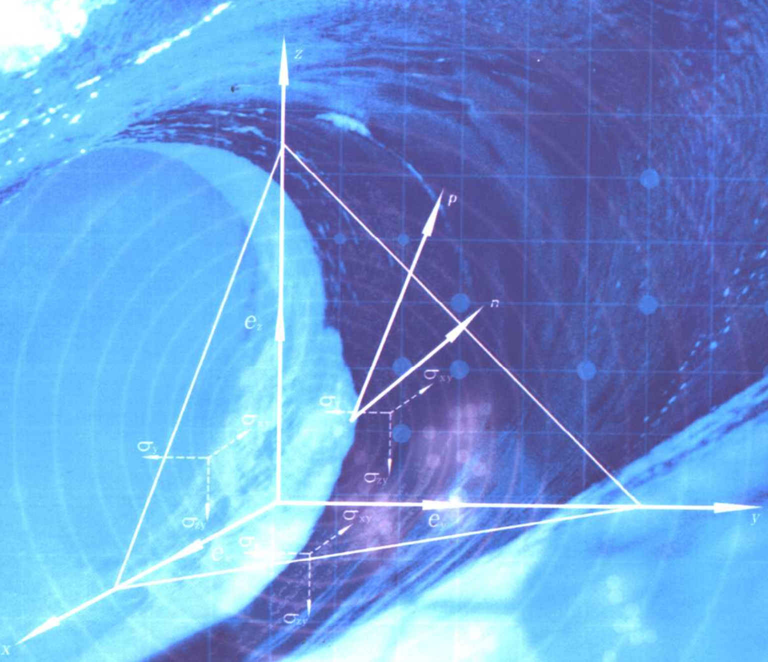
张量分析及其在连续介质力学中的应用

张耀良 朱卫兵 主编



哈尔滨工程大学出版社

张量分析及其在连续介质力学中的应用

张耀良　朱卫兵　主编
梁立孚　王振清　主审

哈尔滨工程大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

张量分析及其在连续介质力学中的应用/张耀良,朱卫兵主编.—哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2004

ISBN 7-81073-624-8

Ⅰ.张… Ⅱ.①张…②朱… Ⅲ.张量分析-应用-连续介质力学 Ⅳ.O33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 100791 号

内容简介

张量分析是研究连续介质力学的重要数学工具。本书紧密结合工程力学来介绍张量分析的基本理论和实用计算。全书共分六章,内容包括:矢量与张量,笛卡尔张量,张量场论,张量场函数的导数,张量分析在线弹性理论中的应用,张量分析在流体力学中的应用。各章都有一定数量的例题和习题,书后附有相应的习题参考答案。

本书可作为应用数学、力学及有关专业研究生、高年级本科生的教材,也可供有关专业教师、科研工作者和工程技术人员参考。

哈尔滨工程大学出版社出版发行
哈尔滨市南通大街145号 哈工程大学11号楼
发行部电话:(0451)82519328 邮编:150001
新华书店经销
黑龙江省地质测绘印制中心印刷厂印刷

*

开本 787mm×1 092mm 1/16 印张 14.5 字数 353 千字
2005 年 1 月第 1 版 2005 年 1 月第 1 次印刷
印数:1—1 000 册
定价:20.00 元

前　言

自然界的运动和变化是有规律的，认识这些规律是自然科学的任务。而需用数量来描述这些规律时，往往需要引入坐标系，只有这样，才能把数学带到自然科学中去。然而，随之而来的问题是，本来与坐标系无关的自然规律，它的数学表达式不得不与坐标系的选择夹杂在一起，以至掩盖了原来事物的物理本质。

张量的引入恰是力图既采用坐标系又摆脱具体坐标系影响的一种尝试。使用张量，可以简化推导，使演算过程清晰，表达方式整齐统一。用张量描述的物理定律或几何定理，所得到的结果在任何坐标系下都具有不变形式，从而充分地反映了这些现象的物理或几何属性。张量所具有的高度概括、形式简洁的特点使得它在分析力学、固体力学、流体力学、几何学、电磁学和相对论等诸多领域获得了越来越广泛的应用。

时至今日，不熟悉张量分析的人阅读连续介质力学的文献是很困难的，甚至是不可能的。正如 W. Flügge 所说，有了张量分析，研究连续介质力学就如鱼得水。

随着现代工程技术的发展，许多教师和科技工作者希望了解和熟悉张量分析的有关知识，为适应新形势的要求，近年来很多高等院校都为研究生和高年级本科生开设了“张量分析”课程。

考虑到本书的主要读者对象是工科的研究生和高年级本科生，因此我们着重阐明张量的基本概念和基本运算规律，并在最常用的三维欧氏空间中进行讨论。列举较多的应用实例也是为了使读者在理解张量的物理意义时，不致在抽象的理论面前感到困惑。当然，为了突出张量理论的严密性，我们对一些重要的定理和公式也给出了较为详细的推导。

本书是作者在多年的研究生教学实践基础上，参阅了大量的同类教材，为加强我校研究生教材建设的需要而编写的。作者力图编写出一本内容翔实，语言准确鲜明，密切联系工程力学的通俗易懂的研究生教材。

本书的第一、二、六章由朱卫兵编写；第三、四、五章由张耀良编写，最后由张耀良统一修改定稿；张晓斌和刘浩参加了收集资料和初稿的打字校对工作，并负责了插图的绘制，为书稿的顺利完成付出了辛勤的劳动，在此表示衷心的感谢！

梁立孚、王振清两位教授在百忙中认真、仔细地审阅了全部书稿，提出了许多具体的修改意见，纠正了初稿中的不少疏误之处。他们对研究生教材建设的负责态度令我们感动，使我们获益匪浅，在此表示我们诚挚的谢意。

