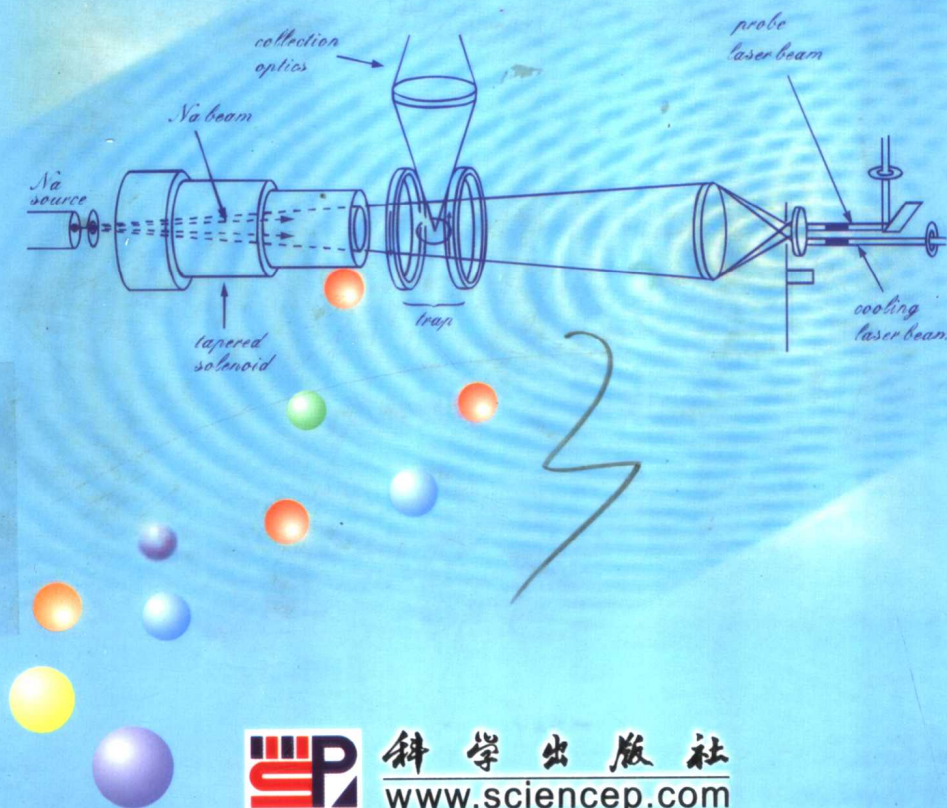


21世纪高等院校教材

理论物理学导论 第二卷

电动力学

汪德新 编著



科学出版社

www.sciencep.com

21 世纪高等院校教材

理论物理学导论 第二卷

电 动 力 学

汪德新 编著



科学出版社

北京

内 容 简 介

本书着重阐述电动力学的基本概念、基本规律和基本方法。全书共分六篇十五章,分别介绍电磁现象的普遍规律、稳恒电磁场、电磁波的传播、狭义相对论与相对论物理学、电磁波的辐射、电磁场与物质的相互作用。书末还附有矢量分析及张量计算初步等9个附录。本书力图反映电动力学近代的一些研究进展,介绍了光子扫描隧道显微镜、等离子体、光波导、穆斯堡尔效应、横向多普勒效应与引力红移、超导电性、原子的激光冷却与捕获等近代研究内容。为了通过典型问题来印证和巩固对基本概念和原理的理解,本书提供了丰富的例题,并给出200多道习题的答案和100多道习题的提示。

本书以“深入浅出,学以致用”为宗旨,可用作物理系本科生的教材和教学参考书,也可供相关领域的读者使用。

图书在版编目(CIP)数据

理论物理学导论.第二卷,电动力学/汪德新编著.一北京:科学出版社,2005

(21世纪高等院校教材)

ISBN 7-03-014984-X

I.理… II.汪… III.①理论物理学-高等学校-教材②电动力学-高等学校-教材 IV.O41

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第009280号

责任编辑:冯贵层

责任印制:高 嵘/封面设计:李梦佳

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

湖北京山德新印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005年1月第一版 开本:720×1000 1/16

2005年1月第一次印刷 印张:28 3/4

印数:1~5 000 字数:565 000

定价:32.80元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

电动力学是研究电磁现象的经典动力学理论,它主要研究电磁场的基本性质和运动规律,以及电磁场与物质的相互作用。

近十多年来,国内出版了一些电动力学的优秀教材.但是,对于不同的院校,学生的培养目标不同,学生的基础不同,学校的图书资源也不同.我们以为,在电动力学教材的百花园中,应该有不同层次、不同结构、不同风格的作品.基于此,我们在撰写本书时作了如下几个方面的考虑和努力:

