概率论和数理统计

焦点概念·性质分析

周概容 张建华 编著

3

北京航空航天大学出版社

概率论和数理统计
焦点概念·性质分析

周概容　张建华　编著

北京航空航天大学出版社

内容简介

本书是参照理工类、经济与管理类各专业通用的教材和全国硕士研究生入学统一考试《数学考试大纲》编写的，是关于“概率论和数理统计”的一些基本概念和基本性质的学习指导书。首先将一些最基本的概念和性质以“命题”的形式提出，然后进行逐一的解答和深入的分析。在许多命题的说明中列举了曾在近年来全国硕士研究生入学统一考试数学试卷中出现的相关试题，这些命题往往是有关试题的“核心部分”——焦点概念或性质。正确地剖析题目的焦点概念或性质是解题的关键所在。

本书与徐兵教授等编著的《高等数学焦点概念·性质分析》属于同一系列。该系列中的《线性代数焦点概念·性质分析》一书由肖马成教授编写，正在编写中。

本书适用于正在学习概率论和数理统计课程的学生，特别是准备报考硕士研究生和 MBA 的在校生、在职人员和同等学力考生。

图书在版编目(CIP)数据

概率论和数理统计焦点概念·性质分析/周概容等编著. —北京:北京航空航天大学出版社,2005.8

ISBN 7-81077-681-9

Ⅰ. 概… Ⅱ. 周… Ⅲ. ①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ. 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 069455 号

概率论和数理统计

焦点概念·性质分析

周概容　张建华　编著

责任编辑　胡　敏

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(100083)　发行部电话:(010)82317024　传真:(010)82328026

http://www.buaapress.com.cn　E-mail:bhpress@263.net

北京时代华都印刷有限公司印装　各地书店经销

*

开本:787×960　1/16　印张:10.75　字数:241 千字

2005 年 8 月第 1 版　2005 年 8 月第 1 次印刷　印数:4 000 册

ISBN 7-81077-681-9　定价:15.00 元

前　言

“概率论和数理统计”是理工类、经济与管理类各专业必修的基础课程，又是全国硕士研究生入学统一考试数学考试必考的内容。

掌握概率论和数理统计的基本概念、基本性质和基本公式，是学好这门课程的首要问题，也是初学者不容易解决的问题。特别是概率论与高等数学的其他课程（例如微积分和线性代数）有所不同，只掌握性质和运算公式还远远不够，还必须有很好的“概率的直观”，就像学习几何学要有很好的“几何的直观”一样，而这正是初学者的难点所在。

以全国硕士研究生入学统一考试为例，研究生入学统一考试数学试题有三种题型：填空题、（单项）选择题和解答题（包括计算题和证明题）。在这三种题型中，填空题和选择题为客观性试题，解答题是主观性试题。三种题型的功能各有不同。概括地说，填空题多为简单的计算题或概念题，主要考查考生对于某些最基本的概念、性质及公式掌握的熟练程度，快捷、准确的运算能力以及正确的判断能力和推理能力；选择题则主要考查分析、比较、鉴别和判断的能力，按内容大致可以分为计算性、概念性和理论性三种，一般也都是围绕着基本概念和性质命制的；解答题中的计算题和应用题，主要考查考生对数学相关内容的基本概念、基本原理和方法的掌握与熟练的程度，灵活运用以及数学运算、抽象概括、分析和解决实际问题的能力。此外，还有证明题。证明题除考查考生对基本原理和方法掌握的程度外，主要考查逻辑推理能力。

然而，不管是哪种题型，都是围绕着基本概念、性质和公式展开的。换句话说，无论是哪种题型，都有一个重点考查的“核心”概念、性质或公式。本书的目的就是为读者提供理清各种焦点概念、性质或公式的范例，通过例题向读者剖析解题的思路，演示各种典型的解题方法和技巧。