限于编者水平和时间紧迫，虽数易其稿，但书中的缺点和错误在所难免，诚恳希望有关专家和读者批评指正。

编　者

2004 年 9 月

目　录

1 矢量与张量

1.1 概　　述

任一物理现象都是按照一定的客观规律进行的，它们是不以人们的意志为转移的。但是，在研究分析这一物理现象时，人们采用的方法则是由人们的意愿决定的。无数事实说明，研究方法的选用与当时人们对客观事物的认识水平有关，而研究方法的好坏直接关系到求解问题的繁简程度。

在数学和物理学中，我们常常会遇到一些几何量和物理量，它们都与坐标系的选取无关。其中有一些比较简单的量，如平面图形的面积，一有限物体的体积和温度等，这些量仅用它们的量值(加上相应的单位)就能够描述，例如可以用立方米来表示体积，某时刻的温度可用摄氏温标的度数来表示。这种用量值就能表征的量，通常称为**标量**。当然，我们还会碰到比标量复杂一些的量，如位移、力、速度和加速度等，它们不能单用数值来描述，因为这些量不仅有量值，而且有方向，如一个气象预报员预报某天的风速时，他不仅应当说明风的速率(风速的量值)，而且应当说明风吹的方向，这样才能完整地加以描述。这种必须用量值和方向来表征的量，称为**矢量**。在三维空间中，可以用标明方向的线段(即有向线段)来表示这些物理量。习惯上常常用粗体小写字母，如 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 等表示矢量。本书中把这种表示方法称为**不变性记法**(或称**抽象记法**、**绝对记法**等)。所谓"不变"一词，意味着它与坐标系的选取无关，也就是说，它并不因坐标系的改变而发生变化。

在处理具体问题时，我们常常需要选定坐标系，这样就会带来很多方便。在三维欧氏空间中，通常采用正交笛卡尔坐标系 $oxyz$。这样，一个矢量就可以写成三个分矢量之和，如

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} \tag{1.1.1}$$

式中，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 是沿坐标轴正向的单位矢量；a_x, a_y, a_z 称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，在本书中把它们称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 关于坐标系 $oxyz$ 的分量，或简称为分量。

显然，矢量的分量与坐标系有关，即当选取不同坐标系时，将得到不同的分量。虽然如此，我们也自然可以想到，同一矢量在不同坐标系下得到的不同分量之间一定有着某种联系，也就是说一定可以通过坐标系之间的变换关系而找到它们之间的联系，于是，我们也可以用满足一定坐标变换关系的三个有序数来定义矢量，称每个数为矢量的分量。

随着科学技术的不断发展，我们遇到了比矢量更为复杂的几何量和物理量，对它们的描述就不能只用量值和方向，而必须应用更多的概念。如固体中一点由于内力而产生的应力，我们必须确定力和力所作用的面。另外，还有弹性体中任一体积元的形变以及转动惯量等，这样的量只能用所谓**张量**的数学实体来描述。以后我们还将看到，前面所述的标量和矢量实际上都是张量的特例。

张量的概念是在 19 世纪由高斯(Gauss)、黎曼(Riemann)、克里斯托弗尔(Christoffel) 等人在发展微分几何过程中引入的。在此基础上，1887 ~ 1901 年间，李奇(Ricci)和他的学生勒维·奇维塔(Levi Civita) 发展了张量分析，虽然他们也曾介绍过张量的某些应用，但很少有

人注意。直到1916年爱因斯坦(Einstein)用黎曼几何与张量分析来阐述他的广义相对论,才给张量这一纯数学理论以丰富的物理内容,使张量分析在物理学中占有突出的地位。自20世纪40年代开始,张量分析逐步成为研究连续介质力学的有效工具,时至今日,不熟悉张量分析的人在阅读连续介质力学的文献时会感到相当困难。由此可见,张量分析不仅在数学领域内占有一席之地,更重要的是它在现代物理和力学的研究中已成为一种不可或缺的重要工具。

与矢量一样,张量也是一个与坐标系的选取无关而客观存在的量,而且可以把它视为矢量的发展和推广。因此,张量也有不变性记法和分量记法(也叫指标记法)两种表示法。前面已经说过,在三维欧氏空间中,矢量可以用一个有方向的线段简明直观地表示出来,可是对于张量(如应力、应变、转动惯量等)却办不到,也就是说,单纯通过不变性记法来认识张量是有困难的。那么怎样来表示一个张量呢?我们仍然需借助于坐标系,把张量的不变性记法用形式上有点像矢量式(1.1.1)的方式来表示。在本书中这将作为张量的定义。于是也能得到一组有序数,称为**张量的分量**。显然,与矢量的分量一样,在不同坐标系中,张量的分量也是不相同的,但同一张量在不同坐标系中的不同分量之间也可以通过坐标变换关系而找到它们之间的联系。于是,我们同样用满足一定坐标变换关系的一组有序数来定义张量,这种定义法称为**指标记法**。以后我们还将看到,一旦定义了 n 阶张量后,就会发现前面我们提到的标量和矢量实际上也属于张量的范畴,它们分别代表零阶张量和一阶张量。

大多数初学者对于由矢量到一般张量的转变会感到突然,以致产生一定的困难,因此有必要对矢量作出进一步的讨论,这有助于读者在学习一般张量之前,掌握关于张量的某些知识。也就是说,下面将对矢量的表达方式逐渐与对张量的表达方式统一起来。

1.2 矢量及其运算

1.2.1 矢量

在三维欧氏空间中,矢量是具有大小和方向且满足一定规则的实体,用黑体字母表示,例如 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 等。它们所对应矢量的大小(称为模、值)分别用 $|\boldsymbol{u}|,|\boldsymbol{v}|,|\boldsymbol{w}|$ 表示。称模为零的矢量为**零矢量**,用 $\boldsymbol{0}$ 表示。称与矢量 $\boldsymbol{u}$ 的模相等而方向相反的矢量为 $\boldsymbol{u}$ 的负矢量,用 $-\boldsymbol{u}$ 表示。矢量满足以下规则。

