



徐兵 孙毅 编著

高等数学 大讲堂

单项选择题专项突破



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS



高等数学大讲堂

单项选择题专项突破

徐兵 孙毅 编著



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

© 大连理工大学出版社 2005

图书在版编目(CIP)数据

高等数学大讲堂·单项选择题专项突破 / 徐兵, 孙毅编著. — 大连: 大连理工大学出版社, 2005. 8

ISBN 7-5611-2974-2

I. 高… II. ①徐… ②孙… III. 高等数学—研究生入学考试—自学参考资料 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 089747 号

大连理工大学出版社出版

地址: 大连市凌水河 邮政编码: 116024

电话: 0411-84708842 传真: 0411-84701466 邮购: 0411-84707961

E-mail: dutp@dutp.cn URL: <http://www.dutp.cn>

大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸: 140mm × 203mm 印张: 6 字数: 213 千字

印数: 1 ~ 6 000

2005 年 8 月第 1 版 2005 年 8 月第 1 次印刷

责任编辑: 吴孝东

责任校对: 白长勋

封面设计: 宋 蕾

定 价: 12.00 元

卷首感言



大学是人一生中最为关键的阶段。从入学的第一天起,你就应当对大学四年有一个正确的认识和规划。为了在学习享受到最大的快乐,为了在毕业时找到自己最喜爱的工作,每一个刚进入大学校园的人都应当掌握七项学习:学习自修之道、基础知识、实践贯通、兴趣培养、积极主动、掌控时间、为人处事。只要做好了这七点,大学生临到毕业时的最大收获就绝不会是“对什么都没有的忍耐和适应”,而应当是“对什么都可以有的自信和渴望”。只要做好了这七点,你就能成为一个有潜力、有思想、有价值、有前途的、快乐的毕业生。

数学是理工科学生必备的基础。很多学生在高中时认为数学是最难学的,到了大学里,一旦发现本专业对数学的要求不高,就会彻底放松对数学知识的学习,而且他们看不出数学知识有什么现实的应用或就业前景。但大家不要忘记,绝大多数理工科专业的知识体系都建立在数学的基础之上。例如,要想学好计算机工程专业,那至少要把离散数学(包括集合论、图论、数理逻辑等)、线性代数、概率统计和数学分析学好;要想进一步攻读计算机科学专业的硕士或博士学位,可能还需要更高的数学素养。同时,数学也是人类几千年积累的智慧结晶,学习数学知识可以培养和训练人的思维能力。通过对几何的学习,我们可以学会用演绎、推理来求证和思考的方法;通过学习概率统计,我们可以知道该如何避免钻进思维的死胡同,该如何让自己面前的机会最大化。所以,大家一定要用心把数学学好,不能敷衍了事。学习数学也不能仅仅局限于选修多门数学课程,而是要知道自己为什么学习数学,要从学习数学的过程中掌握认知和思考的方法。

虽然我一向鼓励大家追寻自己的兴趣,但在这里仍需强调,生活

中有些事情即便不感兴趣也是必须要做的。例如，打好基础，学好数学、英语和计算机的使用就是这一类必须做的事情。如果你对数学、英语和计算机有兴趣，那你是幸运儿，可以享受学习的乐趣；但就算你没有兴趣，你也必须把这些基础打好。打基础是苦功夫，不愿吃苦是不能修得正果的。

经过大学四年，你会从思考中确立自我，从学习中寻求真理，从独立中体验自主，从计划中把握时间，从交流中锻炼表达，从交友中品味成熟，从实践中赢得价值，从兴趣中攫取快乐，从追求中获得力量。

离开大学时，只要做到了这些，你最大的收获将是“对什么都可以拥有的自信和渴望”。你就能成为一个有潜力、有思想、有价值、有前途的中国未来的主人翁。

李开复

2005年2月

——摘自：“给中国学生的第四封信：大学四年应是这样度过”

前言

硕士研究生入学统一考试的数学试题主要有三种题型,即填空题、单项选择题和解答题(包括计算题、应用题和证明题)。其中单项选择题是数学试题的三种主要题型之一。本套丛书是按照全国硕士研究生入学统一考试《数学考试大纲》编写的考研参考书,专门介绍单项选择题,分为三册:高等数学(含微积分和空间解析几何)、线性代数、概率论与数理统计。

