MATHEMATICS ANALYSIS FOR ECONOMICS

南开大学公共数学系列教材

经济类数学分析

（上册）

主编　张效成

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

经济类数学分析

（上册）

主　编　张效成
副主编　张　阳　徐　铁　赵志勇

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书是南开大学根据新世纪教学改革成果而编写的系列教材之一.全书分上、下两册,本书为上册.内容包括:函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分.

与经济类传统的高等数学教材相比,本书加强了基础理论的阐述,大致相当于理科数学分析的深度.在内容上注重对学生抽象思维和逻辑上严谨论证的训练,同时也兼顾对学生数学运算能力以及运用能力的培养.

本书可作为对数学有较高要求的经济管理类专业本科生的教材,也可作为理科数学的参考教材.

图书在版编目(CIP)数据

经济类数学分析.上册/张效成主编.—天津:天津大学出版社,2005.7
ISBN 7-5618-2160-3

Ⅰ.经... Ⅱ.张... Ⅲ.数学分析－高等学校－教材 Ⅳ.017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 069224 号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨 欢
地　　址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
电　　话 发行部:022-27403647 邮购部:022-27402742
网　　址 www.tjup.com
印　　刷 昌黎太阳红彩色印刷有限责任公司
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 170mm×240mm
印　　张 15.75
字　　数 350 千
版　　次 2005 年 7 月第 1 版
印　　次 2005 年 7 月第 1 次
印　　数 1－4 000
定　　价 23.00 元

前　言

多年来，高等数学一直是南开大学非数学类专业本科生必修的校级公共基础课.由于各个学科门类的情况差异较大，该课程又形成了包含多个层次、多个类别的体系结构.层次不同，类别不同，教学目标和教学要求有所不同，课程内容的深度与宽度也有所不同，自然所使用的教材也应有所不同.

教材建设是课程建设的一个重要方面，属于基础性建设.时代在前进，教材也应适时更新而不能一劳永逸.因此，教材建设是一项持续的不可能有“句号”的工作.20 世纪 80 年代以来，南开大学的老师们就陆续编写出版了面向物理类、经济管理类和人文类等多种高等数学教材.这些教材为当时的数学教学做出了重要贡献，也为公共数学教材建设奠定了基础，积累了经验.

21 世纪是一个崭新的世纪.随着新世纪的到来，人们似乎对数学也有了一个崭新的认识：数学不仅是工具，更是一种素养，一种能力，一种文化.已故数学大师陈省身先生在其晚年为将中国建设成为数学大国乃至最终成为数学强国而殚精竭虑.他尤其对大学生们寄予厚望.他不仅关心着数学专业的学生，也以他那博大胸怀关心着非数学专业的莘莘学子.2004 年他挥毫为天津市大学生数学竞赛题词，并与获奖学生合影留念.这也是老一辈数学家对我们的激励与鞭策.另一方面，近年来一大批与数学交叉的新兴学科如金融数学、生物数学等不断涌现.这也对我们的数学教育和数学教学提出了许多新要求.而作为课程基础建设的教材建设自当及时跟进.现在呈现在读者面前的便是新世纪南开大学公共数学系列教材之一——经济类数学分析(上册).

本书主要内容是极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学以及广义积分.和以往的经济类高等数学教材相比，其突出特点是从理科数学分析的高度，对基本理论做了较为严谨的阐述，以期为学生打下比较坚实的数学理论基础，正因为此，本书被赋予了《经济类数学分析》的名称.

我们之所以要加大经济类本科生基础数学的深度主要是基于以下的考虑.众所周知，在经济学中引入数学方法大约已有 200 多年的历史.经济学各个学科领域的发展历史一次又一次地证明，数学方法是经济学中最重要的方法之一，是经济学理论取得突破性发展的重要工具.

例如对经济学影响最大的瓦尔拉斯(L. Warlas，1834—1910)的一般均衡理论，从数学角度看始终缺乏坚实的基础.这个问题经过数学家和经济学家们 80 年的努力才得以解决.其中包括大数学家诺伊曼(J. von Neumann，1903—1957)在 20 世纪 30 年代的研究(他提出了著名的经济增长模型)，列昂惕夫(W. Leontiev，1906—1999)的研究(他因其投入产出分析获 1973 年诺贝尔经济学奖)，还包括萨缪尔森(P. Samuelson，1915—)

和希克斯(J. R. Hicks,1904—1989)的研究(他们分获1970年和1972年诺贝尔经济学奖).而最终在1954年给出一般经济均衡存在性严格证明的是阿罗(K. J. Arrow,1921—)和德布鲁(G. Debreu,1921—).他们两人也因此先后获1972年和1983年诺贝尔经济学奖.阿罗和德布鲁都以学习数学开始他们的学术生涯.阿罗获有数学的学士和硕士学位,德布鲁则是由法国布尔巴基学派培养出来的数学家.