1. 相等

两个矢量具有相同的模和方向,则称这两个矢量相等。即一个矢量做平行于其自身的移动则这个矢量不变。

2. 矢量和

按照平行四边形法则定义矢量和,同一空间中两个矢量之和仍是该空间的矢量,如图1-1所示。

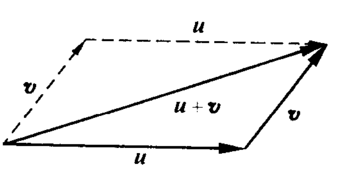


图1-1 矢量和的平行四边形法则

矢量和满足以下规则。

交换律
$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u} \tag{1.2.1}$$
结合律
$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) \tag{1.2.2}$$
由矢量和负矢量还可以定义矢量差

$$u - v = u + (-v) \tag{1.2.3}$$

并且有

$$u + (-u) = \mathbf{0} \tag{1.2.4}$$

3. 数乘矢量

设 a, b 等为实数,矢量 $\boldsymbol{u}$ 乘实数 a 仍是同一空间的矢量,记做 $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{u}$。其含义是:$\boldsymbol{v}$ 是与 $\boldsymbol{u}$ 共线且模为 $\boldsymbol{u}$ 的 a 倍,当 a 为正值时 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 同向;a 为负值时 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 反向;a 为零时 $\boldsymbol{v}$ 为零矢量。数乘矢量满足以下规则。

分配律
$$(a + b)\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{u} \tag{1.2.5a}$$
$$a(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = a\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{v} \tag{1.2.5b}$$

结合律
$$a(b\boldsymbol{u}) = ab\boldsymbol{u} \tag{1.2.6}$$

由矢量关于求和与数乘两种运算规则可知,属于同一空间的矢量组 $\boldsymbol{u}_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 的线性组合 $\sum_{i=1}^{n} a_i\boldsymbol{u}_i$ 仍为该空间的矢量,此处 a_i 是实数。矢量组 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n$ **线性相关**是指存在一组不全为零的实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,使得

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\boldsymbol{u}_i = \mathbf{0}$$

线性无关:若有矢量组 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n$,当且仅当 $a_i = 0(i = 1,2,\cdots,n)$ 时,才有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\boldsymbol{u}_i = 0$$

则称这组 n 个矢量是**线性无关**的。

维数:一个矢量空间所包含的最大线性无关矢量的数目称为该矢量空间的**维数**。显然,三维空间最多有3个线性无关的矢量,平面最多有2个线性无关的矢量。在 n 维空间中,可以根据解决物理问题的需要选择 n 个线性无关的矢量,而任一矢量可用这 n 个矢量的线性组合来表示。

在三维空间的笛卡尔坐标系中,任一矢量 $\boldsymbol{v}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k} \tag{1.2.7}$$

式中,$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为沿 x,y,z 轴正向的单位矢量。

1.2.2 矢量的点积

定义两个矢量 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的点积为

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{F}||\boldsymbol{v}|\cos(\boldsymbol{F},\boldsymbol{v}) \tag{1.2.8}$$

式中,$(\boldsymbol{F},\boldsymbol{v})$ 表示 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的夹角,如图1-2所示,如果 $\boldsymbol{F},\boldsymbol{v}$ 方向的单位矢量分别为 $\boldsymbol{e}_f$ 和 $\boldsymbol{e}_v$,则由式(1.2.8)可知,$\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{v}$ 上的投影是 $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{e}_v$,而 $\boldsymbol{v}$ 在 $\boldsymbol{F}$ 上的投影是 $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_f$,所以

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{v}|(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{e}_v) = |\boldsymbol{F}|(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_f)$$

在三维空间的笛卡尔坐标系 xyz 中也可以写成

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z \tag{1.2.9}$$

当 $\boldsymbol{F}$ 表示力,$\boldsymbol{v}$ 表示速度时,$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$ 表示功率。

两个矢量的点积服从以下规则。

交换律
$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} \tag{1.2.10}$$

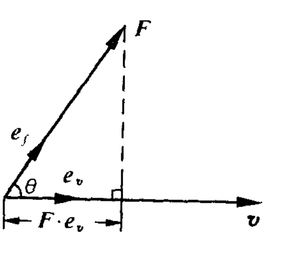


图1-2 两个矢量的点积

分配律
$$F \cdot (u + v) = F \cdot u + F \cdot v \tag{1.2.11}$$
正定性
$$u \cdot u \geqslant 0 \tag{1.2.12}$$
且仅当 $u = 0$ 时，有
$$u \cdot u = 0$$
Schwartz 不等式
$$|u \cdot v| \leqslant |u||v| \tag{1.2.13}$$

1.2.3 矢量的叉积

两个矢量 u 和 v 的叉积(也称矢积)是垂直于 u,v 构成的平面的另一个矢量 w。定义
$$w = u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \tag{1.2.14}$$
w 为垂直于 u,v 所在平面的矢量，其方向符合右手法则，如图 1－3 所示。

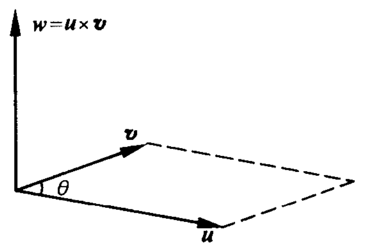


图 1－3 两个矢量的叉积

叉积的模为
$$|u \times v| = |u||v|\sin(u,v) \tag{1.2.15}$$
式中，$\sin(u,v) \geqslant 0$。交换叉积的顺序，则叉积反号
$$u \times v = -v \times u \tag{1.2.16}$$
叉积也满足分配律
$$F \times (u + v) = F \times u + F \times v \tag{1.2.17}$$
叉积的物理意义是：其模等于以两个矢量为边构成的平行四边形的面积，其方向垂直于该平行四边形所在平面。