(1) 本书的宗旨是希望能为初学者提供一本深入浅出、学以致用教材,即以低的起点打开电动力学的大门,以严格的基本功训练迎接研究生教育并与之接轨。

(2) 本书的内容包括:电磁现象的普遍规律,稳恒电磁场,电磁波的传播,狭义相对论与相对论物理学,电磁波的辐射,电磁场与物质的相互作用等。

(3) 数学基础与物理内涵的关系. 矢量分析和数学物理方法好比电动力学的双腿,电动力学的实验、定义、公式、方法、应用是它的躯干,而物理概念、物理思想、物理图像和物理思维方式是它的灵魂. 如果不熟练掌握矢量分析与数学物理方法,学习电动力学将寸步难行,更无法领会电动力学的定义、公式、方法并灵活运用;如果不认真研究电动力学的实验背景,不细心考察物理概念和物理思想形成的脉络,不仔细品尝麦克斯韦、爱因斯坦等大师们的“神来之笔”,不深入思考物理定律的物理意义,不关注物理结果的实际应用,也无法领悟电动力学的物理概念、物理思想、物理图像和物理思维方式. 总之,电动力学的双腿、躯干和灵魂是一个不可分割的统一体。

(4) 物理概念与演练习题的关系. 正如众多著名物理学家所指出的那样,理论物理的正确概念只有通过大量计算才能真正学到手,学习的过程实际上是无数次“概念-计算-概念”的交互深化过程. 著名物理学家杨振宁先生和黄昆先生都曾津津乐道他们早年在习题中的受益. 本书配备了丰富习题(书末附有习题答案和提示),如能正确使用它(自己先做题,之后再对照),相信对学生独立工作能力的培养和严谨科学作风的形成将会发挥积极的作用。

(5) 基础知识与前沿学科的关系. 电动力学作为理论物理的基础课,本书以介绍它的基本概念、基本规律和基本方法为主. 但如果教材不能反映近代科学的发展,就肯定无法肩负起提高学生科学素质的责任. 我们把光子扫描隧道显微镜、等离子体、光波导、穆斯堡尔效应、横向多普勒效应与引力红移、超导电性、原子的激光冷却与捕陷等近代内容引入教材,这对后续课程的学习,对引导学生逐步走向现代科学技术前沿,对提高学生的求知欲望,关注自然科学的发展,都是非常有益的。

(6) 本书没有代替读者作“章节小结”的训练. 自己动手作小结对于第一次接触电动力学的读者来说, 也许是非常重要的环节. 我国著名数学家华罗庚先生曾说过一段堪称经典的话:

“应该怎样学会读书呢? ……在对书中每一个问题都经过细嚼慢咽, 真正懂得以后, 就需要进一步把全书各部分内容串连起来理解, 加以融会贯通, 从而弄清楚什么是书中的主要问题, 以及各问题之间的关联. 这样我们就能抓住统帅全书的基本线索, 贯串全书的精神实质. 我常常把这种读书过程, 叫做‘从厚到薄’的过程……愈是懂得透彻, 就愈有薄的感觉, 这是每个科学家都要经历的过程.”

——华罗庚《学·思·锲而不舍》

(7) 使用本书的两点建议. 如果学时不足, 本书标有 * 号的章节可留作自学, 不会影响其后学习. 如有可能, 在讲授电动力学之前, 用六个小时讲授附录 1 “矢量分析与张量计算初步”是很有好处的. “磨刀不误砍柴工”, 看起来花了时间, 后来发现是省了时间: 因为后来有的内容上课只需讲思路, 不用讲数学推导了, 可以留作课下自学.

本书是在作者担任华中师范大学物理系 96, 97, 98, 99, 00, 01 级理科基地班《电动力学》讲稿的基础上修改补充而成. 它将成为作者的《理论物理学导论》(四卷本)的第二卷, 其中第一卷《数学物理方法》(第二版)已于 2001 年出版, 第三卷《量子力学》(第二版)已于 2003 年出版.

本书的顺利出版, 得到华中师范大学学校领导以及教务处、物理科学与技术学院、物理系各级领导, 特别是王恩科院长和胡响明副院长的关心和支持, 在此表示深切的感谢. 本书初稿完成后, 华中师范大学物理系 01 级和 02 级基地班王美娟、朱励霖、张瑜瑜、熊恒娜、倪蕾、郑华、赵军科等同学在繁忙学习之余, 对全书的打印稿进行了认真细致的校正, 并提出了建设性的意见, 在此表示诚挚的感谢.

