周概容 编著

概率论与数理统计大讲堂

焦点运算与典型例题分析

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

概率论与数理统计大讲堂

焦点运算与典型例题分析

周概容　编著

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计大讲堂·焦点运算与典型例题分析 / 周概容编著.—大连：大连理工大学出版社，2004.10
ISBN 7-5611-2726-X

Ⅰ.概… Ⅱ.周… Ⅲ.①概率论—高等学校—教学参考资料②数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 094608 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市凌水河 邮政编码:116024
电话:0411-84708842 传真:0411-84701466 邮购:0411-84707961
E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:140mm×203mm 印张:5.75 字数:211 千字
印数:1～8 000
2004 年 10 月第 1 版 2004 年 10 月第 1 次印刷

责任编辑:吴孝东 责任校对:高继巍
封面设计:佟涤非

定 价:10.00 元

前　言

全国硕士研究生入学统一考试的数学试题有三种题型：填空题，(单项)选择题和解答题(包括计算题和证明题)，其中填空题多为“小型”计算题，有些选择题也是通过计算来求解的。这样，数学试题的“主体”是计算题。根据多年全国硕士研究生入学统一考试数学试卷的结构，几乎每年都有证明题，但是所占比重很小。

本书主要向读者展示各种计算题题型，也包括少量证明题和单项选择题。本书的目的不是“押题”，而是为读者提供试题的各种可能题型的范例，通过例题向读者剖析解题的思路，演示各种典型的解题方法和技巧。

全国硕士研究生入学统一考试《数学考试大纲》规定：数学一和数学三必考“概率论与数理统计”；数学四只考“概率论”(但是不考其中的“大数定律”)；数学二不考“概率论与数理统计”。

对于数学三和数学四，除数学四不考“大数定律”和“数理统计”外，“概率论”部分的考试内容与考试要求完全一致。数学一和数学三“概率论与数理统计”的考试内容和考试要求基本一致，有如下差别：

1. 考试内容：考试大纲第三部分的内容略有出入：数学一的第三部分内容是“二维随机变量及其分布”，而数学三和数学四的第三部分内容是“多维随机变量的分布”，其他部分完全一样。

2. 考试要求：我们仅指出数学一和数学三考试要求的不同之处。

(1)联合分布。数学一的考试大纲明确要求“二维情形”，而对一般情形未作明确规定；而数学三和数学四未明确提“二维”两字。根据以往的试卷分析，对于数学一、数学三和数学四，二维以上的多维随机变量的联合分布都出现过，但是只出现在较简单的情形，通常只涉及多个独立随机变量。

(2)数理统计的基本概念。数学一未要求有关“经验分布函数”的内容。而数学三要求“理解经验分布函数的概念和性质，会根据样

本值求经验分布函数”。

(3)假设检验的两类错误。数学一只要求“了解假设检验可能产生的两类错误”。而数学三要求“理解假设检验可能产生的两类错误,对于较简单的情形,会计算两类错误的概率”。

本书的读者对象是准备报考硕士学位研究生和MBA者,包括应届本科毕业生和同等学力考生。本书对于正在学习“概率论与数理统计”的学生,也是一本很好的参考书。

本书的作者参加了全国硕士研究生入学统一考试《数学考试大纲》的起草和历次修订,连续17年参加了全国硕士研究生入学统一考试“数学试题”命题组,并重点负责“概率论与数理统计”试题的命制。

周概容

2004年7月于南开大学

目　录

第一章　随机事件和概率

这一章讲事件及其概率，数学一、数学三和数学四中有关这部分内容的考试大纲、考试内容和考试要求完全一致。

1.1　事件及其关系和运算

1° 基本事件空间(样本空间)的概念；

2° 事件的关系和运算及其基本性质。

概念、公式和运算方法

1. 基本事件空间

随机试验 —— 对随机现象观测；基本事件(样本点)ω—— 试验最基本的结局；基本事件空间(样本空间)$\Omega = \{\omega\}$—— 一切基本事件(样本点)ω 的集合；随机事件 —— 随机现象的每一种状态或表现，随机试验结果，常用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示，有时用$\{\cdots\}$ 表示，而大括号中用文字或式子表述事件的内容；必然事件 Ω—— 每次试验都一定出现的事件；不可能事件 $\varnothing$—— 任何一次试验都不出现的事件。