三个矢量的二重叉积满足以下恒等式
$$u \times (v \times w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w \tag{1.2.18}$$
这个公式的证明可见后面的例 1.8。另外，由上式也可证叉积不满足结合律
$$u \times (v \times w) \neq (u \times v) \times w$$

1.2.4 矢量的混合积

定义三个矢量 u,v,w 的混合积是
$$[u \quad v \quad w] = (u \times v) \cdot w = u \cdot (v \times w)$$
$$= \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix} \tag{1.2.19}$$
若更换三个矢量在混合积中的次序，应满足
$$[u \quad v \quad w] = [v \quad w \quad u] = [w \quad u \quad v] = -[v \quad u \quad w]$$
$$= -[u \quad w \quad v] = -[w \quad v \quad u] \tag{1.2.20}$$
这就是混合积的轮换性。另外，可以证明混合积的物理意义是以 u,v,w 为三个棱边所围成的平行六面体的体积。式(1.2.19) 与式(1.2.20) 还决定了当 u,v,w 构成右手系时，该平行六面体的体积为正号。

利用式(1.2.9) 和式(1.2.19) 还可以证明，由三个矢量的两两点积所构成的行列式等于

三个矢量所构成的体积的平方。即

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u} & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u} & \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v} & \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w} \end{vmatrix} = [\boldsymbol{u}\quad\boldsymbol{v}\quad\boldsymbol{w}]^2 \tag{1.2.21}$$

实际上它是式(1.2.19)中两个行列式的乘积。

用同样方法可以证明

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}' & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}' & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}' \\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}' & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}' & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}' \\ \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u}' & \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}' & \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w}' \end{vmatrix} = [\boldsymbol{u}\quad\boldsymbol{v}\quad\boldsymbol{w}][\boldsymbol{u}'\quad\boldsymbol{v}'\quad\boldsymbol{w}'] \tag{1.2.22}$$

式中,$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{u}',\boldsymbol{v}',\boldsymbol{w}'$ 都是任意矢量。

例 1.1 利用矢量方法求证平面几何中的余弦定理

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

证明 用矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示三角形的三条边 BC,CA,BA;A,B,C 表示三角形的三个顶角,如图 1-4 所示,则

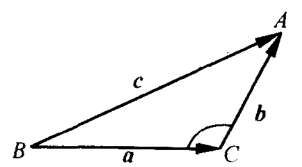


图 1-4 平面几何中的余弦定理

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$$

$$\begin{aligned} c^2 &= \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \\ &= \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \\ &= a^2 + b^2 + 2ab\cos(\pi - C) \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{aligned}$$

例 1.2 以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 绕定轴转动的刚体上的每一点都绕着该轴做圆周运动,单位时间内转动的角度为 $\boldsymbol{\omega}$。求用矢量叉积表示刚体上任一点的线速度 $\boldsymbol{v}$。

解 将坐标原点 o 设在旋转轴上,由 o 点至 P 点的矢径 $\boldsymbol{r}$ 可以描述刚体上任一点 P 的位置。用矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 表示角速度,其大小等于 ω,方向沿旋转轴且与旋转方向之间满足右手法则。P 点到定轴的距离为 d,如图 1-5 所示。

过 P 点作垂直于定轴的平面,与轴交点为 C,则 P 点做该平面内绕 C 的圆周运动,速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向为 P 点处沿该圆周的切线方向。即

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\omega} = 0 \quad \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r} = 0 \quad (\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{r})$$

$\boldsymbol{v}$ 的大小为 ωd

$$|\boldsymbol{v}| = \omega d = \omega r\sin\theta$$

因此

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$

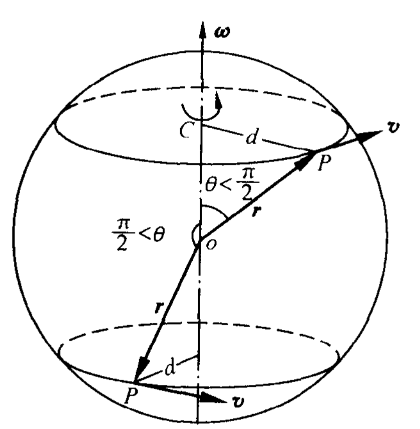


图 1-5 绕定轴转动的刚体

1.3 斜角直线坐标系

为了便于定量求解某个物理问题,人们常需要选择不同的坐标系描述物理量及其遵循的客观规律。除了大家都熟悉的笛卡尔坐标系外,还可以选择非正交的或非直线坐标系,本节介绍更具一般意义的坐标系以及矢量与张量的非笛卡尔分量。

1.3.1 平面内的斜角直线坐标系

图1-6表示平面内直线坐标系 x^1x^2(其中 x 右上角的数字代表上标,而不是幂次,以区别不同的坐标。幂次用括号给出,如$(a_ix^i)^2$),x^1 和 x^2 互不正交,夹角为 $\varphi(\varphi<\pi)$,若选沿 x^1 与 x^2 的参考矢量 $\boldsymbol{g}_1$ 与 $\boldsymbol{g}_2$(它们可以不是单位矢量),则任意矢量 $\boldsymbol{P}$ 可以用它对$\boldsymbol{g}_1$ 与 $\boldsymbol{g}_2$ 分解的分矢量 $P^1\boldsymbol{g}_1$ 与 $P^2\boldsymbol{g}_2$ 之和来表示。即