在本书即将出版之际, 作者还要特别感谢兰州大学物理系汪志诚教授, 南京大学天文系汪珍如教授和中国科学院院士、南京大学天文系曲钦岳教授多年来对我的关心和鼓励.

由于笔者水平所限, 加之时间仓促, 谬误在所难免, 恳请读者批评指正.

汪德新

2005 年 1 月 28 日

目 录

第一篇 电磁现象的普遍规律

第一章	经典电动力学的三个基本定律	2
§ 1.1	电荷守恒定律	2
§ 1.2	静电场与静磁场的基本方程	5
§ 1.3	真空中的麦克斯韦方程组 洛伦兹力公式	12
§ 1.4	介质中的麦克斯韦方程组 介质的电磁性质方程	16
§ 1.5	电磁场的边值关系	20
第二章	电磁作用下的守恒定律	24
§ 2.1	电磁作用下的能量守恒定律	24
§ 2.2	电磁作用下的动量守恒定律	28
§ 2.3	电磁作用下的角动量守恒定律	34

第二篇 稳恒电磁场

第三章	静电场	38
§ 3.1	静电势的微分方程与边值关系 静电边值问题的惟一性定理	38
§ 3.2	分离变量法	45
§ 3.3	静电镜像法	52
§ 3.4	格林函数法	58
§ 3.5	电多极矩法	64
§ 3.6	静电场的能量 相互作用能, 势能与广义力	70
第四章	静磁场	76
§ 4.1	磁场的矢势和磁标势 静磁边值问题的惟一性定理	76
§ 4.2	矢势法	83
§ 4.3	磁标势法	90
§ 4.4	磁多极矩法	93
§ 4.5	静磁场的能量 相互作用能 势能与广义力	97

第三篇 电磁波的传播

第五章	无界与半无界空间中的电磁波	104
§ 5.1	电磁波在绝缘介质中的传播	104

§ 5.2 电磁波在介质分界面上的反射与折射 光子扫描隧道显微镜 ... 111

§ 5.3 平面电磁波在导体中的传播及其在导体界面上的反射与折射 ... 120

§ 5.4 波包 群速与相速 127

* § 5.5 电磁波在等离子体中的传播 129

第六章 有界空间中的微波 136

§ 6.1 矩形金属波导管中的微波 136

§ 6.2 矩形金属谐振腔中的微波 147

第七章 有界空间中的光波 153

§ 7.1 平板型介质波导中的光波 153

* § 7.2 圆柱型介质波导中的光导波 157

第四篇 狭义相对论与相对论物理学

第八章 狭义相对论的基本原理与相对论的时空理论 165

§ 8.1 相对论的基本原理 165

§ 8.2 洛伦兹变换 170

§ 8.3 相对论的时空观 176

§ 8.4 相对论的速度变换 188

§ 8.5 闵可夫斯基空间 方程的协变性 191

第九章 相对论电动力学 203

§ 9.1 电动力学基本定律的协变形式 203

§ 9.2 电磁场的变换公式 电磁场不变量 208

* § 9.3 电磁作用下守恒定律的协变形式 213

第十章 相对论力学 216

§ 10.1 相对论动力学基本方程 216

§ 10.2 相对论力学的守恒定律 穆斯堡尔效应与引力红移 223

§ 10.3 电磁场中带电粒子的拉格朗日量,哈密顿量及其运动方程 231

第五篇 电磁波的辐射

第十一章 宏观电荷体系辐射的电磁场 237

§ 11.1 电磁势及其方程 推迟势 237

§ 11.2 推迟势的多极展开 单频辐射场的计算 243

§ 11.3 电偶极辐射 短天线辐射 246

* § 11.4 磁偶极辐射与电四极辐射 250

§ 11.5 半波天线与天线阵 256

第十二章 运动带电粒子辐射的电磁场	263
§ 12.1 运动带电粒子激发的电磁势和电磁场	263
§ 12.2 运动带电粒子辐射的功率 韧致辐射与同步辐射	267
* § 12.3 切连科夫辐射及其频谱分析	274
§ 12.4 带电粒子的电磁场对粒子自身的反作用 谱线的自然宽度	280
第六篇 电磁场与物质的相互作用	
第十三章 电磁波的散射 色散与吸收	287
§ 13.1 电子对电磁波的散射	287
§ 13.2 介质对电磁波的色散与吸收	292
第十四章 超导体电动力学	296
§ 14.1 超导体的基本性质	296
§ 14.2 超导的宏观唯象理论	297
第十五章 原子的激光冷却与捕陷	305
* § 15.1 激光冷却与捕陷原子的基本思想和方法	305
* § 15.2 激光冷却与捕陷原子在科学技术上的意义	309
附录	311
附录 1 矢量分析与张量计算初步	311
附录 2 最小作用量原理,拉格朗日方程与哈密顿方程	346
附录 3 拉普拉斯展开定理	349
附录 4 δ 函数的定义和性质	351
附录 5 勒让德多项式,缔合勒让德函数与球函数	352
附录 6 贝塞耳函数,诺埃曼函数,汉克耳函数,虚宗量贝塞耳函数与虚宗 量汉克耳函数	355
附录 7 傅里叶变换公式	357
附录 8 国际单位制与高斯单位制之间的单位换算关系及公式对照表	358
附录 9 物理常数表	360
习题答案	361
习题提示	379
主要参考书目	450