2. 事件及其关系和运算

(1) 关系　包含 $A \subset B$；相等 $A = B$；不相容 $AB = \varnothing$；对立 $\overline{A} = \Omega - A$；

(2) 运算　和(并)$A + B(A \cup B)$；差 $A - B(A\backslash B)$；交 $AB(A \cap B)$。

(3) 完备事件组　$H_1, H_2, \cdots, H_n, \cdots$ 构成完备事件组，若

$$\bigcup_i H_i = \Omega,\quad H_iH_j = \varnothing(i \neq j)。$$

(4) 性质　事件的运算满足交换律、结合律、分配律和对偶律，其中对偶律指

$$\overline{A+B} = \overline{A}\,\overline{B};\quad \overline{AB} = \overline{A} + \overline{B};$$

$$\overline{A_1 + \cdots + A_n + \cdots} = \overline{A_1}\cdots\overline{A_n}\cdots;$$

$$\overline{A_1\cdots A_n\cdots} = \overline{A_1} + \cdots + \overline{A_n} + \cdots。$$

范例解析

1 基本事件空间

【例 1-1】 描绘下列随机试验的基本事件空间 Ω。

(1) 设 E 是自集合 $\{0,1\}$ 的两次还原抽样。

(2) 设 E 是接连对同一目标射击直到命中目标为止,并观察射击的次数。

(3) 设 E 是接连进行 3 次射击,并观测每次射击是否命中目标。

(4) 设 E 是自集合 $\{0,1,2,3\}$ 的两次非还原抽样。

(5) 设 E 是观察某交通干线上相继两次重大交通事故之间的时间间隔。

解析 (1) 可以用二维向量表示试验的每一个基本事件。因此 $\Omega=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$。

(2) 因为射击的次数可以是任一非负整数,所以基本事件空间可以表示为 $\Omega=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$;也可以表示为 $\Omega=\{\omega_n,n=1,2,\cdots\}$,其中 $\omega_n=(0,\cdots,0,1)$ 是第 n 个分量为 1,其余分量都为 0 的 n 维向量。

(3) $\Omega=\{000,001,010,011,100,101,110,111\}$,其中 0 和 1 分别表示未命中和命中。

(4) $\Omega=\begin{Bmatrix}(0,1),(0,2),(0,3),(1,2),(1,3),(2,3)\\(1,0),(2,0),(3,0),(2,1),(3,1),(3,2)\end{Bmatrix}$。

(5) $\Omega=(0,+\infty)$——一切正实数。

说明 由(2)可见同一个随机试验的基本事件空间,可以用不同的方法描绘。读者可以对该题的其他随机试验用不同的方法描绘同一随机试验的基本事件空间。

2 事件的关系和运算

【例 1-2】 事件的关系和运算。

(1) 化简事件的算式:$(A+C)(B+C)$。

(2) 设$(A+\overline{X})(\overline{A}+\overline{X})+\overline{A+X}+\overline{\overline{A}+X}=B$,求事件 X。

(3) 设事件 $A\subset B$ 且 $\overline{A}\subset\overline{B}$,说明事件 A 和 B 的关系。

解析 (1) 由事件运算的分配律和交换律,可见

$$\begin{aligned}(A+C)(B+C)&=(A+C)B+(A+C)C\\&=AB+BC+AC+C=AB+C\end{aligned}$$

(2) 根据事件的运算及其性质,可得

$$A\overline{A}+A\overline{X}+\overline{X}\,\overline{A}+\overline{X}\,\overline{X}+\overline{A}\,\overline{X}+A\overline{X}=B$$

$$(A+\overline{A})\overline{X}+\overline{X}+(\overline{A}+A)\overline{X}=B$$

$$\overline{X}=B,\quad X=\overline{B}。$$

(3) 根据条件 $A\subset B$,而由 $\overline{A}\subset\overline{B}$ 可见 $A\supset B$。于是 $A=B$。

