

編初理月

英國卜朗著

譯貴景盧

今弟贈閱
五月七日
午時

中華民國二十五年六月初版

月理初編

An introductory Treatise on the Lunar Theory

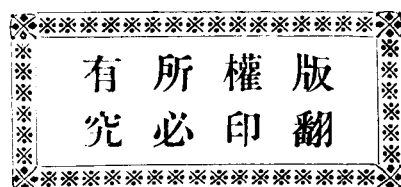
每冊定價國幣肆元

原著者 Ernest W. Brown

譯者 盧景貴

發行者 天津義租界西
交界路廿五號 盧景貴

印刷者 天津百城書局



此乃天文學中專門講述
利用牛頓攝力定律推解
太陰行動之法理藉得步
算其古今將來任何時麗
天精確位置之書也

著 者 叙 文

近二十年來對於三體問題之特例之所謂月理者所作之研究業在該題引起廣大之興趣,此題固向爲多數算學家所棄置者也.關於諸法在實用方面着想之價值固多所考究,但在晚近對於向所忽視之理論的重要問題亦加討論,如積分數及周期性解之存在以及解之經用無限級數之表示皆其例也.

爲明瞭此加於月理之諸檢討,舊法之認識縱非必要,亦所欲也.本書爲努力供給在此方面之需要,乃給有處理法所據之普遍原理,並其如何被用於拉普拉瑟,狄龐德古蘭,韓申,德羅訥以及最新用矩形座標值之法之諸月理焉.書中含容此諸法之解釋及爲成就此目的所需之推闡及展開而不及由之所得之實在結果,斯爲余之主旨.

無限級數之用途致有研究其收斂性之需要,凡月理書中此當佔重要地位,但因在此題之知識缺乏穩定,故不得不置而不論.利用所得之結果以製月表實足指明該級數合於實用,但利用之以表示解式是否相宜僅爲幾個簡單的例討論之.且當該級數依任何曲線常數 (Parameter) 之次方數排列時,其收斂性之半徑 (Radius of convergence, 關於此名詢參看 Chrystal's Test Book of Algebra, Pt. II p. 199) 僅爲橢圓行動定之.又有許多理論的檢討,在長編之書應當收入者,亦彼棄去;但希望所給之參考將致此書足以襄助其欲進而學其高深部分者以及其僅欲得關於舊法之知識者.

此題之難由於其固有者少，而多由於其所被展示於初次接近者之前之形式（方法）也。舊日講月理之書籍皆爲原論文，並未含有通常想爲明白認識此題之範圍及限制所不可少的詳論。原著者又多注意其自己的方法，且於表示同一函數之諸樣算式間尋出存在之關係恆屬惱人之事。是以余特致意於此點，並及於與此最接近之點，即在受有攝動的行動內諸常數之定義及物理的意義也。

由上之五法中須選一據以述諸法共有之性質，余決然採取狄龐德古蘭者。蓋拉普拉瑟取真經度以代時爲獨立變數，不倒轉其級數頗難詮釋其結果，而韓申及德羅訥之月理又不適用於所向之目標也。狄龐德古蘭之近似數法與拉普拉瑟者相似，是以爲講解拉普拉瑟處理法只給行動方程式，一次近似數及如何求得二次及高次近似數之法之概略，斯已足矣。

在講述狄龐德古蘭、韓申、及德羅訥法之編中余曾於表示之形式及證法加以改變以期趨於單簡，苟其異於原論文者極爲重要必加說明，爲易於參考原論文，乃儘力採用原代字，遂致有三種不同的代字，卷末之表示其常用於何章內並襄助讀者尋察常見代字之意義。

第四章分別載述攝動函數、行動方程式、關於橢圓行動的展開以及所採用推求近似解之法等項之研究。所用中間軌道一名詞乃指任何軌道之可用作實行道之近似者，此意略與蓋爾單所給者不同。第伍章內爲受攝動的行動之根數尋求其變動之方程式，既用初步之法亦用賈考卜精而且相稱的方法。攝動函數的推闡之性質及方法彙述於第陸章內。

狄龐德古蘭方程式之二次近似解之全部及三次近似解之部分在第柒章詳述之；將諸差分類以便顯明其來原。第捌章講述隨意常數，以簡單而且明晰爲旨。

玖拾兩章分別載述德羅訥及韓申月理，在後者特爲盡力免除其原著作之困難及模糊不清。在第拾壹章內余勉給一處理月行動內日

差之完全方法，乃依據何義兒博士所創處理日差之有關於日月平行比數之部分之法也。在卑點平行及交點平行之主要部分之推算中生出之無限排列式（亦曰行列式）頗受較長之討論，其收斂性及其展爲級數之條件亦包括在內。第拾貳章略述前此以外之主要方法。