第一篇 电磁现象的普遍规律

本篇介绍电磁现象的普遍规律。

第一章介绍经典电动力学的三个基本定律——电荷守恒定律、麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式。建立在这三个基本定律上的经典电动力学理论成功地解释了电磁现象与光现象(对于像康普顿效应那些与微观过程有直接关系的宏观现象,将利用相对论及初等量子论讨论)。

第二章介绍电磁作用下的三个守恒定律,即电磁作用下的能量守恒定律、电磁作用下的动量守恒定律,以及电磁作用下的角动量守恒定律。能量、动量、角动量的守恒定律是自然界一切物质运动都要遵守的普遍规律。

第一章 经典电动力学的三个基本定律

本章首先介绍从实验定律出发得到的电荷守恒定律,并给出定律的积分形式和微分形式.其次,由库仑定律和毕奥-萨伐尔定律出发,得到静电场和静磁场的散度和旋度方程;由时变场的法拉第电磁感应定律出发,得到在普遍情形下的电场旋度方程.英国著名物理学家麦克斯韦正是在这些实验定律的基础上提出了位移电流假设,成功地总结出电磁场的运动规律——麦克斯韦方程组.在此基础上,根据电荷在电场中受力和电流在磁场中受力的实验事实,得出洛伦兹力公式.电荷守恒定律、麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式构成了经典电动力学的三个基本定律.随后,本章进一步从真空中的麦克斯韦方程组(即场方程)出发,引入介质极化和磁化形成的宏观电荷电流分布,得到介质中的场方程.最后,又由介质中场方程的积分形式出发,得出两种不同介质分界面上的场方程——电磁场的边值关系,它们在随后几章求解电磁场时起着非常重要的作用.

§ 1.1 电荷守恒定律

本节首先介绍关于电荷与电荷量子化的基本概念,随后讨论经典电动力学的第一个基本定律——电荷守恒定律.在引入电荷密度和电流密度的概念之后,给出电荷守恒定律的积分形式和微分形式.

一、电荷 电荷的量子化

我们知道,自然界的实物是由分子、原子组成的,原子是由原子核和电子组成的,原子核是由质子和中子组成的(氢原子核只有一个质子).电子电荷的精确值为

$$-e = -1.602\,177\,33(49) \times 10^{-19} \text{C}. \quad (1)$$

质子带有等量的正电荷,中子不带电.在正常的原子中,原子核内的质子数与核外的电子数相等,原子呈电中性.通过摩擦起电或静电感应,电子会从一个物体转移到另一物体,或者从物体的一个部位转移到另一部位,使物体呈现带正电或负电的性质.由此可见,宏观物体所带的电量 Q 必为电子电量 $-e$ 的整数倍,即

$$Q = \pm ne, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

电荷这种只取分立值的性质称为电荷的量子化.

那么,电子所带的电量是不是粒子荷电的最小份额呢?在20世纪60年代,美国科学家盖尔-曼和茨维格提出了关于粒子结构的夸克模型.在此之后,人们认识到最基本的粒子包括六种夸克和六种轻子,它们是物质的最小构件,如表1.1所示.

表 1.1

粒子	第一代	第二代	第三代
夸克	u(上夸克) d(下夸克)	c(粲夸克) s(奇异夸克)	t(顶夸克) b(底夸克)
轻子	e(电子) ν_e (e中微子)	μ (μ 子) ν_μ (μ 中微子)	τ (τ 子) ν_τ (τ 中微子)

原子核、原子、分子均由第一代夸克和轻子组成(第二、三代基本粒子除质量外,与第一代粒子的所有性质相同).上夸克、粲夸克、顶夸克带 $\frac{2}{3}e$ 电量,下夸克、奇异夸克和底夸克带 $-\frac{1}{3}e$ 电量.质子是由两个上夸克和一个下夸克组成,故质子的电量为 $2 \times \frac{2}{3}e - \frac{1}{3}e = e$;中子由一个上夸克和两个下夸克组成,故中子的电量为 $\frac{2}{3}e - 2 \times \frac{1}{3}e = 0$.但是,直到目前为止,还未观察到独立存在的夸克^①.