再来看现代金融理论的发展过程.第二次世界大战以前,金融学是经济学的一个分支.金融学研究的方法是以定性思维推理和语言描述为主.20世纪50年代初马柯维茨(H. M. Markowitz,1927—)最先把数理工具引入金融研究,提出了投资组合理论,因此被看作是现代金融学理论——分析金融学的发端.后人把马柯维茨的工作和20世纪70年代布莱克(F. Black,1938—1995)和舒尔斯(M. S. Scholes,1941—)提出的期权定价公式称为"华尔街的两次数学革命".他们也都以其具有划时代意义的工作而获得诺贝尔经济学奖.

此外,一个非常明显的事实是,诺贝尔经济学奖得主大多都具有良好的数理基础,有的原本就是杰出的数学家.

毋庸多叙,仅仅以上这些事实就告诉我们,对于经济类专业的本科生来说,良好的数学基础及其修养是多么的重要.正是基于这样一种认识,我们修订了经济类专业公共数学课程的教学大纲,并编写了这本教材.而且,为了保证学生得到一定的训练,每周除4课时讲授外,还分小班开设了习题课.

本书也可作为管理类专业本科生教材,还可作为相关教师的参考书.

本书的编写得到了南开大学"新世纪教学改革"项目"公共数学课程建设改革与实践"的资助,得到了南开大学教务处、南开大学经济学院和南开大学数学学院的大力支持和帮助.在教材编写、录入和试用过程中,南开大学数学学院薛锋老师周密细致的组织协调工作为我们提供了有力的保障.韩志欣、张华、尚作峰和陈福康等同学牺牲了假期录入书稿.对来自方方面面的关心、支持和帮助,我们在这里一并表示衷心感谢.

由于我们的水平有限,缺点和不足在所难免,诚望读者批评指正.

编者

2005年6月于南开园

目 录

第 1 章　函数

1.1　集合与实数系

1.1.1　集合

由于今后学习的需要，本段将介绍一般集合论的基本知识.

1. 集合的概念

具有某种性质的对象的全体称为**集合**，简称**集**. 称组成集合的每个对象为集合的**元素**，习惯上用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示元素. 若元素 a 属于集合 A，则记为 $a\in A$；否则，记为 $a\notin A$ 或 $a\,\overline{\in}\,A$. 不含任何元素的集合，称为**空集**，记为 $\varnothing$. 若 A 仅含有限个元素，则称 A 是**有限集**；否则，称 A 是**无限集**.

若 A 的元素都是 B 的元素，则称 A 是 B 的**子集**，或说 B 包含 A，记为 $A\subset B$（读作 A 包含于 B），或 $B\supset A$（读作 B 包含 A），空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集. 若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B **相等**，记作 $A=B$，若 $A\subset B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的**真子集**，记作 $A\subsetneqq B$.

2. 集合的表示方法

(1) 枚举法，即将集合中的元素逐一列举出来，如 $A=\{1,2,3\}$.

(2) 概括法，用 $A=\{a\mid a$ 具有性质 $P\}$ 表示. 例如

$$A=\{x\mid -1<x<1,x\in\mathbf{R}\}$$

表示 A 是由所有介于 -1 和 1 之间的实数构成的集合.

3. 集合的运算

集合的基本运算有并、交和差.

设 A,B 是两个集合，由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的**并集**（简称**并**），记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}.$$

更一般地，n 个集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并集是所有那些至少属于 $A_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 之一的元素构成的集合，记为

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\{x\mid x\in A_1\text{ 或 }x\in A_2\cdots\text{或 }x\in A_n\}.$$

由所有属于 A 又属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的**交集**（简称**交**），记作 $A\cap B$，即

$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$.

