$A=\dfrac{12\times67+13\times68+14\times69+15\times70+16\times71}{12\times66+13\times67+14\times68+15\times69+16\times70}\times100$

求 A 的整数部分。

【分析与解】 将 A 变形为：

$$A=\frac{12\times66+13\times67+14\times68+15\times69+16\times70+(12+13+14+15+16)}{12\times66+13\times67+14\times68+15\times69+16\times70}\times100$$

$$=(1+\frac{12+13+14+15+16}{12\times66+13\times67+14\times68+15\times69+16\times70})\times100$$

小学数学奥林匹克解题思路

而$\frac{12+13+14+15+16}{12\times66+13\times67+14\times68+15\times69+16\times70}<$

$\frac{12+13+14+15+16}{(12+13+14+15+16)\times66}$

即 $\frac{12+13+14+15+16}{12\times66+13\times67+14\times68+15\times69+16\times70}<\frac{1}{66}$

又 $\frac{12+13+14+15+16}{12\times66+13\times67+14\times68+15\times69+16\times70}>\frac{1}{70}$

故有 $(1+\frac{1}{70})\times100<$

$(1+\frac{12+13+14+15+16}{12\times66+13\times67+14\times68+15\times69+16\times70})\times100<(1+\frac{1}{66})\times100$

化简为 $101\frac{3}{7}<A<101\frac{17}{33}$

所以A的整数部分为101。

例7 设有两整数A、B且$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}=\frac{1}{5}(A\neq B)$,试求A+B。

【分析与解】 因为$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{1}{5}$,故A>5,B>5且A、B不可能都大于10,故设A<10,则A是5与10之间的整数,即5<A<10。那么A只可能为6、7、8、9。当A=6时,B=30;当A=7、8、9时,B均无整数解。故A=6,B=30。

同样可设5<B<10解得B=6,A=30

故 A+B=30+6=36

例8 在$1、\frac{1}{2}、\frac{1}{3}……\frac{1}{99}、\frac{1}{100}$中选出若干个数,使得它们的和大于3,至少要选多少个数?

【分析与解】 要使选得的个数尽可能地少,则选出的数应考虑尽可能地大,所以应从头开始挑选。

因为 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$

所以 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=2+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$

又因为 $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=0.45$

故 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=2.45<3$

而 $\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}=0.478\cdots\cdots,\frac{1}{11}=0.\dot{0}\dot{9}$

故 $2.45+0.478+\cdots\cdots+0.\dot{0}\dot{9}>3$

即 至少应选 11 个数。

练　习

1. $8.5\div0.4\div2.5$

2. $102\times9.8-0.125\times98\times0.8$

3. $\underbrace{2.5\times2.5\times\cdots\cdots\times2.5}_{2000\text{个}2.5}\times\underbrace{0.4\times0.4\times\cdots\cdots\times0.4}_{2001\text{个}0.4}$

4. $5.42\times4.8+7.2\times5.42-54.2\times0.2$

5. $3.6-\frac{180+543\times374}{543\times375-363}$

6. $\frac{1994}{1994^2-1993\times1995}+6$

7. $\frac{1994\times200020002000}{2000\times199419941994}-\frac{1}{2000}$

8. $(1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+1994^3)\div(1994\times1995)$

9. $\frac{7^2+1}{7^2-1}+\frac{9^2+1}{9^2-1}+\frac{11^2+1}{11^2-1}+\cdots\cdots+\frac{99^2+1}{99^2-1}$

10. $1994\times56.87+1994\times43.48+60\times10.035$

11. 设 a,b 是不同的四位数,c 是一个五位数,且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$