【例 1-3】 设 A 和 B 是任意二事件,完成运算:

(1) $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})$;

(2) $AB+\overline{A}B+A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{B}-\overline{AB}$。

解析 (1) 由事件运算的性质,有

$$(A+B)(A+\overline{B})=AA+A\overline{B}+BA+B\overline{B}=A+A(\overline{B}+B)=A;$$
$$(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})=\overline{A}\,\overline{A}+\overline{A}\,\overline{B}+B\overline{A}+B\overline{B}=\overline{A}+\overline{A}(B+\overline{B})=\overline{A};$$
$$(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})=A\overline{A}=\varnothing。$$

(2) 由事件运算的性质,有

$$\begin{aligned}&AB+\overline{A}B+A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{B}-\overline{AB}\\=&(A+\overline{A})B+(A+\overline{A})\overline{B}-\overline{AB}\\=&B+\overline{B}-\overline{AB}=\Omega-\overline{AB}=AB。\end{aligned}$$

【例 1-4】 设 A,B 和 C 是任意三事件,讨论下列命题的正确性。

(1) 若 $A+C=B+C$,则 $A=B$;

(2) 若 $A-C=B-C$,则 $A=B$;

(3) 若 $AC=BC$,则 $A=B$;

(4) 若 $AB=\varnothing$ 且 $\overline{A}\,\overline{B}=\varnothing$,则 $\overline{A}=B$。

解析 前三个命题都不成立,只需分别举出反例。例如,由于 A,B,C 是二任意事件,取 $A\neq B$ 而 $C=\Omega$ 是必然事件,则 $A+C=B+C=\Omega$ 且 $A-C=B-C=\varnothing$ 但 $A\neq B$,从而命题(1) 和(2) 不成立。设 $A\neq B,C=\varnothing$,则 $AC=BC=\varnothing$ 但 $A\neq B$,从而命题(3) 不成立。最后,由事件运算的对偶律,可见

$$\overline{\overline{A}\,\overline{B}}=A+B=\overline{\varnothing}=\Omega。$$

而由 $A+B=\Omega$ 且 $AB=\varnothing$,可见 A 和 B 互为对立事件,即 $\overline{A}=B$,因此命题(4) 正确。

说明 该题的结果反映了事件的运算与数的运算的不同之处。

【例 1-5】 对于任意二事件 A 和 B,证明下列各关系式等价:

$$A\subset B,\overline{A}\supset\overline{B},A\overline{B}=\varnothing,A+B=B。$$

证明 设 $A\subset B$,即若 A 出现,则 B 必出现;从而,若 B 不出现,则 A 也不出现,即 $\overline{A}\supset\overline{B}$。由 $\overline{A}\supset\overline{B}$,可见 $\overline{A}\,\overline{B}=\overline{B}$,从而 $A\overline{B}=A\overline{A}\,\overline{B}=\varnothing$。设 $A\overline{B}=\varnothing$,则由

$$A+B=A(B+\overline{B})+(A+\overline{A})B=AB+\overline{A}B=B,$$

可见 $A+B=B$。由于 $A\subset A+B=B$,可见 $A\subset B$。于是,事件 A 和 B 的四个关系式等价得证。

【例 1-6】 设 A,B,C 是一随机试验的三个事件,证明 $(\overline{A+B})C=\overline{A}C+\overline{B}C$ 是 $AC=BC$ 的充分必要条件。