更一般地，n 个集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交集是同属于诸 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的所有元素构成的集合，记为

$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\{x\mid x\in A_1 \text{ 且 } x\in A_2\cdots \text{ 且 } x\in A_n\}.$$

由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的**差集**(简称**差**)，记作 $A\setminus B$，即

$$A\setminus B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}.$$

在某些理论和应用研究中，我们仅限于考虑某一确定集合 X 的元素及其子集 A，B，C 等，此时，称集合 X 为**全集**或**基本集**，称 $X\setminus A$ 为 A 的**补集**或**余集**，记为 A^c，即

$$A^c=\{x\mid x\in X \text{ 且 } x\notin A\}.$$

(对子集 B，C 可以有类似表示).

若 $A\cap B\neq\varnothing$，则称 A 与 B 有**非空交集**，否则称 A 与 B **不相交**.若 $A\neq\varnothing$，则称 A 为**非空集**.

1.1.2 实数系

以数为元素的集合称为**数集**.

约定：**自然数**是指全体非负整数，自然数的集合记为 $\mathbf{N}$. 全体正整数集合记为 $\mathbf{N}_+$. **整数**是指自然数和负整数，整数的集合记为 $\mathbf{Z}$. **有理数**是一切形如 $\dfrac{p}{q}$ 的数，其中 $p\in\mathbf{Z}$，$q\in\mathbf{Z}$，且 $q\neq0$，有理数集记为 $\mathbf{Q}$. **实数**是有理数和无理数(无限不循环小数)的统称，实数集又称**实数系**，记为 $\mathbf{R}$.

如无特殊说明，本书所说的数都是实数.

1.实数集的基本性质

取定了原点、长度单位和方向的直线称为**数直线**或称为**数轴**.每一个实数在数轴上有唯一的点与之对应；反过来，数轴上的每一个点代表了唯一的一个实数.今后，我们对实数和数轴上的点不加区别.

我们不加证明地给出实数集 $\mathbf{R}$ 的下列基本性质.

命题 1.1.1 设 $a,b\in\mathbf{R}$，则三个关系式：$a=b$，$a>b$，$a<b$ 中必有且只有一个关系式成立.

命题 1.1.2 设 $a,b,c\in\mathbf{R}$ 且 $a>b$，$b>c$，则 $a>c$.

以上两命题称为实数的有序性.

命题 1.1.3 **(实数的稠密性)**设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，则必存在实数 r，使得 $a<r<b$.

命题 1.1.4 **(阿基米德(Archimedes)公理)**对于任意给定的 $a\in\mathbf{R}$，必有大于 a 的自然数 n 存在.

命题 1.1.5　实数集 $\mathbf{R}$ 具有连续性.

对实数集的连续性概念,可以这样理解:由于实数与数轴上的点是一一对应的,而数轴上的点是连续分布的,因此实数也连续且无空隙地充满整个数轴,即 $\mathbf{R}$ 具有连续性.应当注意,有理数集也具有有序性、稠密性,但由于有理数点之间存在着许许多多的空隙——无理数点,使得有理数点集不能充满数轴,因而有理数集不具有连续性.

2.绝对值

设 $a\in\mathbf{R}$,数 a 的绝对值 $|a|$ 定义为

$$|a|=\begin{cases} a, & a\geqslant 0, \\ -a, & a<0. \end{cases}$$

$|a|$ 的几何意义是数轴上的点 a 与原点之间的距离.

绝对值有下列基本性质,设 $a,b\in\mathbf{R}$,则有下列关系成立.

(1) $|a|\geqslant 0$.

(2) $|-a|=|a|$.

(3) $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$.

(4) $|ab|=|a||b|$.

一般地,对于任意有限多个实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,有

$$|a_1a_2\cdots a_n|=|a_1||a_2|\cdots|a_n|.$$

(5)若 $b\neq 0$,则 $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$.

(6) $|a+b|\leqslant|a|+|b|$(三角不等式).

一般地,有

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|.$$

(7) $|a-b|\geqslant||a|-|b||$.

(8)对于正数 δ,不等式 $|x-a|<\delta$ 等价于不等式 $a-\delta<x<a+\delta$.

3.区间与邻域

为了描述变量的变化范围,我们引进区间的概念.如无特别声明,我们总假定 $x\in\mathbf{R}$.设 $a,b\in\mathbf{R}$ 为常量,$a<b$.

称集合 $\{x\,|\,a<x<b\}$ 为由 a,b 确定的**开区间**,记为 (a,b) 或 $a<x<b$.

称集合 $\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$ 为由 a,b 确定的**闭区间**,记为 $[a,b]$ 或 $a\leqslant x\leqslant b$.