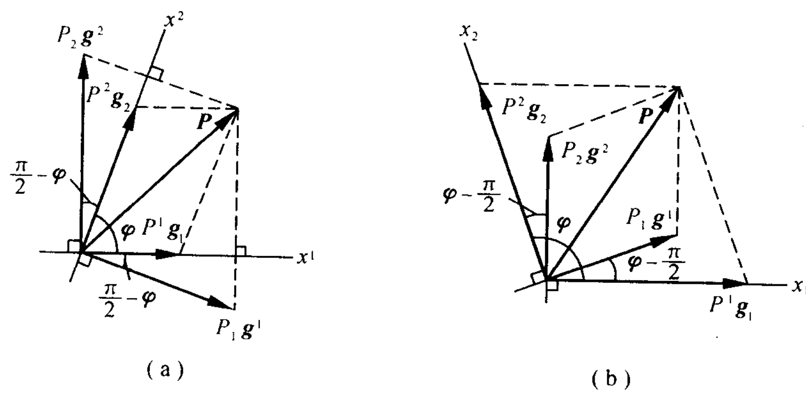


图1-6 平面内的斜角直线坐标系

$$\boldsymbol{P}=P^1\boldsymbol{g}_1+P^2\boldsymbol{g}_2=\sum_{\alpha=1}^{2}P^\alpha\boldsymbol{g}_\alpha=P^\alpha\boldsymbol{g}_\alpha \tag{1.3.1}$$

式中,P^1 与 P^2 称为矢量 $\boldsymbol{P}$ 的分量。上式中最后的表达式省略了求和号,即采用了**爱因斯坦(Einstein)求和约定**。其中 α 称为**哑指标**,它满足以下规则。

哑指标规则

(1) 在同一项中,以一个上指标与一个下指标成对地出现(在直角笛卡尔坐标系中不分上下指标,一律取下标,以后将会说明),表示在其取值范围内求和(对于二维,从1至2求和;对于三维,从1至3求和)。

(2) 每一对哑指标的字母可以用相同取值范围的另一对字母任意代换,其意义不变。如

$$\boldsymbol{P}=P^\alpha\boldsymbol{g}_\alpha=P^\beta\boldsymbol{g}_\beta \tag{1.3.1a}$$

对于爱因斯坦求和约定,一定要分清式中的哑指标和自由指标,如在直角笛卡尔坐标系中

$$a_{ii}=a_{11}+a_{22}+a_{33}$$

$$a_ib_i=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

而 $a_ib_j - a_jb_i$ 中没有哑指标,故不包含任何求和运算。它表示共有九个式子。即

$$c_{ij} = a_ib_j - a_jb_i \quad (i = 1,2,3)$$

可写成

$$c_{11} = a_1b_1 - a_1b_1$$
$$c_{12} = a_1b_2 - a_2b_1$$
$$c_{13} = a_1b_3 - a_3b_1$$
$$\cdots$$

又如 $a_{ij}b_{ik}$ 中 i 为哑指标,j,k 为自由指标,它表示共有九个式子

$$c_{jk} = a_{1j}b_{1k} + a_{2j}b_{2k} + a_{3j}b_{3k} \quad (j,k = 1,2,3)$$

所以有

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{31}b_{31}$$
$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{21}b_{22} + a_{31}b_{32}$$
$$c_{13} = a_{11}b_{13} + a_{21}b_{23} + a_{31}b_{33}$$
$$\cdots$$

当选定参考矢量 $\boldsymbol{g}_1$ 和 $\boldsymbol{g}_2$ 后,自然可以确定任意矢量 $\boldsymbol{P}$ 的分量P^1 和 P^2。若引入沿 x^1 和 x^2 的单位矢量 $\boldsymbol{i}_1$ 和 $\boldsymbol{i}_2$,则有

$$\boldsymbol{i}_1 \cdot \boldsymbol{i}_1 = \boldsymbol{i}_2 \cdot \boldsymbol{i}_2 = 1, \qquad \boldsymbol{i}_1 \cdot \boldsymbol{i}_2 = \boldsymbol{i}_2 \cdot \boldsymbol{i}_1 = \cos\varphi \neq 0 \tag{1.3.2a}$$

$$\boldsymbol{g}_1 = |\boldsymbol{g}_1|\boldsymbol{i}_1, \qquad \boldsymbol{g}_2 = |\boldsymbol{g}_2|\boldsymbol{i}_2 \tag{1.3.2b}$$

与笛卡尔坐标系不同,因 $\boldsymbol{g}_1$ 与 $\boldsymbol{g}_2$ 不是单位矢量且不正交,故矢量 $\boldsymbol{P}$ 在$\boldsymbol{g}_\alpha(\alpha = 1,2)$ 上的投影不等于它的分量

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{i}_1 &= (P^1\boldsymbol{g}_1 + P^2\boldsymbol{g}_2) \cdot \boldsymbol{i}_1 = (P^1|\boldsymbol{g}_1|\boldsymbol{i}_1 + P^2|\boldsymbol{g}_2|\boldsymbol{i}_2) \cdot \boldsymbol{i}_1 \\ &= P^1|\boldsymbol{g}_1| + P^2|\boldsymbol{g}_2|\cos\varphi\end{aligned} \tag{1.3.3a}$$

同理

$$\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{i}_2 = P^1|\boldsymbol{g}_1|\cos\varphi + P^2|\boldsymbol{g}_2| \tag{1.3.3b}$$

矢量 $\boldsymbol{P}$ 的分量P^1 和 P^2 需通过式(1.3.3)联立求解得到,显然这样做是很不方便的。为此,我们引入一对与 $\boldsymbol{g}_\alpha(\alpha = 1,2)$ 对偶的参考矢量 $\boldsymbol{g}^\alpha(\alpha = 1,2,)$,满足

$$\begin{cases}\boldsymbol{g}^1 \cdot \boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{g}^2 \cdot \boldsymbol{g}_1 = 0 \\ \boldsymbol{g}^1 \cdot \boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{g}^2 \cdot \boldsymbol{g}_2 = 1\end{cases} \tag{1.3.4}$$