证明 (1) **必要性** 易见下列关系式等价：

$$AC = BC, AC + BC = BC,$$

$$(A+B)C = BC, \overline{A+B} + \overline{C} = \overline{B} + \overline{C}$$

$$BC = AC, BC + AC = AC,$$

$$(A+B)C = AC, \overline{A+B} + \overline{C} = \overline{A} + \overline{C},$$

其中两组关系式的最后一步都用到“事件的对偶律”。这样，我们证明了，若 $AC = BC$，则

$$\overline{A+B} + \overline{C} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}。$$

将第二个等式两侧的事件都与事件 C 相交，得 $\overline{A+B}C = \overline{A}C + \overline{B}C$。从而，证明了等式 $AC = BC$ 成立的必要条件，是 $\overline{A+B}C = \overline{A}C + \overline{B}C$。

(2) **充分性** 设 $\overline{A+B}C = \overline{A}C + \overline{B}C$ 成立，则由“事件的对偶律”，可见

$$\overline{\overline{A+B}C} = \overline{\overline{A}C + \overline{B}C}, A + B + \overline{C} = AB + \overline{C}。$$

在 $A + B + \overline{C} = AB + \overline{C}$ 两侧先同交以事件 C，然后同交以事件 A，得

$$AC + BC = ABC, \quad AC + ABC = ABC,$$

$$(A + AB)C = ABC, \quad AC = ABC;$$

在 $A + B + \overline{C} = AB + \overline{C}$ 两侧先同交以事件 C，然后同交以事件 B，得

$$AC + BC = ABC, \quad ABC + BC = ABC,$$

$$(AB + B)C = ABC, \quad BC = ABC。$$

于是，得 $AC = BC$，充分性得证。

1.2 概率的概念、性质、公式和计算

1° 基本概念：事件的概率，条件概率，试验及事件的独立性；掌握概率的基本性质和基本运算公式；掌握三个基本公式：乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式。

2° 事件概率的基本计算方法：直接计算；用频率估计概率；推算；利用概率分布。

■ 概念、公式和运算方法

1. 概率和条件概率

概率是事件在随机试验中出现的可能性的数值度量，用 $P(A)$ 表示事件 A 的概率，用 $P\{\cdots\cdots\}$ 表示事件 $\{\cdots\cdots\}$ 的概率。事件 B 关于 $A(P(A) > 0)$ 的条件概率为

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)}。$$

2. 概率的运算法则和基本公式

(1) 概率的公理　非负性、规范性和可加性；

(2) 对立事件的概率　$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$；

(3) 减法公式　$P(A - B) = P(A) - P(AB)$；

(4) 加法公式　$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$；

(5) 乘法公式　$P(AB) = P(A)P(B \mid A)$；

(6) 全概率公式　设 $H_1, H_2, \cdots, H_n$ 构成完备事件组，且 $P(H_i) > 0(i = 1,2,\cdots,n)$，则对于任意事件 A，

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A \mid H_k)。$$

(7) 贝叶斯公式　设 $H_1, H_2, \cdots, H_n$ 构成完备事件组，且 $P(H_i) > 0(i = 1,2,\cdots,n)$，则对于任意事件 A，

$$P(H_k \mid A) = \frac{P(H_k)P(A \mid H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A \mid H_i)}。$$

3. 事件的概率的计算

(1) 直接计算：古典型概率和几何型概率；

(2) 推算：利用概率的性质、公式和事件的独立性，由较简单事件的概率推算较复杂事件的概率。

(3) 利用概率分布：利用随机变量的概率分布计算有关事件的概率（概率分布见第一章和第二章）。

4. 独立事件和独立试验

(1) 概念　若事件 A 和 B 同时出现的概率等于 A 和 B 的概率的乘积：$P(AB) = P(A)P(B)$，则称事件 A 和 B 独立；若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 之中任意 $m(2 \leqslant m \leqslant n)$ 个事件同时出现的概率都等于各事件概率的乘积，则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立。