在第拾叁章內討論由行星作用及由地球扁率而生之差。在本書篇幅內頗難給精細之推算，此僅用何義兒所改之德羅訥法處理之。惟由於黃道行動之差及平行之長差係屬例外，蓋用他法較簡單也。

余所參考之原論文皆於書內註明。梯瑟樂德之天體力學第一及第三兩卷內所收集之方法尤常借助焉。

達爾文 (G. H. Darwin)，賀卜申 (E. W. Hobson) 及以高畏爾 (P. H. Cowell) 對此書皆多所贊助，特爲申謝。而劍橋大學印刷所正當余暫住劍橋時排印，得令余親自照看俾免延遲及困難，其合作誠意至深感佩。

西曆 1895 年十二月十三日。

卜 朗。

譯 者 叙 文

吾國推步月麗之法早見於史冊，然術者深秘其理，故示人以玄奧，乃或託易數，或託律理，遂致學者昧於真象，難得取而研究之。雖其法代有進步，然以郭守敬歷法之密，推食亦不免有四五刻之差，無怪明末西法東來而中土驚羨其日月食之推算精妙也。

夫彼時東來者乃多祿某加輪之法也。其視今之牛頓攝力之法已較疎矣。今法月理經諸天算家之推闡已至精密，然猶不能無差。惟今日推算月之位置以差八秒弧者已爲甚大，其較向之以差八分弧爲甚小者爲何如耶？又視向之推食差四五刻之多而尤以爲小者更何如耶？

多祿某之法有新法歷書及歷象考成前編可查，卡西尼之牛頓攝力月理歷象考成後編略有所列。自茲以下諸天算家在此學所作之研究，我國尙無專書論述，是以不揣譾陋，取卜朗之月理初編而譯之，以介紹於國人。

譯文則力求翔實，名詞則力求不違原意而仍註原文以免誤會。有數處仍恐初學者難於領會，特參考旁書加以解釋，或略爲推演以使明顯。原書誤印之處亦爲改正。

卜朗於公佈此書後，曾在1901至1908年刊印之英國皇家天文學會記錄內，公佈其自作之月理。又在1913至1915年該會之月報內，討論其根據觀測而定之基本常數及最末所採用之數字值。復據其月理並得海德里克(H. B. Hedrick)之幫助，經九年之推算，於1919年製成月表，

由耶魯大學刊佈。從此英美二國歷書即棄去韓申月表而採用此新表矣。茲在書末收入卜朗所得月座標值之數字值的全式至其月理及其對於常數之討論將俟暇時再為譯出。

關於本書所用之譯名有一點須加說明。此即方程式之 degree 及 order 二字之分別也。此二字均可譯為次字。前者在代數學內久已譯為次字，習為固然矣。故在微分方程式內，不得不以級字譯 order。鄙意此 order 一字兼有次第及等次二意，譯為級字不足以括次第之意，而次字足以包含等次的意義。故在本書內，改譯此字為次。而另覓 degree 之相當譯字。查方程式之 degree 由於整數的單項代數函數之 degree 而來。此 degree 之定義為：一整數的單項代數函數內其任一代字於相乘之下出現之次數稱之曰單項函數在該代字之 degree 或 dimension，且此單項函數在幾個代字之 degree 為其在此諸代字內各該代字之 degree 之和，例如 $6 \times a \times a \times x \times x \times x \times y \times y$ 即 $6a^2x^3y^2$ 之 degree 為在 a 之 degree 為 2，在 x 為 3，在 y 為 2，在 x 及 y 為 5，而在 $a, x,$ 及 y 為 7，換言之 degree 乃所論代字的指數之和也。據此是 degree 之意義乃由於代字出現之次數而來，所以譯為次字是對的。為別於 order 之次字本書將其譯為度字，因其亦有次數之意也。例如 equation of 2nd degree 乃譯為二度方程式；而於 quadratic equation 可譯為平方方程式，或二乘方程式，或二次方方程式；及於 2nd power of x 可譯為 x 之二次方數以資分別。

卜朗書中未及係數之推定，茲特譯告德夫累 (Godfray) 所著月理初編之第五章置於附錄中以補其缺。

本書之譯曾得卜朗先生函許而所加之改正亦經其核對並承其開示其他應改之點，於此特向之表示謝忱。

鄙人學識淺薄，書內難免有欠適當之處，倘蒙指正俾得修改以達完善，幸甚幸甚。

民國二十四年十月二十日

瀋陽介卿盧景貴識於天津。

章 目

第 壹 章

力 函 數

節	頁
1. 單位	1
2. 三體問題	2
3, 4. (i) 對於地之力	2—5
5, 6. (ii) 施於月而對於地之力, 及施於日而對於地月 公共質心之力	5—7
7, 8. 常用之力函數及攝動函數	7—8
9. 月理及行星理間之分別	9—10
10. p 個天體之力函數	10—11