鉴于选择题特有的考核功能,即是考查基本概念、基本理论和逻辑推理能力的有效题型,选择题在硕士研究生入学统一考试数学试卷中所占比重比过去明显加大。按照教育部制订的《数学考试大纲》要求,目前单项选择题的题量已经增至8题,分值也已经超过试卷总分的1/5。因此,了解单项选择题的特点和功能,掌握其常用的解题方法(直选法和排除法);熟悉历年硕士研究生入学统一考试数学试卷选择题常考题型的解题方法和技巧,强化备考的知识、能力和基本方法,对于考生迅速、准确地做好选择题,争取满意的考试成绩是十分必要的。为此,我们编撰了这本《高等数学大讲堂·单项选择题专项突破》。本书可以作为经济类、管理类和工学类各专业报考硕士研究生的学习指导书,也可以作为相关专业在校大学生、大专生和自考生学习高等数学的参考书。

本书根据全国硕士研究生入学统一考试《数学考试大纲》,以及经济类、管理类和工学类线性代数教学大纲编撰。在编撰中,参考了大量有关教材和资料,汇集了作者在长期教学和多年命题工作中积累的大量试题。本书是按照《数学考试大纲》的章节顺序编写的,全书各章内容包括:第1部分是“概念、性质和公式”,按照考试大纲要求,简明扼要地归纳和总结了有关概念、性质、公式和基本方法,目的是使考生能在较短时间内复习和掌握有关重点及热点问题。第2部分是“典型例题分析”,编选了历年硕士研究生入学统一考试数学试卷

中的大量高等数学选择题,精选了部分考研辅导中的典型试题,讲解和分析了这些试题的解题方法和技巧,并结合试题分析了有关知识点的内在联系,有利于读者开阔解题思路,提高解题能力。习题部分,根据考试大纲和近年考研试题的变化趋势,精选了适量的习题,并给出分析和解答,便于读者复习自测。

本书难免有不足和疏漏之处,恳请读者批评指正。

编著者
2005年8月

致读者

填空题、选择题、解答题和证明题是数学考试的四种基本题型。其中填空题和选择题由于标准答案惟一,评分时不存在主观性误差,因此称为客观性试题。由于客观性试题评分的随机误差小,这对于提高考试的信度有利。

本书向读者介绍高等数学部分的选择题,期望能够通过此书,帮助读者理解高等数学的主要概念的要素,认清其实质。理解性质,明确其特征。尽力作到了解概念、性质的内涵与外延,即它们的本质属性与适用范围的拓展等。特别是对于备考硕士研究生的考生,能增强解选择题的能力,从而达到提高考试成绩的效果。

下面先简单介绍选择题的常见类型及解法:

① 选择题的主要类型与考核功能

选择题一般围绕有关内容的重要或关键环节,考查对内容理解的深度,是否抓住问题的关键,是否掌握了有关内容和其他内容的联系与区别。

选择题主要类型有:

(1) 计算性选择题

主要考核基本方法运算能力和是否出现某些典型计算错误。

(2) 概念性选择题

主要考核基本概念的定义和本质属性的理解、概念内涵和处延的理解和掌握。

(3) 理解性选择题

主要考核对基本定理、性质、法则和公式的理论和掌握。并考核分析、判断、类比、归纳等逻辑思维能力。

后两类题涉及概念和定理的各种变式,迷惑性较强,难度较大,考试题中多属这两类。

② 选择题的常见解法

2.1 计算、推理判断正确选项

【例1】 (940103) 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2} \cos^4 x dx$,

$N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x + \cos^4 x) dx$, $P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \sin^3 x - \cos^4 x) dx$, 则有()。

- A. $N < P < M$ B. $M < P < N$
C. $N < M < P$ D. $P < M < N$

分析 本题考核的知识点为定积分的对称性质。题目所给的三个积分都是对称区间上的积分,三个被积函数都为连续函数,题目只要求比较 M, N, P 的大小,而不关心它们的值是多少,因此可以考虑利用定积分的对称性。

由于 M 中的被积函数为奇函数,因此 $M = 0$ 。

N 中的被积函数 $\sin^3 x + \cos^4 x$ 既非奇函数,也非偶函数。但是可以认定 $f_1(x) = \sin^3 x, f_2(x) = \cos^4 x$, 则 $f_1(x)$ 为奇函数, $f_2(x)$ 为偶函数,因此

$$\begin{aligned} N &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x + \cos^4 x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx > 0 \end{aligned}$$