(2) 性质　设事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，那么

① 其中任意 $m(2 \leqslant m \leqslant n)$ 个事件也相互独立；

② 任何一个事件与其余任意 $m(1 \leqslant m \leqslant n-1)$ 个事件的和、交以及与其余任意二事件的差也独立；

③ 将任意 $m(1 \leqslant m \leqslant n)$ 个事件分别换成其对立事件后，所得 n 个事件也独立。

(3) 独立试验　称试验 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 为相互独立的，如果与各个试验相联系的任意 n 个事件相互独立。

范例解析

1 概率的直接计算

【例 1-7】(古典型概率)　将 A,C,I,I,S,S,S,T,T,T 等 10 个字母分别写在 10 张卡片上，然后将 10 张卡片随意排成一列，试求恰好排成英文单词“STATISTICS”(统计学)的概率 p。

解析　10 张卡片的不同排列法的总数(基本事件总数)为 $10! = 3628800$，其中恰好形成英文单词“STATISTICS”的不同排法有 $3!\times 3!\times 2! = 72$ 种，即有利的基本事件 72 个:在排列“STATISTICS”中，三张写有“S”的卡片交换位置形成 3! 种不同排法，三张写有“T”的卡片交换位置形成 3! 种不同排法，两张写有“I”的卡片交换位置形成 2! 种不同排法。于是

$$p = \frac{3!3!2!}{10!} = \frac{72}{3628800} = \frac{1}{50400} \approx 0.00001984。$$

【例 1-8】(古典型概率)　将一枚完全对称的色子接连掷两次，试求两次掷出的点数之和等于 10 的概率。

解析　基本事件的总数为 $6\times 6 = 36$，其中导致“点数之和为 10”的基本事件有 3 个:(4,6),(5,5),(6,4)。因此所求概率为

$$p = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}。$$

【例 1-9】(古典型概率)　铁路一编组站随机地编组发往三个不同地区 E_1，E_2 和 E_3 的各 2 节、3 节和 4 节车皮，试求发往同一地区的车皮恰好相邻的概率 p。

解析　该题可以用古典型概率求解，也可以利用乘法公式求解。

(1) 利用引进事件:$A=\{$发往同一地区的车皮恰好相邻$\}$;$B_i=\{$发往 E_i 的车皮相邻$\}(i=1,2,3)$。将发往 E_1,E_2 和 E_3 三个不同地区的车皮统一编组，且使发往同一地区的车皮恰好相邻的总共有 $3! = 6$ 种不同情形，其中每种情形对应 B_1,B_2 和 B_3 的一种排列，总共有 6 种不同情形且都是等可能的，例如 $B_1B_2B_3$ 是其中一种可能的情形，表示“发往 E_1 的 2 节车皮编在最前面，发往 E_2 的 3 节车皮编在中间，发往 E_3 的 4 节车皮编在最后面”。由古典型概率的计算公式，有

$$P(B_1B_2B_3) = \frac{2!\times 3!\times 4!}{9!} = \frac{2!\times 3!}{(9\times 8)\times(7\times 6\times 5)} = \frac{1}{1260},$$

$$p = P(A) = 6P(B_1B_2B_3) = \frac{6}{1260} = \frac{1}{210}。$$

(2) 利用公式求解。计算概率 $P(B_1B_2B_3)$ 亦可利用乘法公式:

$$P(B_1B_2B_3) = P(B_1)P(B_2 \mid B_1)P(B_3 \mid B_1B_2)$$

$$=\frac{2!}{9\times 8}\times\frac{3!}{7\times 6\times 5}\times 1=\frac{1}{1260}。$$

其中概率 $P(B_1)$,$P(B_2 \mid B_1)$,$P(B_3 \mid B_1B_2)$ 仍需按古典型概率求解。

说明 该题可以完全按古典型概率求解,然而用乘法公式计算比较简便。

【例 1-10】(古典型概率) 考虑一元二次方程 $x^2+Bx+C=0$,其中 B,C 分别是将一枚色子接连掷两次先后出现的点数,求方程有实根的概率 p 和有重根的概率 q。