当然,尽管电荷是量子化的,但电子所携带的电量对于宏观电磁测量仪器而言则是无法察觉的,电量 e 的增减不会对测量结果带来任何影响.因此,在宏观电动力学中就不必考虑电荷的量子化,并且把带电体的电量 Q 看成是可以连续变化的.

二、电荷守恒定律

迄今为止的实验事实(从静电现象、化学反应、核反应,直到基本粒子的转化过程)都表明,电荷既不会产生,也不会消灭,它只能从空间的一个区域转移到另一个区域.也就是说,当电荷运动时,区域 V 内电荷的改变量等于通过其边界面流入的电荷量.这个实验定律称为电荷守恒定律,人们把它视为自然界的普遍规律,称之为经典电动力学的第一个基本定律.

为了给出电荷守恒定律的数学表达式,就要引入电荷密度 ρ 和电流密度 J 来

^① 夸克被囚禁在强子(如质子、中子、介子等)内部而不能以自由状态存在的现象称为夸克禁闭.目前建造更高能量的加速器进行实验的一个重要目标就是寻找解除囚禁的夸克.目前按参与相互作用性质的不同,基本粒子可分为三类:光子(只参与电磁作用)、轻子(参与电磁作用和弱作用)、强子(参与弱作用、电磁作用和强作用).强子由夸克组成,强作用的强度是电磁作用的 10^3 倍,是弱作用的 10^{12} 倍.

描述电荷和电流的分布.

三、电荷密度与电流密度

如果将带电体分成许多小体积元 ΔV , 使它内部带电粒子非常多但与带电体的体积 V 相比较又非常小, 这样的 ΔV 常称之为物理无穷小体积, 并记之为 $\Delta V \rightarrow 0$. 电荷密度 ρ 定义为

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V}, \quad (3)$$

式中 ΔQ 为体积元 ΔV 内的电量. 既然 ΔV 内包含许许多多带电粒子, 故电荷密度 $\rho(x, t)$ 可看成连续分布函数.

当电荷作定向运动时, 就形成电流. 例如, 电解液中有正、负离子存在, 若电解槽没有接通电源, 则正、负离子的运动是杂乱无章的, 不会形成电流; 但接通电源后, 正、负离子分别受到方向相反的力作用, 沿相反的方向运动, 形成电流. 历史上规定, 正电荷运动的方向为电流方向.

对于电流的强弱, 通常用电流强度 (简称电流) I 来描述. 电流强度定义为单位时间内通过导体任一横截面的电量, 即

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (4)$$

但是, 电流强度 I 只反映“通过导体横截面的电流”这一整体特征, 不能反映该横截面各处的电流强弱. 因此, 有必要引入电流密度 \mathbf{J} 来描述导体中的电流分布. 导体中某一点 \mathbf{J} 的方向表示该点电流流动的方向, \mathbf{J} 的大小等于通过该点垂直于电流方向的单位横截面的电流, 即

$$\mathbf{J} = J\mathbf{n}_0 = \frac{dI}{d\sigma_\perp} \mathbf{n}_0, \quad (5)$$

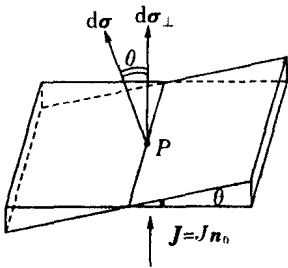


图 1.1

式中 \mathbf{n}_0 是沿该点 (图 1.1 中的 P 点) 电流方向的单位矢量, $d\sigma_\perp$ 是通过 P 点的垂直于电流方向的横截面面元, 其中 $d\sigma_\perp = \mathbf{n}_0 \cdot d\sigma$.

设 $d\sigma$ 是通过 P 点的任一面元, 则通过面元 $d\sigma$ 的电流为

$$dI = J d\sigma_\perp = J d\sigma \cos\theta = \mathbf{J} \cdot d\sigma, \quad (6)$$

式中 θ 为面积元矢量 $d\sigma = \mathbf{n} d\sigma$ 与面积元矢量 $d\sigma_\perp = \mathbf{n}_0 d\sigma_\perp$ 的夹角.