同时

$$\begin{aligned} P &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \sin^3 x - \cos^4 x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^3 x dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx \\ &= -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx < 0 \end{aligned}$$

因此有 $P < M < N$, 可知应选 D。

注意 为了能简洁地传递考研信息,本书中对所选用的历年考研真题采用“年代/类别/分值”的标注方式。如本题中的“940103”表示1994年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试卷分值为3分的试题。

2.2 计算、推理排除错误选项

【例2】 (910103, 910203) 曲线 $y = \frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$, 则()。

- A. 没有渐近线 B. 仅有水平渐近线
C. 仅有铅直渐近线 D. 既有水平渐近线, 又有铅直渐近线

分析 由于

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}} = 1$$

可知 $y = 1$ 为曲线的水平渐近线, 因此应排除 A, C。

由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}} = \infty$, 可知 $x = 0$ 为曲线的铅直渐近线, 可知应排除 B。

故应选 D。

【例3】 (000203) 设 $f(x) = \frac{x}{a + e^{bx}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, 则常数 a, b 满足()

- A. $a < 0, b < 0$ B. $a > 0, b > 0$
C. $a \leq 0, b > 0$ D. $a \geq 0, b < 0$

分析 本题为连续性的反问题。

由于 $f(x) = \frac{x}{a + e^{bx}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 因此 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 可知 $a + e^{bx}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内不等于零, 从而 a 不能小于零。应排除 A、C。

由于 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, 可知应有 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (a + e^{bx}) = \infty$, 因此 $b < 0$, 可知应排除 B。综上应该选 D。

说明 本题难度系数为 0.71。

【例4】 (040104) 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f'(0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得()。

- A. $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 内单调增加
B. $f(x)$ 在 $(-\delta, 0)$ 内单调减少
C. 对任意的 $x \in (0, \delta)$ 有 $f(x) > f(0)$
D. 对任意的 $x \in (-\delta, 0)$ 有 $f(x) > f(0)$

分析 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内有 $f'(x) > 0$, 则可以得知 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调增加。函数 $f(x)$ 只在一点处的导数大于零, 不能推导出 $f(x)$ 在该点邻域内单调性, 因此排除 A、B。

由导数的定义知

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} > 0$$

由极限的保号性可知, 存在 $\delta > 0$, 当 $x \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$ 时, 有

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} > 0$$

可知在 $(-\delta, 0)$ 时, $f(x) < f(0)$;

当 $(0, \delta)$ 时, $f(x) > 0$ 。

可知应排除 D, 应选 C。

说明 本题难度系数为 0.747。

【例5】 (010103) 设函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 附近有定义, $f'_x(0, 0) = 3$, $f'_y(0, 0) = 1$, 则()。

- A. $dz|_{(0,0)} = 3dx + dy$
B. 曲面 $z = f(x, y)$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的法向量为 $(3, 1, 1)$

C. 曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = 0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的切向量为 $(1, 0, 3)$

D. 曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = 0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的切向量为 $(3, 0, 1)$

分析 注意全微分存在的充分条件为: 设 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 处存在连续偏导数 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_P, \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_P$, 则 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 处可微分, 且 $dz|_P = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_P dx + \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_P dy$. 所给题目没有指出偏导数的连续性, 因此 A 不正确。

注意切平面存在的充分条件: 设 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处存在连续偏导数, 则曲面 $z = f(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 处存在切平面, 其方程为

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{P_0} (x - x_0) + \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{P_0} (y - y_0) = z - f(x_0, y_0)$$

其法向量为 $\left(\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{P_0}, \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{P_0}, -1 \right)$. 由于所给题目没有指出偏导数的连续性, 因此曲面 $z = f(x, y)$ 在给定处不一定存在切平面, 可知 B 不正确. 事实上, 即使题目中补充 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处有连续偏导数, B 也不正确, 因为此时法向量为 $(3, 1, -1)$.