集合 $\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$ 和集合 $\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$ 均称为由 a,b 确定的**半开区间**,分别记为 $[a,b)$ 和 $(a,b]$.

a,b 称为上述各区间的端点.因为 a,b 为有限实数,区间 (a,b),$[a,b]$,$[a,b)$ 与 $(a,b]$ 都称为**有限区间**.

今后,还将用到下述无限区间.实数系全体即整个数轴,记为 $(-\infty,+\infty)$ 或 $\{x\,|\,-\infty<x<+\infty\}$,符号"$\infty$"读作无穷大.

集合 $\{x\,|\,x\geqslant a\}$,其中 a 为一实数,记为 $[a,+\infty)$ 或 $\{x\,|\,a\leqslant x<+\infty\}$.类似地,还有 $(a,+\infty)$,$(-\infty,a]$,$(-\infty,a)$ 等等.

以后在不需要明确所论区间是否包含端点,以及是有限区间还是无限区间时,就简单地称它为“区间”,且常用 I 或 X 等字母表示.

设 $\delta>0$,称开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 为点 x_0 的 δ **邻域**,记为 $U(x_0,\delta)$,它是以 x_0 为中心,长为 2δ 的开区间.有时我们不关心 δ 的大小,常用“x_0 的附近”或“x_0 的某邻域”来代替 x_0 的 δ 邻域,此时记为 $U(x_0)$.

称集合 $\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$ 为点 x_0 的**空心邻域**,记为 $\mathring{U}(x_0,\delta)$.

称开区间 $(x_0-\delta,x_0)$ 为点 x_0 的**左 δ 邻域**;称开区间 $(x_0,x_0+\delta)$ 为点 x_0 的**右 δ 邻域**.

4.数集的界

定义 1.1.1 对于数集 A,若有常数 $M(m)$,使得对任意 $x\in A$,有

$$x\leqslant M(x\geqslant m),$$

则称 A 为有**上(下)界**,并称 $M(m)$ 是 A 的一个**上(下)界**.

既有上界又有下界的数集称为**有界数集**;否则称为**无界数集**.

显然,若一数集有上(下)界,则必有无数多个上(下)界.事实上,凡大于 M(小于 m)的数都是该数集的上(下)界.但是,最小上界(最大下界)却只能有一个.

公理 1.1.1 任何非空的有上界的实数集 A 必存在最小上界,称之为 A 的**上确界**,记为 $\sup A$.

注 若 A 的上确界属于 A,则称 A 为上确界可达.此时,上确界显然是 A 中最大的数.A 的上确界也可能不属于 A.例如,$A=\{x \mid x\in\mathbf{Q},x^2<2\}$ 是有上界的,上确界是 $\sqrt{2}$,但 $\sqrt{2}\notin A$.

推论 任何有下界的非空实数集 A,必存在最大下界,称之为 A 的**下确界**,记为 $\inf A$.

定理 1.1.1 为使实数 $M(m)$ 是数集 A 的上(下)确界,充分必要条件是以下两个条件必须同时满足:

(1) 对任何 $x\in A$,$x\leqslant M(x\geqslant m)$;

(2) 对任何 $\varepsilon>0$,存在 $x\in A$,使 $x>M-\varepsilon(x<m+\varepsilon)$.

定理 1.1.2 若数集 A 有上(下)确界,则该上(下)确界是唯一的.

最后,我们也经常用 $\sup A=+\infty$ 表示 A 无上界,用 $\inf A=-\infty$ 表示 A 无下界.

1.2 函数概念

1.2.1 映射

1.映射概念

定义 1.2.1 设 X,Y 是两个非空集合,如果存在一个法则 f,使得对 X 中每个元

素 x，按法则 f 在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的**映射**，记作

$$f: X \to Y.$$

其中 y 称为元素 x 在映射 f 下的**像**，并记作 $f(x)$，即 $y=f(x)$，而元素 x 称为元素 y 在映射 f 下的**原像**；集合 X 称为映射 f 的**定义域**，记作 D_f，即 $D_f=X$；X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的**值域**，记作 R_f 或 $f(X)$，即

$$R_f=f(X)=\{f(x) \mid x \in X\}.$$

说明：

(1)构成一个映射必须具备以下三个要素：集合 X，即定义域 $D_f=X$；集合 Y，即值域的范围，$R_f \subset Y$；对应法则 f，使对每个 $x \in X$，有唯一确定的 $y=f(x)$ 与之对应.