通过导体中任意曲面 S 的电流即为

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\sigma. \quad (7)$$

四、电荷守恒定律的积分形式与微分形式

考虑空间中某一区域 V , 其边界为封闭曲面 S . 电荷守恒定律指出, 单位时间通过界面 S 流入的电量 $-\oint_S \mathbf{J} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ 应等于单位时间内体积 V 内电荷的增加量 $\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV$, 即得

$$-\oint_S \mathbf{J} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV. \quad (8)$$

这就是电荷守恒定律的积分形式. 应用高斯定理将面积分变为体积分, 便有

$$\int_V \left(\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0. \quad (9)$$

由 V 的任意性, 可见对空间的任一点 x , 均有

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(x, t) + \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = 0. \quad (10)$$

这是电荷守恒定律的微分形式.

习 题 1.1

1. 设导电介质的载流子是正、负离子, 设 x 处的正、负离子密度分别为 $\rho_+(x)$ 和 $\rho_-(x)$, 正、负离子的速度分别为 $v_+(x)$ 和 $v_-(x)$, 求该处的电荷密度 $\rho(x)$ 和电流密度 $\mathbf{J}(x)$.

2. 设有电流流过电解质, 今沿 \mathbf{J} 方向取一电流管元 Idl , 其中 dl 的大小为沿电流方向的电流管长, 试证明在该体积元 $dV = dSdl$ 内, 有

$$Idl = \mathbf{J}dV = \sum_{dv} q_i v_i. \quad (11)$$

该式的最后一个式子为该电流元所在区域内所有粒子电量与其速度乘积之和. (11) 式的三个式子分别是电流管图像、电流密度图像和微观图像对电流的描述.

§ 1.2. 静电场与静磁场的基本方程

本节从真空中静电场和静磁场的基本实验定律——库仑定律和毕奥-萨伐尔定律出发, 分别引入电场强度 \mathbf{E} 和磁感应强度 \mathbf{B} 来描述静电场和静磁场, 进而得到静电场与静磁场的散度和旋度, 这是进一步寻找电磁场基本规律的重要基础.

一、静电场的基本方程

1. 库仑定律与力的叠加原理

1785 年, 库仑通过实验发现了两个点电荷之间相互作用力的规律——库仑定律. 定律指出, 真空中两个静止点电荷之间的相互作用力为

$$\mathbf{F}_2 = \frac{q_1 q_2 \mathbf{r}_{21}}{4\pi\epsilon_0 r_{21}^3} = -\mathbf{F}_1, \quad (1)$$

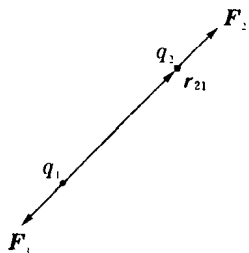


图 1.2

式中 q_1, q_2 分别为两个点电荷的电量, r_{21} 为由 q_1 指向 q_2 的矢径, 如图 1.2 所示. F_1 和 F_2 分别是 q_1 和 q_2 所受的静电力, ϵ_0 为真空中的介电常数, 其值为

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{F} \cdot \text{m}^{-1}. \quad (2)$$

库仑定律中两电荷相对观察者是静止的. 实验表明, 若 q_1 运动, 则 q_2 对 q_1 的作用力 F_1 仍按(1)式计算, 但 q_1 对 q_2 的作用力 F_2 却不再遵守库仑定律(见 § 9.2“电磁场的变换公式”).

实验还指出, 当点电荷 q_0 同时受到点电荷 q_1, q_2, \dots, q_N 的作用时, q_0 所受到的合外力等于这些点电荷单独作用于 q_0 的库仑力的矢量和, 即

$$\mathbf{F} = \sum_{k=1}^N \frac{q_0 q_k \mathbf{r}_{0k}}{4\pi\epsilon_0 r_{0k}^3} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N q_k \frac{\mathbf{r}_{0k}}{r_{0k}^3}, \quad (3)$$

式中 r_{0k} 是由电荷 q_k 指向 q_0 的矢径, 这个结论称为力的叠加原理.

2. 电场强度与场强叠加原理

库仑定律给出的“两个电荷之间的相互作用力”并不是超距作用, 而是通过电荷在自身周围激发的电场作用于其他电荷的. 当电荷 q_1 由静止突然运动时, q_2 所受的作用力并不是像超距作用所预言那样同时发生变化. 实验表明, 运动电荷 q_1 激发的场将以有限的速度向 q_2 传播, 当 q_2 所在位置的场发生变化时, q_2 所受的作用力才会发生变化(见 § 11.1“推迟势”). 无数事实证明, 电场和磁场是物质的一种形式, 它具有能量和动量, 遵从一定的运动规律, 并且可以脱离电荷和电流而单独存在.