第 貳 章

行 動 方 程 式

11. 處理之法	12
12—15. (i) 狄龐德古蘭方程式	13—17
16, 17. (ii) 拉普拉瑟方程式	17—19
18—21. (iii) 準行動矩形座標軸線之行動方程式	19—24

22.	特定之例:棄去日視差者	25—26
23.	特定之例:棄去日視差及月交角者	26
24.	賈考卜積分數	27
25—30.	(iv) 普遍三體問題之方程式. 十個已知積分數. 不變的平面,特別之例	27—30

第 叁 章

未受攝動的橢圓行動

31.	進行之法	31
32—47.	(i) 關於橢圓曲線之算式,展開及定理	31—41
32.	關於橢圓之普遍算式	31
33—36.	聯合帶徑,真卑點角及平卑點角之級數	32—34
37—42.	同樣式之用白塞爾函數組成者	34—37
43.	韓申定理	37—39
44—47.	斜交於標準面之橢圓	39—41
48—53.	(ii) 橢圓行動	41—44
48—52.	月之未受攝動的橢圓行動	41—43
53.	日之未受攝動的橢圓行動	44
54.	橢圓級數之收斂性	44—45

第 肆 章

解式之形樣. 第一次近似數.

55.	接近解式之兩個主要方法	46
56.	所給於座標值的算式之形樣	46
57—60.	中間軌道	47—48

61.	經連續近似數法之解式	49
62.	經隨意常數變動法之解式	49
63.	瞬時橢圓	49
64—66.	經連續近似數之求解法應用於狄龐德古蘭方程 式	50—52
67, 68.	中間軌道之修正	52—54
69.	爲座標值求得之級數之收斂性	54
70.	爲拉普拉瑟方程式之中間軌道之修正	54—55

第 伍 章

隨意常數之變動

71.	所用之兩個推闡法	56
72—92.	(i) 初級之處理法	56—70
73—74.	由於根數改變而生之位置改變	56—58
75.	攝動函數之微係數之算式之爲力組成者	58—59
76.	所附於記號 δ, ∂ 之意義	59
77—82.	根數之方程式之爲力組成者. 啟點	60—65
83.	根數之方程式之爲攝動函數的微係數組成 者	65—67
84—86.	德羅訥法組方程式	67—68
87—92.	前此結果之觀察	68—70
93—105.	(ii) 賈考卜法及拉格蘭基法	70—80
94.	哈密爾頓及賈考卜之重力學法	70—71
95—97.	據賈考卜法求橢圓行動	71—74
98.	據賈考卜法求隨意常數的變動	74—75
99, 100.	拉格蘭基法	75—76

101, 102.	偽根數及完善的座標值	76—78
103.	拉格蘭基法組常數	78—79
104.	韓申加於隨意常數變動法之推廣	79
105.	書文之參考	79—80

第 陸 章

攝 動 函 數

106, 107.	依日月去地距離之比數之次方數所作之推闡	81—82
108—121.	(i) 爲狄龐德古蘭方程式所需之 R 的推闡 R 之性質	82—91
108.	極點座標值組成之推闡 (推闡之爲極點座標值組成者)	82
109, 110.	橢圓根數及時組成之推闡	82—83
111, 112.	推闡之形式	83—84
113.	主數及係數間之關聯	84—85
114.	狄龐德古蘭的展開	85
115, 116.	攝動力之推定	85—87
117—120.	攝動函數內係數之次與座標值內係數之次之關係	87—90
121.	攝動函數及攝動力之二次近似數	90—91
122, 123.	(ii) 爲德羅訥月理之推闡	91—92
124—126.	(iii) 爲韓申月理之推闡	93—95
127.	(iv) 爲拉普拉瑟月理之推闡	95
128.	(v) 爲法之用行動的矩形座標值者之推闡	96

第 柒 章

狄龐德古蘭法

129.	所需前此結果之概要	97
130—133.	行動方程式之籌備. 進行之次第	97—100
134—138.	(i) 二均差	100—104
134—136.	二次近似數	100—102
137.	三次近似數	102—103
138.	結果	103—104
139—144.	(ii) 橢圓差. 卑點行動	104—107
139, 140,	二次近似數	104—107
141,	卑點行動之三次近似數	107—108
142,	(iii) 平周期差	108—109
143, 144.	(iv) 角差	109—111
143,	二次近似數	109—110
144,	三次近似數及結果	110—111
145—147,	(v) 緯度內之主要差. 交點行動	111—114
148,	(vi) 高次之差	115
149,	結果之概要	115—116
150,	攝動函數內爲特例所需之項之直接推定	116—116
151—153,	狄龐德古蘭之月理原著	117—119
154,	係數的級數之緩慢收斂性	119—120