(2)对每个 $x \in X$，元素 x 的像 y 是唯一的；而对每个 $y \in R_f$，y 的原像不一定是唯一的；映射 f 的值域 R_f 是 Y 的一个子集，即 $R_f \subset Y$，但不一定 $R_f=Y$.

例 1.2.1　设 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$，对每个 $x \in \mathbf{R}$，$f(x)=x^2$. 显然，f 是一个映射，f 的定义域 $D_f=\mathbf{R}$，值域 $R_f=\{y \mid y \geqslant 0\}$，它是 $\mathbf{R}$ 的一个真子集. 对于 R_f 中的元素 y，除 $y=0$ 外，它的原像不是唯一的，如 $y=9$ 就有 $x=3$ 和 $x=-3$ 两个原像.

例 1.2.2　设 $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$，对每个 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，$f(x)=\sin x$. 显然，$f$ 是一个映射，其定义域 $D_f=\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，值域 $R_f=[-1,1]$.

设 f 是从集合 X 到集合 Y 的映射，若 $R_f=Y$，即 Y 中任一元素 y 都是 X 中某元素的像，则称 f 为 X 到 Y **上的映射**或**满射**；若对 X 中任意两个不同元素 $x_1 \neq x_2$，均有 $f(x_1) \neq f(x_2)$，则称 f 为 X 到 Y 的**单射**；若映射 f 既是单射又是满射，则称 f 为 X 到 Y 的**一一映射**. 例 1.2.1 中的映射既非单射又非满射，例 1.2.2 中的映射既是单射又是满射，因此是一一映射.

映射又称**算子**. 根据集合 X，Y 的不同情形，在不同的数学分支中，映射又有不同的惯用名称. 例如，从非空集 X 到数集 Y 的映射，又称为 X 上的泛函，从非空集 X 到它自身的映射又称为 X 上的变换，从实数集或其子集 X 到实数集 Y 的映射通常称为定义在 X 上的函数.

2. 逆映射与复合映射

设 f 是 X 到 Y 的单射，由定义，对每个 $y \in R_f$，有唯一的 $x \in X$ 适合 $f(x)=y$. 于是，我们可以定义一个从 R_f 到 X 的新映射 g，即

$$g: R_f \to X.$$

对每个 $y \in R_f$，规定 $g(y)=x$，且此 x 满足 $f(x)=y$，称 g 为 f 的**逆映射**，记作 f^{-1}，其定义域 $D_{f^{-1}}=R_f$，其值域 $R_{f^{-1}}=X$.

按上述定义，只有单射才存在逆映射，所以，在例 1.2.1 和例 1.2.2 中，只有例 1.2.2中的映射 f 才有逆映射 f^{-1}，这个 f^{-1} 是反正弦函数，其主值：$f^{-1}(x)=\arcsin x$，$x \in [-1,1]$，定义域 $D_{f^{-1}}=[-1,1]$，主值范围 $R_{f^{-1}}=\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

设有两个映射

$$g:X\to Y_1,f:Y_2\to Z,$$

其中 $Y_1\subset Y_2$,则由映射 g 和 f 可以确定一个从 X 到 Z 的对应法则,它将每个 $x\in X$ 映射成 $f[g(x)]\in Z$.显然,这个对应法则确定了一个从 X 到 Z 的映射,称此映射为映射 g 和 f 构成的**复合映射**,记作 $f\circ g$,即

$$f\circ g:X\to Z,$$
$$(f\circ g)(x)=f[g(x)],x\in X.$$

由复合映射的定义可知,映射 g 和 f 构成复合映射的条件是:g 的值域 R_g 必须包含在 f 的定义域内,即 $R_g\subset D_f$;否则不能构成复合映射.由此可见,映射 g 和 f 的复合是有顺序的.$f\circ g$ 有意义并不表示 $g\circ f$ 也有意义,即使 $f\circ g$ 和 $g\circ f$ 都有意义,复合映射 $f\circ g$ 和 $g\circ f$ 也未必相同.