电场的性质由电场强度 \mathbf{E} 描述, 定义为单位正电荷在电场中所受的力. 若位于 x 处的电荷 q_0 所受的力为 \mathbf{F} , 则 x 处的电场强度为

$$\mathbf{E}(x) = \frac{\mathbf{F}}{q_0}. \quad (4)$$

将库仑定律代入上式, 即得位于 x' 的点电荷 q 在场点 x 所激发的场

$$\mathbf{E}(x) = \frac{q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad (5)$$

式中 $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ 是由源点 x' 指向场点 x 的矢径. 这表明, 电场强度的大小与源电荷 q 的电量成正比, 与距离 r 的平方成反比, 方向与矢径 \mathbf{r} 的方向一致 ($q > 0$) 或者相反 ($q < 0$).

同时, 由力的叠加原理易得场强的叠加原理. 实际上, 将(3)式代入(4)式, 即有

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} = \sum_k \frac{q_k \mathbf{r}_{0k}}{4\pi\epsilon_0 r_{0k}^3} = \sum_k \mathbf{E}_k. \quad (6)$$

上式表明, 电场强度 E 应满足线性偏微分方程.

当电荷连续分布时, 设电荷密度为 $\rho(x')$, 则电荷体系激发的电场为

$$E(x) = \int \frac{\rho(x')r}{4\pi\epsilon_0 r^3} dV'. \quad (7)$$

3. 高斯定理与电场的散度

现在计算穿过任一封闭面的电通量. 为此, 将(7)式代入 $\oint_S E \cdot d\sigma$, 交换积分次序, 便有

$$\oint_S E \cdot d\sigma = \oint_S \left[\int_{V_\infty} \frac{\rho(x')r}{4\pi\epsilon_0 r^3} dV' \right] \cdot d\sigma = \int_{V_\infty} \frac{\rho(x')}{4\pi\epsilon_0} \left[\oint_S \frac{r \cdot d\sigma}{r^3} \right] dV'. \quad (8)$$

面元 $d\sigma$ 对源点 x' 所张的立体角为

$$d\Omega = \frac{\cos\theta d\sigma}{r^2} = \frac{r \cdot d\sigma}{r^3}. \quad (9)$$

当源点 x' 在封闭面 S 内部时(见图 1.3), S 面对 x' 所张的立体角为 4π ; 当源点 x' 在封闭面 S 外部时(见图 1.4), 易见 $d\sigma_1$ 与 $d\sigma_2$ 对 x' 所张的立体角之和为零(大小相等, 一正一负), 因而 S 面对 x' 所张的立体角为零. 由此得

$$\oint_S \frac{r \cdot d\sigma}{r^3} = \oint_S d\Omega = \begin{cases} 4\pi, & x' \text{ 在 } V \text{ 内;} \\ 0, & x' \text{ 在 } V \text{ 外.} \end{cases} \quad (10)$$

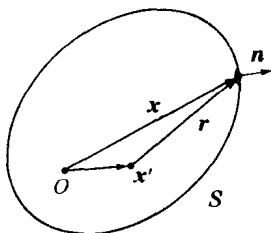


图 1.3

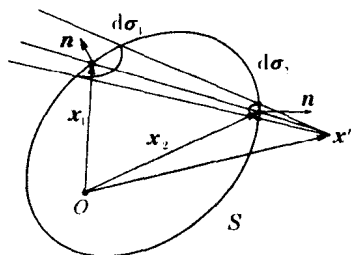


图 1.4

既然 x' 在 V 外时面积分为零, 故只要考虑 x' 在 V 内的情形. 据此, 将(10)式代入(8)式时, 相应地将 V_∞ 改为 V , 即有

$$\oint_S E \cdot d\sigma = \int_V \frac{\rho(x')}{4\pi\epsilon_0} 4\pi dV' = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(x') dV'. \quad (11)$$

这就是高斯定理的积分形式. 它指出, 静电场通过任意封闭曲面的电通量等于该封闭面所包围的总电量的 ϵ_0 分之一, 与封闭面外的电荷无关.

由于定积分与积分变量无关, 可将(11)式右边的积分变量 x' 换为 x , 再将(11)式左边的面积分换成体积分, 即得

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}) dV. \quad (12)$$

由积分区域的任意性,便有

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0}. \quad (13)$$

这就是高斯定理的微分形式. 它给出场与源的局域关系: 空间任一点电场的散度, 只与该点的电荷密度有关, 而与其他点的电荷分布无关. 在 $\rho(\mathbf{x}) \neq 0$ 处, $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) \neq 0$, 是电场的源头或尾间, 电力线不连续; 在 $\rho(\mathbf{x}) = 0$ 处, $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0$ (但 $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ 不一定为零), 电力线连续.