第 捌 章

常數及其解釋

155,	所論之問題	121
156—161,	存在座標值最末算式內之常數之意義	122—126

162—164.	據觀測推定常數之數字值, 日的常數之值 . . .	126—129
165,	平周期及平距離 (中距)	129—130
166,	二均差及二均曲線	130—131
167,	角差 (視角差) 及角差曲線	131—133
168,	推定地月質量比數之方法	133
169,	主要橢圓項, 橢圓差, 出差及卑點行動	133—135
170,	利用變動的隨意常數所作之表示	135—136
171,	年差及平周期差	136
172,	緯度內及交點行動內之差	137
173,	主要差之量. 關於常數的數字值所由得之參考 書文	138
174,	在用真經度爲獨立變數時之卑點及交點行動	138—139

第 玖 章

德 羅 訥 月 理

175,	所用之方法. 所加於本題之限制	140
176,	前所得之法則方程式之缺點之由於當方程式被 積分時有時之存在爲一因數所起者	140—141
177,	所用轉變至新組變數之方法	141—142
178,	爲避免含時爲一因數之項所作之轉變	142—143
179,	代字之改變. 記號之意義	143—144
180,	攝動函數之推展式樣. 所用以表示係數之兩組 根數間之關係	140—145
181,	座標值在德羅訥的代字下之算式	145—146
182,	施行積分之方法	146
183, 184,	當攝動函數被限於一周期性項及其非周期性項	

	時法組方程之施行積分, 施行積分之新常數	146--149
185,	取新常數作為變數以計入 R 之棄去部分, 生出 之方程式為法則的	149--151
186,	在 183, 184 節內所得的解式之性質	151--152
187,	新攝動函數之式樣	152--153
188,	例理之為下次近似數所需要者	153--154
189,	新方程式至新變數之第一次轉變, 以期避免含時 為一因數之項	154--155
190,	至新變數之第二轉變, 俾當前所論及的周期性項 之係數被棄去時新方程將變至舊樣	156
191,	聯舊新變數之關係及聯舊新攝動函數之關係	156--157
192, 193,	應用於推算	157--160
194--196,	施算之特例	160--162
197,	德羅訥進行法之概要	162--164
198,	在攝動函數變至一非周期性項時之施行積分	164--165
199, 200,	為座標值所得之最後算式, 隨意常數之改變, 附於新隨意常數之意義	165--167
201,	德羅訥所得之結果	167

第 拾 章

韓 申 法

202, 203,	法之特徵, 其推展之歷史	168--169
204,	代字之改變	169--170
205, 206,	瞬時軌道, 後來所需之為瞬時軌道根數的函數 所得之方程式	170--172
207,	用此法之理由	172

208, 209,	補助橢圓, 其對於實行軌道之關係	172—174
210,	進行之方法	174
211—213,	爲 α, ν 所得之方程式 (用以求 α, ν 之方程式)	174—177
214, 215,	W 之方程式, 在施行微分及積分中某某部分可 作為常數	177—179
216,	在施行積分中生出之常數	179—180
217,	軌道平面之行動, 定義, 卑點及交點之平行	180—182
218, 219,	P, Q, K 之方程式之爲垂於軌道面之力所組成者 P, Q, K 之一次近似數	182—186
220, 221,	攝動函數之推闡之形式	186—188
222, 223,	攝動函數準 P, Q, K 的微係數之算式之爲垂於軌 道面的力組成者	188—190
224,	攝動函數及攝動之一次近似數	190—191
225,	軌道面內的攝動力一次近似數之算式之爲攝動 函數的微係數 (在其推展的形式) 組成者	191
226—228,	W 方程式之一次近似數, 推算此方程式之方法	191—194
229, 230,	W 的方程式之施行積分, ν 之推定及隨意常數 的形式之推定, $\bar{W}$ 之一次近似數	194—195
231, 232,	α 的方程式之施行積分, 所附於新隨意常數及 補助橢圓根數之意義	196—197
233, 234,	ν 的方程式之施行積分, 隨意常數爲其他隨意 常數組成者之推定	197—199
235,	P, Q, K 之方程式	199—200
236,	黃道行動之影響	200
237, 238,	P, Q, K 之一次及二次近似數, α, η 之推定及新 隨意常數之推定	200—202
239, 240,	求高次近似數之進行方法	202—203