例 1.2.3 设有映射 $g:\mathbf{R}\to[-1,1]$,对每个 $x\in\mathbf{R}$, $g(x)=\sin x$;另有一个映射 $f:[-1,1]\to[0,1]$,对每个 $u\in[-1,1]$, $f(u)=\sqrt{1-u^2}$.于是,映射 g 和 f 构成的复合映射 $f\circ g:\mathbf{R}\to[0,1]$,对每个 $x\in X$,有

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)]=f(\sin x)=\sqrt{1-(\sin x)^2}=|\cos x|.$$

1.2.2 函数概念

1. 常量与变量

在分析研究过程中,数值始终保持不变的量称为**常量**;数值变化的量称为**变量**.例如,圆周率 π 是常量,而一天的温度、某商品的日销售量等就是变量.设 x 是一变量,由实际问题所规定或由人们所限定的 x 的取值范围,称为 x 的**变域**.

2. 函数的定义

定义 1.2.2 设 x,y 是两个变量,x 取值于实数集合 X.如果对于每一个 $x\in X$,都可以按照某一给定规则 f,唯一地确定一个实数 y 与之对应,则称 f 是从 X 到实数 $\mathbf{R}$ 内的一个函数,记作

$$f:X\to\mathbf{R}.$$

其中,x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,自变量 x 的变域 X 称为函数的**定义域**,记作 D_f,对于每一个 $x\in X$,按规则 f 所唯一确定的实数 y,称为函数 f 在 x 处的**函数值**,记作 $y=f(x)$.函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的**值域**,记作 R_f.

说明:

(1) 按照上述定义,记号 f 和 $f(x)$ 的含义是有区别的.f 表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则,$f(x)$ 则表示与自变量 x 对应的函数值.但习惯上常用记号"$f(x),x\in X$",或"$y=f(x),x\in X$"表示定义在 X 上的函数.

(2)表示函数的符号 f 是可以任意选取的.除了 f 外,还可用其他符号,如"g","F"或"φ"等.相应地,函数可记 $y=g(x)$, $y=F(x)$ 或 $y=\varphi(x)$ 等.有时还直接用因

变量的记号来表示函数,即 $y=y(x)$.

(3)在函数定义中,有两个基本要素:一是自变量的定义域 D_f,一是对应法则 f.只有当两个函数的定义域相同,对应法则也相同时,才能认为这两个函数是相同的,否则就是不同的.例如,函数 $y=x^2,x\in(-1,1)$和 $y=x^2,x\in[-1,1]$,显然它们有相同的对应法则,但由于自变量的定义域不同,所以它们是两个不同的函数.

(4)函数的定义域通常由以下两种方式确定:一种是有实际背景的函数,其定义域由实际意义确定.例如,设某商品单价为 p,销售数量为 x,销售收入为 r,则 $r=px$,在此函数中,x 的定义域显然应当是$[0,+\infty)$;另一种是数学式子表达的函数,约定这种函数的定义域是使该数学式子有意义的一切实数组成的集合,这种定义域称为函数的自然定义域.在这种约定之下,函数可用"$y=f(x)$"表达,而不必再表出 D_f.例如,$y=\sqrt{1-x^2}$的定义域显然就是$[-1,1]$,而 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的定义域则是$(-1,1)$.

(5)在函数的定义中,对于每个 $x\in X$,与之对应的函数值 y 是唯一的,这样定义的函数称为**单值函数**;否则,如果 y 不是唯一的,就是**多值函数**.例如,设变量 x 和 y 之间的对应法则由方程 $y^2=x$ 给出.显然,对于 $x=1$,y 有 1 和 -1 两个值与之对应.不过,对于多值函数,往往只要附加一些条件,就可以将它化为单值函数,这样得到的单值函数称为多值函数的单值分支.例如,在由 $y^2=x$ 给出的对应法则中,附加"$y\leqslant0$"的条件,即以"$y^2=x$ 且 $y\leqslant0$" 作为对应法则,就可得到一个单值分支 $y=y_2(x)=-\sqrt{x}$,$x\in[0,+\infty)$.

3. 函数的表示方法

函数的对应法则可用不同的方法来表示,常用的表示法有解析法、列表法和图像法.其中解析法是微积分学中表示函数的主要方法.

1)列表法

所谓列表法就是将自变量的一组常数值与其对应的一组函数值列成一个数表,其优点是便于查找函数值.例如,三角函数表、对数函数表等常用数学用表,银行中的外汇兑换表等.

2)图像法

所谓图像法就是用坐标平面上的点或曲线来表示纵坐标 y 是横坐标 x 的函数.

例 1.2.4　用图像法表示函数 $y=[x]$.

这里$[x]$表示不大于 x 的最大整数,称为 x 的整数部分,故常称之为**取整函数**,即若 $x=n+r$,n 为整数,$0\leqslant r<1$,则$[x]=n$.其图像见图 1.1.