解析 系数 B 和 C 各有 1,2,3,4,5,6 等 6 个可能值;将一枚色子接连掷两次,总共有 36 个基本事件。考虑方程根的判别式 $\Delta=B^2-4C$。事件{方程有实根}和{方程有重根},分别等价于事件$\{\Delta\geqslant 0\}$和$\{\Delta=0\}$。下表给出了事件$\{\Delta\geqslant 0\}$和$\{\Delta=0\}$所含基本事件的个数。

B	1	2	3	4	5	6	$\sum$
$\{\Delta=0\}$ 含基本事件数	0	1	0	1	0	0	2
$\{\Delta\geqslant 0\}$ 含基本事件数	0	1	2	4	6	6	19

由此可见,方程有实根的概率 p 和有重根的概率 q 相应为

$$p=\frac{19}{36}=0.527\dot{7};\quad q=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}=0.055\dot{5}。$$

【例 1-11】(古典型概率) 假设箱中共有 n 个球,其中 $m(0\leqslant m\leqslant n)$ 个是红球,其余是白球。现在一个接一个地接连从箱中抽球,试求第 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 次抽球抽到红球的概率 p。

解析 引进事件 $A_k=\{$第 k 次抽球抽到红球$\}(1\leqslant k\leqslant n)$。对于还原抽样,显然

$$p=P(A_k)=\frac{m}{n}。$$

对于非还原抽样有同样结果。问题有多种解法。

解法 1 设想将 n 个球一一编号。这样,不但区分球的颜色,而且区分球的编号。假如将 n 个球一个接一个(非还原)地接连从箱中抽出,则不同抽法(基本事件)的总数为 $n!$。导致事件 A_k 的不同抽法有 $(n-1)!\times m$ 种,即 A_k 共包含 $(n-1)!\times m$ 个基本事件:在第 k 次抽球抽到红球的情形共有 m 种,其余 $n-1$ 次抽球不同抽法的总数等于 $(n-1)!$。从而

$$p=P(A_k)=\frac{(n-1)!\times m}{n!}=\frac{m}{n}。$$

解法 2 仍将 n 个球一一编号。从 n 个不同的球中接连抽出 k 个球,相当于从 n 个元素中选 k 个元素的选排列。因此总共有

$$P_n^k=n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$

种不同抽法,即基本事件的总数为 P_n^k。导致事件 A_k 的不同抽法有

$$P_{n-1}^{k-1}\times m=(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\times m$$

种，即 A_k 共包含 $m\times P_{n-1}^{k-1}$ 个基本事件：在第 k 次抽球抽到红球的情形共有 m 种，前 $k-1$ 次抽球的不同抽法的总数等于从 $n-1$ 个元素中选 $k-1$ 个的选排列数。于是

$$p=P(A_k)=\frac{P_{n-1}^{k-1}\times m}{P_n^k}=\frac{m}{n}。$$

解法 3 对于同颜色球不加区分。设想有 n 个格子依次排成一列（见图 1-1）：

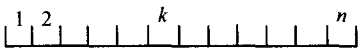

图 1-1

将 n 个球分别放进 n 个格子（每格一球）且使 m 个红球占据 m 个固定的格子，总共有 C_n^m 种不同放法，即基本事件的总数为 C_n^m；在第 k 格中放一红球，然后从其余 $n-1$ 个格子选 $m-1$ 个放其余红球，总共有 C_{n-1}^{m-1} 种放法，即 A_k 共包含 C_{n-1}^{m-1} 个基本事件。因此

$$p=P(A_k)=\frac{C_{n-1}^{m-1}}{C_n^m}=\frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!}\frac{m!(n-m)!}{n!}=\frac{m}{n}。$$