上式表明 $\boldsymbol{g}^1$ 与 $\boldsymbol{g}_2$,$\boldsymbol{g}^2$ 与 $\boldsymbol{g}_1$ 分别互相正交,由图1-6可以看出,$\boldsymbol{g}^1$ 与 $\boldsymbol{g}_1$,$\boldsymbol{g}^2$ 与 $\boldsymbol{g}_2$ 的夹角都是锐角,为$\frac{\pi}{2} - \varphi$(当 φ 为锐角时)或 $\varphi - \frac{\pi}{2}$(φ 为钝角时),故

$$|\boldsymbol{g}^1| = \frac{1}{|\boldsymbol{g}_1|\sin\varphi}, \qquad |\boldsymbol{g}^2| = \frac{1}{|\boldsymbol{g}_2|\sin\varphi} \tag{1.3.5}$$

称参考矢量 $\boldsymbol{g}_\alpha(\alpha = 1,2,)$为**协变基矢量**,称与其对偶的参考矢量 $\boldsymbol{g}^\beta(\beta = 1,2)$ 为**逆变基矢量**。它们之间满足的关系式式(1.3.4)可以写成**对偶条件**:

$$\boldsymbol{g}_\alpha \cdot \boldsymbol{g}^\beta = \delta_\alpha^\beta \quad (\alpha,\beta = 1,2) \tag{1.3.6}$$

式中,δ_α^β 称为 **Kronecker** 符号,其值为

$$\delta_\alpha^\beta = \begin{cases}1, & 当\ \alpha = \beta \\ 0, & 当\ \alpha \neq \beta\end{cases} \tag{1.3.7}$$

由式(1.3.6) 可以从协变基矢量惟一地确定逆变基矢量,反之亦然。今后对于每个坐标系都将引入这两组互为对偶的基矢量。利用它们的对偶关系式(1.3.6) 就可以方便地求矢量的分量,而不再需要求解方程组式(1.3.3)。如式(1.3.1) 中的矢量对协变基矢量 $\boldsymbol{g}_\alpha$ 分解的分量 P^α(称为**矢量 $\boldsymbol{P}$ 的逆变分量**):

$$P^1 = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{g}^1, \qquad P^2 = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{g}^2$$

或统一写成

$$P^\alpha = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{g}^\alpha \quad (\alpha = 1,2) \tag{1.3.8}$$

同样,矢量 $\boldsymbol{P}$ 还可以对逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^\beta$ 分解为

$$\boldsymbol{P} = P_1\boldsymbol{g}^1 + P_2\boldsymbol{g}^2 = P_\beta\boldsymbol{g}^\beta \quad (\beta = 1,2) \tag{1.3.9}$$

P_β 称为**矢量 $\boldsymbol{P}$ 的协变矢量**。利用对偶关系式(1.3.6) 可以很方便地得到矢量的协变分量

$$P_\alpha = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{g}_\alpha \quad (\alpha = 1,2) \tag{1.3.10}$$

引入了协变基矢量和逆变基矢量,我们还可以方便地得到关于两个矢量点积的表达式。如有两个矢量 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{u}$

$$\boldsymbol{P} = P^1\boldsymbol{g}_1 + P^2\boldsymbol{g}_2 = P_1\boldsymbol{g}^1 + P_2\boldsymbol{g}^2$$
$$\boldsymbol{u} = u^1\boldsymbol{g}_1 + u^2\boldsymbol{g}_2 = u_1\boldsymbol{g}^1 + u_2\boldsymbol{g}^2$$

则两个矢量的点积为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{u} &= (P^1\boldsymbol{g}_1 + P^2\boldsymbol{g}_2)\cdot(u_1\boldsymbol{g}^1 + u_2\boldsymbol{g}^2)\\ &= P^1u_1 + P^2u_2 = P^\alpha u_\alpha \quad (\alpha = 1,2)\end{aligned}$$

或写成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{u} &= (P_1\boldsymbol{g}^1 + P_2\boldsymbol{g}^2)\cdot(u^1\boldsymbol{g}_1 + u^2\boldsymbol{g}_2)\\ &= P_1u^1 + P_2u^2 = P_\alpha u^\alpha \quad (\alpha = 1,2)\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{P} = P^\alpha u_\alpha = P_\alpha u^\alpha \tag{1.3.11}$$

在式(1.3.6)、式(1.3.8) 和式(1.3.10) 中出现的指标符号称为**自由指标**。它满足以下规则。

(1) 一个指标在表达式的各项中都在同一水平上出现,并且只出现一次,即全为上标或全为下标。表示该表达式在自由指标的 n 维取值范围内都成立,即它代表了 n 个表达式。

(2) 一个表达式中的某个自由指标可以全体地换用相同取值范围的其他字母,其意义不变。

本小节中定义的哑指标、自由指标及指标符号规则同样适用于三维问题,并且贯穿于全书。

1.3.2 三维空间中的斜角直线坐标系

上述在二维情形下的做法完全可以推广到三维空间中,设 $x^1x^2x^3$ 为三维空间斜角直线坐标系,沿各坐标轴正向选取参考矢量 $\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\boldsymbol{g}_3$(它们不一定是单位矢量) 组成协变基矢量,在这组基矢量下,任一个矢量 $\boldsymbol{P}$ 可以分解为

$$\boldsymbol{P} = P^1\boldsymbol{g}_1 + P^2\boldsymbol{g}_2 + P^3\boldsymbol{g}_3 = \sum_{i=1}^{3}P^i\boldsymbol{g}_i = P^i\boldsymbol{g}_i \tag{1.3.12}$$

式中,P^i 为矢量 $\boldsymbol{P}$ 的逆变分量。

再根据对偶条件引入一组逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^1,\boldsymbol{g}^2,\boldsymbol{g}^3$,其对偶条件可以写作

$$\boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}_j = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (i,j = 1,2,3) \tag{1.3.13}$$

在逆变基矢量下,任一矢量 $\boldsymbol{P}$ 可以分解为

$$\boldsymbol{P} = P_1\boldsymbol{g}^1 + P_2\boldsymbol{g}^2 + P_3\boldsymbol{g}^3 = \sum_{i=1}^{3} P_i\boldsymbol{g}^i = P_i\boldsymbol{g}^i \tag{1.3.14}$$