3)解析法

所谓解析法就是将自变量与因变量之间的对应法则用方程给出.这些方程通常称为函数的解析表达式.

具体地,又分为三种情况:

(1)显函数,函数 y 由 x 的解析式直接表示出来,称这种形式的函数为**显函数**,如 y

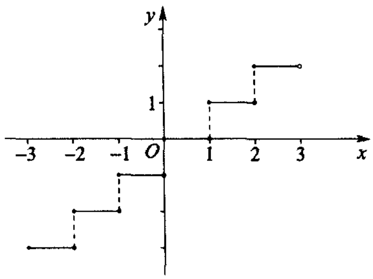

图 1.1 $y=[x]$的图像

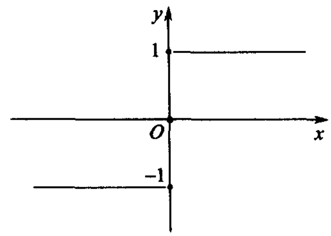

图 1.2 $y=\mathrm{sgn}\ x$

$=\sqrt{1-x^2}$.

(2)隐函数,自变量 x 和因变量 y 之间对应法则是由一个二元方程 $F(x,y)=0$ 给出的,并且 y 未被表示成 x 的显函数形式,则称此函数为**隐函数**,如 $e^y-xy=0$. 显然,隐函数是函数的更一般形式.这是因为显函数可看成隐函数,而且一个隐函数未必总能从其满足的方程 $F(x,y)=0$ 中解成显函数的形式.

(3)分段函数,在函数的解析表示法中,有些函数在其定义域的不同范围具有不同的解析表达式,这种函数称为**分段函数**.例如

$$y=\mathrm{sgn}\ x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0\end{cases}$$

是一个分段函数,其定义域为 $X=(-\infty,+\infty)$,这个函数称为**符号函数**,其图像如图 1.2 所示.应当注意的是,分段函数是用几个解析式子合起来表示一个函数,而不是几个函数.

1.3 函数的特性

1.3.1 函数的奇偶性

定义 1.3.1 设函数的定义域为 X,

(1) 如果对任意 $x\in X$,必有 $-x\in X$ 且 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$为 X 上的**奇函数**;

(2) 如果对任意 $x\in X$,必有 $-x\in X$ 且 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$为 X 上的**偶函数**.

例如,$y=x^3$是$(-\infty,+\infty)$上的奇函数,$y=x^2$是$(-\infty,+\infty)$上的偶函数.

说明:

(1)奇函数的图像关于原点对称,即如果点 $P(x,f(x))$在函数的图形上,则点 $P'(-x,-f(x))$也在此图形上,如图 1.3 所示.偶函数的图像关于 y 轴对称,即如果

点 $Q(x,f(x))$在函数的图形上,则点 $Q'(-x,f(x))$也在此图形上,如图 1.4 所示.

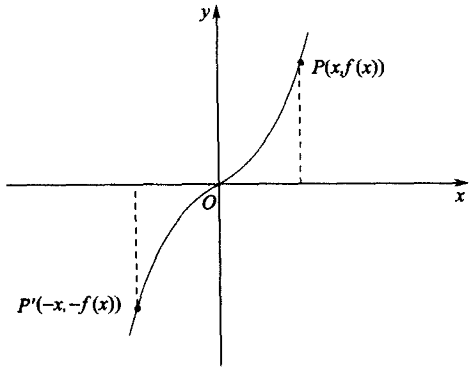

图 1.3　奇函数的图像关于原点对称

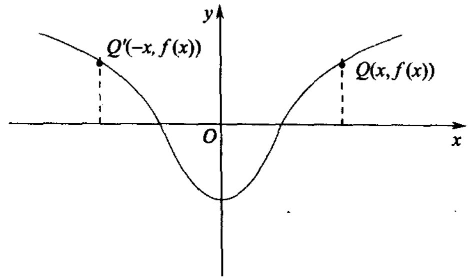

图 1.4　偶函数的图像关于 y 轴对称

(2)容易证明下列结论:

两个奇函数的代数和仍然是奇函数;两个偶函数的代数和仍然是偶函数.

两个奇(偶)函数的乘积是偶函数;一个奇函数与一个偶函数的乘积是奇函数.