说明 该例表明，无论是对于还原抽样还是非还原抽样，红球在每次抽样中出现的概率只与红球所占的比率有关，而与第几次抽样无关。三种解法建立在对于基本事件的三种不同理解上。这样，我们通过三个不同的途径解决了同一个问题。应当注意，在计算基本事件的总数 N 和有利于事件 A_k 的基本事件的个数 M 时，对于基本事件的理解必须一致。

【例 1-12】（古典型概率） 假设集合 Ω 中含 N 个元素，其中 M 个元素具有特征 A。现在用非还原随机抽样方式从 Ω 中一个接一个地抽取元素，直到恰好取出 $r(0\leqslant r\leqslant M)$ 个具有特征 A 的元素为止。以 X_r 表示所需抽样的次数，试求事件 $A_k=\{X_r=k\}(k=r,r+1,\cdots,N-M+r)$ 的概率。

解析 以 A 和 $\overline{A}$ 分别表示“具有特征 A 的元素”和“没有特征 A 的元素”。考虑从 Ω 中的 N 次非还原（有序）随机抽样，其基本事件可以表示为以 A 和 $\overline{A}$ 为分量的 n 维向量：每一个向量有 M 个分量是 A，其余 $N-M$ 个分量是 $\overline{A}$。这样基本事件的总数为

$$C_N^M=\frac{N!}{M!(N-M)!},$$

而且各个基本事件都是等可能的。

有利于事件 $A_k=\{X_r=k\}$ 的每一个基本事件，都恰好有 k 个分量是 A，其余 $N-k$ 个分量是 $\overline{A}$，而且第 k 个分量恰好是 A。因此事件 $A_k=\{X_r=k\}$ 所包含的基本事件的个数为 $C_{k-1}^{r-1}C_{N-k}^{M-r}$。于是

$$P(A_k)=P\{X_r=k\}=\frac{C_{k-1}^{r-1}C_{N-k}^{M-r}}{C_N^M}$$

$$(k=r,r+1,\cdots,N-M+r)。$$

【例 1-13】(古典型概率) 从 n 双不同型号的皮鞋中随意取出 $2m(2m<n)$ 只。求下列事件的概率:$A=\{$取出的鞋任何两只都不成双$\}$;$B=\{$取出的鞋恰好有一对成双$\}$;$C=\{$取出的鞋恰好有两对成双$\}$。

解析 从 n 双($2n$ 只)鞋中随意取出 $2m$ 只总共有 C_{2n}^{2m} 种不同取法,即基本事件的总数为 $N=C_{2n}^{2m}$。

(1) 为使取出的鞋无一对成双,只须先从 n 双鞋中取出 $2m$ 双,然后从每双鞋中各任取一只,总共有 $M=2^{2m}C_n^{2m}$ 种不同取法,因此

$$P(A)=\frac{2^{2m}C_n^{2m}}{C_{2n}^{2m}}。$$

(2) 为使取出的鞋中恰好有一对成双,只须先从 n 双鞋中任取一双,然后从其余 $n-1$ 双鞋中任取 $2(m-1)$ 双,再从这 $2(m-1)$ 双中各任取一只,总共有 $M=2^{2(m-1)}C_n^1C_{n-1}^{2(m-1)}$ 种不同取法,因此

$$P(B)=\frac{n2^{2(m-1)}C_{n-1}^{2(m-1)}}{C_{2n}^{2m}}。$$

(3) 为使取出的鞋中恰好有两对成双,只须先从 n 双鞋中任取两双,然后从其余 $n-2$ 双鞋中任取 $2(m-2)$ 双,再从这 $2(m-2)$ 双中各任取一只,总共有 $M=2^{2(m-2)}C_n^2C_{n-2}^{2(m-2)}$ 种不同取法,因此