式中,P_i 为矢量 $\boldsymbol{P}$ 的协变分量。

很显然

$$P_i = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{g}_i \tag{1.3.15}$$

$$P^i = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{g}^i \tag{1.3.16}$$

上两式说明,协变分量是矢量 $\boldsymbol{P}$ 与协变基矢量的点积,而逆变分量是矢量 $\boldsymbol{P}$ 与逆变基矢量的点积。

两个矢量的点积也可以写成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{P} &= P^1u_1 + P^2u_2 + P^3u_3 = \sum_{i=1}^{3} P^iu_i = P^iu_i \\ &= P_1u^1 + P_2u^2 + P_3u^3 = \sum_{i=1}^{3} P_iu^i = P_iu^i\end{aligned} \tag{1.3.17}$$

值得指出,本书中讨论的矢量是自由矢量,即与矢量的作用点无关。这就是说,无论作用在哪一点,都可以按协变基矢量 $\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\boldsymbol{g}_3$ 或逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^1,\boldsymbol{g}^2,\boldsymbol{g}^3$ 分解。由于这个缘故,我们常常说这组基矢量是**整体的**。

1.4 曲线坐标系

1.4.1 曲线坐标系

许多物理问题的求解往往离不开除笛卡尔坐标系外的其他坐标系,如平面极坐标系、空间圆柱坐标系和球坐标系等,这些坐标系可以统称为**曲线坐标系**。

设空间任一点由三个独立参数 $x^i(i = 1,2,3)$ 所确定,则这些参数就构成曲线坐标系。曲线坐标的选择可以不是长度的量纲。当三个参数中两个保持不变,只有一个变化时,点的轨迹曲线称为该坐标系的**坐标线**,通过空间点必有三根坐标线。不同点处坐标线的方向一般是变化的。而当三个参数中一个保持不变时,则其余两个参数变化而成的空间点的集合就构成**坐标面**,通过空间任意点必有 3 个坐标面,一般情况下,3 个坐标面都是曲面。

例如,图 1 - 7 所示的球坐标系 $x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \varphi$,其中 x^2, x^3 都不是长度的量纲。空间任意点 P 的矢径 $\boldsymbol{r}$ 可以表示成

$$\boldsymbol{r} = x^1\sin x^2\cos x^3\boldsymbol{i} + x^1\sin x^2\sin x^3\boldsymbol{j} + x^1\cos x^2\boldsymbol{k}$$

$$(0 < x^1 < \infty, 0 \leqslant x^2 \leqslant \pi, 0 \leqslant x^3 \leqslant 2\pi)$$

x^1 坐标线是通过坐标原点的射线,x^2 坐标线是通过 z 轴的大圆(经线),x^3 坐标线是平行于 oxy 平面的圆(纬线)。x^1 坐标面是一个球面,x^2 坐标面是一个锥面,x^3 坐标面是一半平面。

1.4.2 空间点的局部基矢量

设 $x^i(i=1,2,3)$ 为三维空间的曲线坐标系，则空间任意点 P 的矢径 $\boldsymbol{r}$ 是坐标的函数，即

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(x^1,x^2,x^3) \tag{1.4.2}$$

考察从 P 点出发的微线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，写成矢量微分形式为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^3}\mathrm{d}x^3=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i \tag{1.4.3}$$

现在定义坐标微分的矢量因子为**协变基矢量**，记做 $\boldsymbol{g}_i(i=1,2,3)$，即

$$\boldsymbol{g}_i=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i} \tag{1.4.4}$$

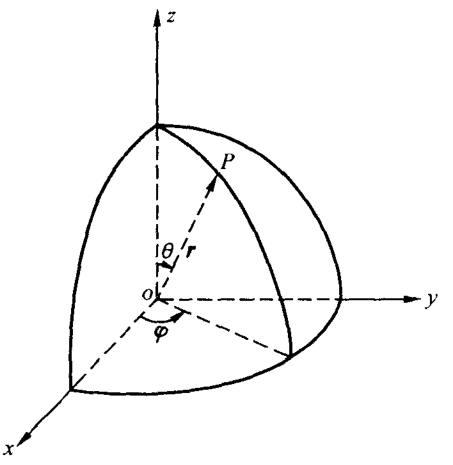


图 1－7 球坐标系

这样，式(1.4.3)就可以写成

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{g}_i\mathrm{d}x^i \tag{1.4.5}$$

取定了协变基矢量后就可按式(1.3.6)定义逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^i(i=1,2,3)$，即

$$\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}^j=\delta_i^j \tag{1.4.6}$$

显然，按式(1.4.3)定义的协变基矢量包括了直线坐标系中关于基矢量的定义。事实上任一直线坐标系的矢径都是 $\boldsymbol{r}=x^i\boldsymbol{g}^i$，其微分式为 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{g}_i\mathrm{d}x^i$(因为直线坐标系中的 $\boldsymbol{g}_i$ 不变)，所以与现在所讨论的曲线坐标系中的情况完全一致。

值得强调的是，一般曲线坐标系的基矢量与点的位置有关，在不同的点处，基矢量是不同的。因此，把矢量分解时应考虑到矢量的作用点，只有按作用点处的基矢量进行分解才是有意义的。也就是说，曲线坐标系不是整体的。我们把这种协变基矢量和逆变基矢量称为**局部的(或当地的)**。

仍以球坐标系为例，由式(1.4.1)可以得到

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{g}_1&=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^1}=\sin x^2\cos x^3\boldsymbol{i}+\sin x^2\sin x^3\boldsymbol{j}+\cos x^2\boldsymbol{k},\quad |\boldsymbol{g}_1|=1\\
\boldsymbol{g}_2&=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^2}=x^1(\cos x^2\cos x^3\boldsymbol{i}+\cos x^2\sin x^3\boldsymbol{j}-\sin x^2\boldsymbol{k}),\quad |\boldsymbol{g}_2|=x^1\\
\boldsymbol{g}_3&=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^3}=x^1\sin x^2(-\sin x^3\boldsymbol{i}+\cos x^3\boldsymbol{j}),\quad |\boldsymbol{g}_3|=x^1\sin x^2
\end{aligned} \tag{1.4.7}$$