由(10)式可见, 结论 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ 是反平方定律 ($E \sim \frac{1}{r^2}$) 的结果. 如果 $E \sim \frac{1}{r^{2+\delta}}$, 即使 δ 很小, 高斯定理也不成立. 但迄今为止尚未发现对反平方定律的偏离, 本节习题第3题给出判断反平方定律成立的精度的一个巧妙方法.

由附录1 § A1.4 中的亥姆霍兹定理可知, 为了确定一个矢量场, 必须知道它的散度和旋度, 为此, 进一步计算静电场的旋度.

4. 静电场的旋度

现在, 先计算点电荷电场的环流, 再计算任意电荷分布情形下电场的环流, 将

(5)式代入 $\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$, 即有

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \frac{q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot d\mathbf{l}, \quad (14)$$

由图 1.5 可得

$$\mathbf{r} \cdot d\mathbf{l} = r \cos\theta dl = r dr, \quad (15)$$

将上式代入(14)式, 得

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_L \frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_L d\left(\frac{1}{r}\right) = 0. \quad (16)$$

既然一个点电荷激发的静电场的环流为零, 由场强叠加原理可得

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \sum_i \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \sum_i \oint_L \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad (17)$$

即任意电荷分布的静电场的环流亦为零.

利用斯托克斯定理将上式左边的线积分变为面积分, 即得

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0, \quad (18)$$

由 S 的任意性, 便有

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0. \quad (19)$$

这表明, 静电场内任一点电场的旋度为零, 即静电场是无旋场.

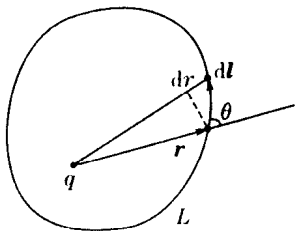


图 1.5

静电场的散度 $\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ 及旋度 $\nabla \times E = 0$ 是静电场的基本方程,也是寻找电磁现象基本规律的重要基础.

二、静磁场的基本方程

1. 安培定律

1820 年安培通过实验发现了电流元相互作用公式——安培定律. 它的现代形式为

$$d^2F = \frac{\mu_0}{4\pi} Idl \times \left(I' dl' \times \frac{r}{r^3} \right), \quad (20)$$

式中 d^2F 为电流元 $I' dl'$ 对 Idl 的作用力(它是二阶无穷小量). $r = x - x'$ 为由 $I' dl'$ 指向 Idl 的半径(见图 1.6). μ_0 为真空磁导率,其值为

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H} \cdot \text{m}^{-1}. \quad (21)$$

两电流元之间的作用力一般不满足牛顿第三定律,因为孤立的稳恒电流元根本不存在. 但

是,对于非稳恒的情形(例如两个运动的带电粒子组成的系统),牛顿第三定律及与之等价的动量守恒定律同样均不成立. 因为此时粒子系统的机械动量与电磁场动量之和才在运动中保持守恒(见 § 2.2“电磁作用下的动量守恒定律”).

2. 磁感应强度 毕奥-萨伐尔定律

电流元之间的相互作用同样也不是超距作用,是通过磁场来传递的.

那么,电流 I' 的回路对电流元 Idl 的作用是怎样通过磁场来传递的呢? 为了弄清楚这一点,对安培定律沿电流 I' 的回路作线积分,得

$$dF = \frac{\mu_0}{4\pi} Idl \times \oint_L I' dl' \times \frac{r}{r^3}. \quad (22)$$

显然,电流 I' 的回路对电流元 Idl 的作用力 dF 与线积分

$$B(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L I' dl' \times \frac{r}{r^3} \quad (23)$$

有关. 可见 B 反映了磁场在电流元 Idl 所处位置的性质. 历史上将 B 称为磁感应强度,它与描述电场的电场强度地位相当.

将(23)式代入(22)式,则安培定律可表示为

$$dF = Idl \times B. \quad (24)$$

如果用空间的电流分布 $J(x')dV'$ 代替 $I' dl'$, (23)式可改写为

$$B(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J(x') \times r}{r^3} dV'. \quad (25)$$

这就是毕奥-萨伐尔定律,它给出空间所有电流元 $J(x')dV'$ 在 x 处激发的总磁场. 毕奥-萨伐尔定律是稳恒电流激发磁场的基本实验定律.

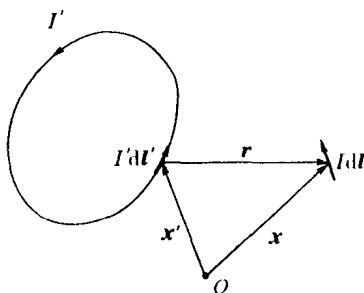


图 1.6