$$P(C)=\frac{2^{2(m-2)}C_n^2C_{n-2}^{2(m-2)}}{C_{2n}^{2m}}。$$

【例 1-14】(几何型概率) 在区间$(0,2)$内随意取两个数,试求两数之和不大于 3 的概率。

解析 以 X 和 Y 分别表示随意取得的两个数;记 $A=\{X+Y\leqslant 3\}$。由条件知,随机点(X,Y)落入正方形 $\Omega=\{(x,y)\mid 0<x,y<2\}$ 内是必然事件;事件 A 等价于事件"随机点(X,Y)落入区域 G 内",其中 $G=\{(x,y)\mid x+y<3,0<x,y<2\}$(见图 1-2 阴影部分)。于是

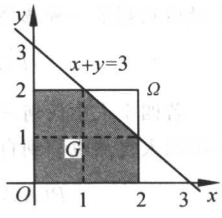

图 1-2

$$P(A)=\frac{S(G)}{S(\Omega)}=\frac{\frac{7}{2}}{4}=\frac{7}{8},$$

其中 $S(G)$ 和 $S(\Omega)$ 相应为区域 G 和正方形 Ω 的面积。

2 概率的推算

【例 1-15】(加法公式) 设对于随机变量 X 和 Y,已知概率 $P\{X\geqslant 0\}=$

$P\{Y \geqslant 0\} = 4/7, P\{X \geqslant 0, Y \geqslant 0\} = 3/7$，试求概率 $P\{\max[X,Y] \geqslant 0\}$。

解析 引进事件：$A = \{X \geqslant 0\}, B = \{Y \geqslant 0\}$，则$\{X \geqslant 0, Y \geqslant 0\} = AB$。有

$$\{\max[X,Y] \geqslant 0\} = A + B。$$

从而，由加法公式，可见

$$P\{\max[X,Y] \geqslant 0\} = P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{5}{7}$$

【例 1-16】（一般加法公式） 假设四个人的准考证混放在一起，现在将其随意地发给四个人。试求事件 $A = \{$没有一个人领到自己的准考证$\}$ 的概率 p。

解析 引进事件：$A_k = \{$第k个人恰好领到自己的准考证$\}(k = 1,2,3,4)$。那么，

$$p = P(A) = 1 - P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4)。$$

将加法公式推广，得

$$\begin{aligned} &P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) \\ &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) - \\ &\quad [P(A_1A_2) + P(A_1A_3) + P(A_1A_4) + P(A_2A_3) + P(A_2A_4) + P(A_3A_4)] + \\ &\quad [P(A_1A_2A_3) + P(A_1A_2A_4) + P(A_1A_3A_4) + P(A_2A_3A_4)] - P(A_1A_2A_3A_4) \quad (*) \end{aligned}$$

显然，每个人领到自己准考证的概率等于 1/4，即

$$P(A_i) = \frac{1}{4}(i = 1,2,3,4)。$$

四个人各领一个准考证总共有 4!种不同情形。四个人中任何两个人（例如第一个人和第二个人）都领到自己准考证总共有 $1 \times 1 \times 2 \times 1 = 2$ 种不同情形（第一个人和第二个人各有一种选择，对于第三个人剩下两种选择，对于第四个人最后只剩下一种选择）。因此

$$P(A_iA_j) = \frac{2}{4!} = \frac{1}{12}(1 \leqslant i < j \leqslant 4)。$$

若四个人中任何三个人（例如，第一、第二和第三人）都领到自己的准考证，则第四人自然也领到自己的准考证。因此

$$P(A_iA_jA_k) = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}(1 \leqslant i < j < k \leqslant 4);$$

$$P(A_1A_2A_3A_4) = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}。$$

于是，由概率的加法公式(*)可见

$$\begin{aligned} &P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) \\ &= 4P(A_1) - 6P(A_1A_2) + 3P(A_1A_2A_3) - P(A_1A_2A_3A_4) \\ &= \frac{4}{4} - \frac{6}{12} + \frac{4}{24} - \frac{1}{24} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$