从此例可见，3 个协变基矢量中仅 $\boldsymbol{g}_1$ 是单位矢量，但其方向随点变化；$\boldsymbol{g}_2$ 和 $\boldsymbol{g}_3$ 的大小与方向都随点变化，且不是无量纲的，它们具有长度的量纲。

对空间中一任意矢量 $\boldsymbol{P}$，按其作用点关于局部协变基矢量和局部逆变基矢量分解，也可以写成如下的形式，即

$$\boldsymbol{P}=P^i\boldsymbol{g}_i \tag{1.4.8}$$

$$\boldsymbol{P}=P_i\boldsymbol{g}^i \tag{1.4.9}$$

仍然把 P^i 称为 $\boldsymbol{P}$ 的逆变分量，P_i 称为 $\boldsymbol{P}$ 的协变分量，且有

$$P^i=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{g}^i$$

$$P^i = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{g}_i \tag{1.4.10}$$

作用在同一点处的两个矢量 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 的点积，仍然可以写成

$$\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{P} = P_i u^i = P^i u_i \tag{1.4.11}$$

最后讨论一下协变基矢量 $\boldsymbol{g}_i$ 和逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^i$ 的几何意义。

由式(1.4.5)可以看出，当取 $\mathrm{d}x^1 \neq 0$，而 $\mathrm{d}x^2 = \mathrm{d}x^3 = 0$ 时，$\boldsymbol{g}_1$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 重合。由于 $\mathrm{d}x^2 = \mathrm{d}x^3 = 0$ 意味着坐标 x^2 和 x^3 不变，而只有 x^1 在变化，因此，这时的 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 必与 x^1 坐标线相合；且因为 $\mathrm{d}x^1$ 是个无穷小量，因此 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 与 x^1 坐标线的切线重合。这就是说 $\boldsymbol{g}_1$ 沿着 x^1 坐标线的切线，并且朝着 x^1 坐标增大的方向。同理可知 $\boldsymbol{g}_2$ 和 $\boldsymbol{g}_3$ 分别沿着 x^2 坐标线和 x^3 坐标线的切线，并且朝着 x^2 坐标和 x^3 坐标增大的方向。

关于逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^i$，由定义式(1.4.6)可知，如对于 $\boldsymbol{g}^1$ 矢量，它必垂直于 $\boldsymbol{g}_2$ 和 $\boldsymbol{g}_3$。由于一点处的 x^2 坐标线和 x^3 坐标线都在 x^1 坐标为常数的坐标面内，因此这一点处的 $\boldsymbol{g}_2$ 和 $\boldsymbol{g}_3$ 都在该点处 x^1 为常数的坐标面上，也就是说 $\boldsymbol{g}^1$ 就是该坐标面的法线方向，又因为 $\boldsymbol{g}^1 \cdot \boldsymbol{g}_1 = 1$，即 $\boldsymbol{g}^1$ 与 $\boldsymbol{g}_1$ 的夹角为锐角，所以 $\boldsymbol{g}^1$ 矢量应当指向 x^1 坐标增大的一侧。

1.5 坐标变换

描述同一空间的物理问题，可以根据需要选择各种不同的坐标系，同一个物理量在不同坐标系中往往以不同的分量加以定量描述。那么同一个物理量的这些不同分量之间有什么关系呢？

考虑两组坐标系："老"坐标系 x^i；"新"坐标系 $x^{i'}$。它们之间的函数关系为

$$x^i = x^i(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) = x^i(x^{j'}) \tag{1.5.1a}$$

或者

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, x^2, x^3) = x^{i'}(x^j) \tag{1.5.1b}$$

我们说式(1.5.1a)或式(1.5.1b)决定了坐标变换。上述公式右端的函数，我们假定它们在所讨论的区域内为单值连续的，并且具有需要的各阶连续导数。除此之外，还要求满足雅克比(Jacobian)行列式

$$\left|\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\right| \neq 0 \quad 或 \quad \left|\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\right| \neq 0$$

1.5.1 基矢量的转换关系

设老坐标系的协变基矢量和逆变基矢量是 $\boldsymbol{g}_i$ 和 $\boldsymbol{g}^i$；新坐标系的协变基矢量和逆变基矢量是 $\boldsymbol{g}_{i'}$ 和 $\boldsymbol{g}^{i'}$。将新坐标系的基矢量按老坐标系的基矢量分解，有

$$\boldsymbol{g}_{i'} = \beta_{i'}^{j} \boldsymbol{g}_j \quad (i' = 1', 2', 3') \tag{1.5.2}$$

$$\boldsymbol{g}^{i'} = \beta_j^{i'} \boldsymbol{g}^j \quad (i' = 1', 2', 3') \tag{1.5.3}$$

上两式中，$\beta_{i'}^{j}$ 称为**协变转换系数**，$\beta_j^{i'}$ 称为**逆变转换系数**，各有9个，可各自排列成 3×3 矩阵。协变转换系数 $\beta_{i'}^{j}$ 和逆变转换系数 $\beta_j^{i'}$ 其实并不独立，这是因为协变基矢量和逆变基矢量必须满足对偶条件

$$\delta_{i'}^{j'} = \boldsymbol{g}_{i'} \cdot \boldsymbol{g}^{j'} = \beta_{i'}^{k} \boldsymbol{g}_k \cdot \beta_l^{j'} \boldsymbol{g}^l = \beta_{i'}^{k} \beta_l^{j'} \delta_k^l = \beta_{i'}^{k} \beta_k^{j'} \quad (i', j' = 1', 2', 3') \tag{1.5.4a}$$