1.3.2　函数的单调性

定义 1.3.2　设函数 $y=f(x)$的定义域为 X,区间 $I\subset X$,如果对于区间 I 上任意 x_1及 x_2,当 $x_1<x_2$时,恒有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\quad (f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 上**单调增加**(**单调减少**)(图 1.5(a),(b));如果对于区间 I 上任意两点 x_1及 x_2,当 $x_1<x_2$时,恒有

$$f(x_1)<f(x_2)\quad (f(x_1)>f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 上**严格单调增加**(**严格单调减少**).单调增加(或严格单调增加)和单调减少(或严格单调减少)函数统称为**单调函数**.

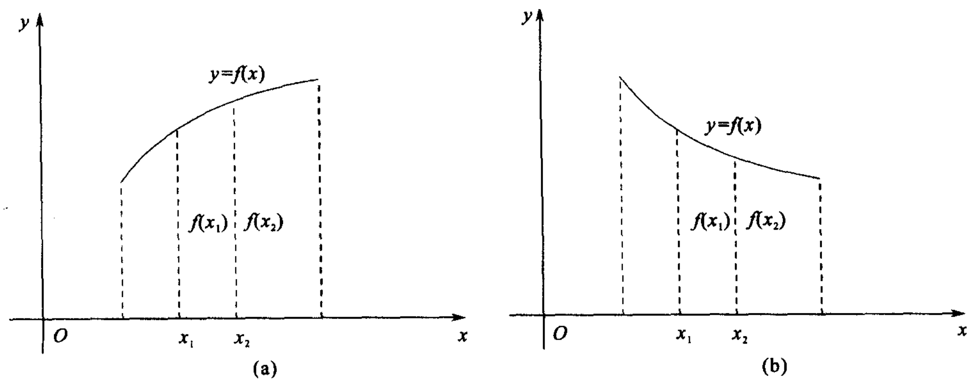

图 1.5　函数的单调性

(a)单调增加的函数　(b)单调减少的函数

注意,函数的单调性往往与讨论的区间有关.例如,函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的,在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的,但在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内它不是单调的.

1.3.3 函数的有界性

定义 1.3.3 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,数集 $X\subset D$.如果存在常数 M,使得对任意 $x\in X$,恒有 $f(x)\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界,称 M 为 $f(x)$ 在 X 上的一个**上界**.如果存在常数 m,使得对任意 $x\in X$,恒有 $f(x)\geqslant m$,则称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界,称 m 为 $f(x)$ 在 X 上的一个**下界**.如果存在正常数 K,使得对任意 $x\in X$,恒有 $|f(x)|\leqslant K$,则称 $f(x)$ 在 X 上**有界**.如果这样的 K 不存在,即对任何正常数 K,总存在 $x_0\in X$, 使得 $|f(x_0)|>K$,则称函数 $f(x)$ 在 X 上**无界**.

例如:函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有上界,数 1 就是它的一个上界(当然,大于 1 的任何数也是它的上界);同时,它在 $(-\infty,+\infty)$ 内也有下界,数 -1 就是它的一个下界(当然,小于 -1 的任何数也是它的下界).又对任何 $x\in(-\infty,+\infty)$,恒有 $|\sin x|\leqslant 1$,故 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的,这时 $K=1$(当然也可取大于 1 的任何数作为 K,而使 $|f(x)|\leqslant K$ 成立).

例 1.3.1 试证函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(\delta,1)$(这里 $0<\delta<1$)内有界,而在开区间 $(0,1)$ 内无界.

证 因为对任何 $x\in(\delta,1)$,恒有

$$|f(x)|=\left|\frac{1}{x}\right|=\frac{1}{x}<\frac{1}{\delta}=M,$$

由定义 1.3.3, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(\delta,1)$ 内有界.

因为对任意给定的正数 M,可令 $x_0=\dfrac{1}{M+1}\in(0,1)$,则

$$f(x_0)=\frac{1}{x_0}=M+1>M.$$

因此, $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内无界.

1.3.4 函数的周期性

定义 1.3.4 设函数 $f(x)$ 的定义域为 X,如果存在常数 $T>0$,使得对任何 $x\in X$, $x\pm T\in X$,恒有 $f(x\pm T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的**周期函数**.

说明:

(1)满足 $f(x\pm T)=f(x)$ 的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的**最小正周期**,通常将这个正周期称为 $f(x)$ 的**基本周期**,简称**周期**.例如, $f(x)=\sin x$ 是周期函数, $2n\pi$ 都是