由上述分析可知, 如果题目中选项 B 中的法向量换为 $(3, 1, -1)$, 此处 B 也不正确, 但是题目的难度将会很大。

注意一元函数导数的几何意义: 若 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处存在切线, 且切线的斜率为 $f'(x_0)$, 因此切向量 $(1, f'(x_0))$. 由此可知当 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 存在偏导数 (不一定是连续偏导数!), 则曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = 0 \end{cases}$ 在点 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 必定存在切线, 且切向量为 $(1, 0, f'_x(x_0, y_0))$. 从而知 C 正确, D 不正确。

● 本题难度系数为 0.35。

2.3 利用几何意义求解

【例 6】 (970103) 设在区间 $[a, b]$ 上函数 $f(x) > 0, f'(x) < 0, f''(x) > 0$, 令 $S_1 = \int_a^b f(x) dx, S_2 = f(b)(b-a), S_3 = \frac{1}{2}[f(b) + f(a)](b-a)$, 则 ()。

A. $S_1 < S_2 < S_3$

B. $S_2 < S_1 < S_3$

C. $S_3 < S_1 < S_2$

D. $S_2 < S_3 < S_1$

分析 此题也可以利用定积分的几何意义来求解。

由题目对函数 $f(x)$ 图形性态的描述, 可知 $f(x)$ 在 x 轴上方, 单调下降且曲

线为向上凹的,如图1所示。 $S_1 = \int_a^b f(x)dx$ 表示以 $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ 及 x 轴围成的曲边梯形的面积; S_2 表示矩形 $AEDB$ 的面积; S_3 表示梯形 $ABDC$ 的面积。因此应有 $S_2 < S_1 < S_3$ 。

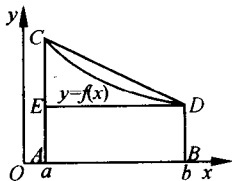


图 1

当然此题也可以利用分析法判定,但较复杂。由于题目为选择题,因此用上述分析较简单。本题难度系数为 0.57。多数考生利用分析法求解此题。

2.4 利用几何猜想法求解

对于一些抽象函数,不能画出其图形,但是有时候利用几何趋势可以猜想,以简化分析。

【例 7】(020103) 设函数 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有界且可导,则()

- A. 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 时,必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$
- B. 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在时,必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
- C. 当 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ 时,必有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$
- D. 当 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$ 存在时,必有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

分析 对于 A, 设 $f(x) = \frac{\sin x^2}{x}$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x^2}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 因此 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有界且可导。

$$f'(x) = 2\cos x^2 - \frac{\sin x^2}{x^2}$$

可知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 不存在, 因此 A 不正确。

对于 C, 设 $f(x) = \sin x$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有界且可导, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, 但 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1 \neq 0$, 可知 C 不正确。

对于 D, 设 $f(x) = \cos \sqrt{x}$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有界且可导, $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin \sqrt{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\frac{1}{2} \neq 0$, 可知 D 不正确。

利用反证法可知 B 正确。

因此本题应选 B。

事实上, 举反例是较困难的。往往对于一些新问题是难以实现的。

如果利用几何图形猜想, 也可以简便地求解此题。如图 2 所示。

由图 2(a) 可见 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 但 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 不存在或不等于 0, 可知 A 不正确。

由图 2(b) 可见 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, 但 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$ 不存在或不等于 0, 可知 C 不正确。

由图 2(c) 可见 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$ 存在, 但 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) \neq 0$, 可知 D 不正确。

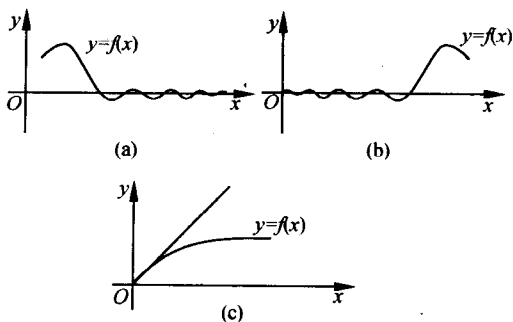


图 2

因此应选 B。

利用几何图形猜想是应该学习的一种技巧。

这是与例 6 不同的方法。例 6 是能画出几何图形, 利用几何图形得出问题解。而本例是不能画出函数图形的, 只是利用几何趋势进行猜测, 因此这里分两段介绍。

● 本题难度系数为 0.39。

为了有助于读者学习高等数学, 在此向读者推荐两本与本书配套的书, 这是两本有特色的专题书:

(1)《硕士研究生数学入学考试焦点概念·性质·百题百分》, 北京航空航天大学出版社, 徐兵编著, 2005 年 2 月第 5 版。

(2)《高等数学大讲堂·焦点运算与典型错误分析》(修订增补版), 大连理工大学出版社, 徐兵编著, 2005 年 5 月。

这几本书一定能帮助你学好高等数学, 并在考试中取得好成绩。

目 录

卷首感言

前言

致读者

第一章 函数、极限与连续性

概念、性质和公式	1
典型例题分析	6
习题一	18

第二章 一元函数微分学

概念、性质和公式	21
典型例题分析	29
习题二	65

第三章 一元函数积分学

概念、性质和公式	68
典型例题分析	76
习题三	96

第四章 多元函数微分学

概念、性质和公式	99
典型例题分析	105
习题四	114

第五章 多元函数积分学

概念、性质和公式	117
典型例题分析	130
习题五	139

第六章 无穷级数

概念、性质和公式	141
典型例题分析	149
习题六	161

第七章 常微分方程

概念、性质和公式	164
典型例题分析	167
习题七	171
习题参考答案	173

第一章 函数、极限与连续性

概念、性质和公式

① 极限

1.1 极限的定义

(1) 数列的极限

定义 1 如果对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 总存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| < \epsilon$ 成立, 则称常数 a 为数列 $\{x_n\}$ 当 n 趋于无穷时的极限。记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 。

(2) 函数的极限

定义 2 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义。如果对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$ 使得对于满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的一切 x , 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限。记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 。

定义 3 如果对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 总存在 $N > 0$, 使得对于满足 $|x| > N$ 的一切 x , 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称常数 A 为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限。记为 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 。

(3) 左极限与右极限

定义 4 在 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的定义中, 把 $0 < |x - x_0| < \delta$ 改为 $x_0 - \delta < x < x_0$, 那么 A 就称为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的左极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0 - 0) = A \text{ (或 } f(x_0^-) = A)$$

定义 5 在 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的定义中, 把 $0 < |x - x_0| < \delta$ 改为 $x_0 < x < x_0 + \delta$, 那么 A 就称为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的右极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0 + 0) = A \text{ (或 } f(x_0^+) = A)$$

定义 6 在 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 的定义中, 把 $|x| > N$ 换为 $x > N$, 那么 A 就称

为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 。

定义 7 在 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 的定义中, 把 $|x| > N$ 换为 $-x > N$, 那么 A 就称为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow -\infty$ 时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 。

1.2 无穷小量与无穷大量

定义 8 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 那么就称函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0 (x \rightarrow \infty)$ 时为无穷小量(或称无穷小)。

如果当 $x \rightarrow x_0 (x \rightarrow \infty)$ 时, 对应的函数值的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大, 那么就称 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0 (x \rightarrow \infty)$ 时为无穷大量(或称无穷大)。

1.3 极限的性质

性质 1 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$, 则必定存在 x_0 的某邻域, 在该邻域内任何异于 x_0 的点 x 处, 恒有 $f(x) > 0$ 。

性质 2 若 $f(x) \geq 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则必有 $A \geq 0$ 。

性质 3 $f(x)$ 在点 x_0 处极限存在的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处的左极限与右极限都存在且相等, 此时三者值相同。

1.4 无穷小量的性质

为了简便, 首先约定下列性质中所讲的无穷小量与无穷大量是指在同一过程。在性质的叙述中省略不提。

性质 1 有限个无穷小量之和仍为无穷小量。

性质 2 有界函数与无穷小量之积仍为无穷小量。

性质 3 有限个无穷小量之积仍为无穷小量。

性质 4 若 $f(x)$ 为无穷大量, 则其倒数 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小量; 若 $f(x)$ 为无穷小量, 且 $f(x) \neq 0$ 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大量。

性质 5 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha$, 其中 α 当 $x \rightarrow x_0$ 时为无穷小量。

性质 5 又称为极限基本定理。

无穷小量阶的比较

定义 9 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} \beta = 0$ 。

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = 0$ 则称在 $x \rightarrow x_0$ 时, α 为较 β 高阶无穷小量, 常记为 $\alpha = o(\beta)$;