本书分为两大部分。第一部分针对概率论和数理统计中的基本概念和基本性质，以命题的形式提出问题。第二部分是命题的答案、分析和说明，在一些题目的说明中列举了全国硕士研究生入学统一考试数学试卷中的相关试题，并指出其中的焦点概念和性质。本书与北京航空航天大学徐兵教授等编著的《高等数学焦点概念·性质分析》属于同一系列。该系列的《线性代数焦点概念·性质分析》由南开大学肖马成教授编写，正在编写中。

本书的读者对象是正在学习概率论和数理统计课程的学生，特别是准备报考硕士研究生和MBA的在校生、在职人员和同等学力考生。

本书的作者参加了全国硕士研究生入学统一考试《数学考试大纲》的起草和历次修订，连续17年参加了全国硕士研究生入学统一考试“数学试题”命题组，并重点负责“概率论和数理统计”试题的命制。

周概容

2005年2月于南开大学

目　　录

第一部分　命题的正误判定

一、随机事件和概率

命题 1　若 A 和 B 互为对立事件，则 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 也互为对立事件。

命题 2　若 A 和 B 是任意两个概率都不为 0 的事件，而且 $\mathbf{P}(AB)=0$，则事件 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 既可能相容也可能不相容。

命题 3　若 $AC=BC$，则 $A=B$。

命题 4　若 $\mathbf{P}(AB)=0$ 且 $\mathbf{P}(A+B)=1$，则 A 和 B 互为对立事件。

命题 5　在电炉上安装了 4 个温度控制器，其显示温度的误差是随机的，已知只要其中两个显示的温度不低于 t_0，电炉就断电。设 $T_{(1)}\leqslant T_{(2)}\leqslant T_{(3)}\leqslant T_{(4)}$ 是 4 个温度控制器显示的按递增顺序排列的温度值，则事件 $A=\{$电炉断电$\}=\{T_{(2)}\geqslant t_0\}$。

命题 6　设 A,B,C 是任意三事件，则 $AC=BC$ 成立的充分和必要条件是

$$\overline{A+B}C=\overline{A}C+\overline{B}C$$

命题 7　对于任意二事件 A 和 B，下列各关系式等价，即

$$A\subset B \qquad \overline{A}\supset\overline{B} \qquad A\overline{B}=\varnothing \qquad A+B=B$$

命题 8　设事件 A,B,X 满足等式 $(A+\overline{X})(\overline{A}+\overline{X})+\overline{A+X}+\overline{\overline{A}+X}=B$，则 $X=\overline{B}$。

命题 9　设事件 B 的概率为 1，则对于任意事件 A，有

$$\mathbf{P}(AB)=\mathbf{P}(A) \qquad \mathbf{P}(A+B)=1$$

命题 10　对于任意二事件 A,B，若 $\mathbf{P}(AB)=0$，则 $A-B=A$。

命题 11　假设一箱共有 n 件产品，其中共有 $m(0\leqslant m\leqslant n)$ 件不合格品。现在一件接一件随机地接连从箱中抽取产品，试求第 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 件抽到的是不合格品的概率都恰好等于不合格品所占的比率 $p=m/n$。

命题 12　假设匣中有 12 个球，其中有 3 个白球、4 个黑球和 5 个红球。现在从匣中一个一个地随机地抽出所有的球，则红球比白球出现得早的概率大于白球比红球出现得早的概率。

命题 13　设 $G=\{(x,y):0\leqslant x,y\leqslant 1\}$ 是一正方形。现在向 G 上均匀地掷随机点，假设随机点的落点 (X,Y) 在 G 上分布均匀。考虑事件：

$$A=\left\{X\leqslant\frac{1}{2}\right\} \qquad B=\left\{Y\leqslant\frac{1}{2}\right\} \qquad C=\left\{\left(X-\frac{1}{2}\right)\left(Y-\frac{1}{2}\right)<0\right\}$$

则事件 A,B,C 两两独立，但是 A,B,C 不相互独立，而且 AB 与 C 也不独立.

命题 14 假设磁带全长 200 米,两面可以录音。在磁带的正、反两面随机地各录制了一段音乐,分别占用磁带 30 米和 50 米。后来发现磁带的 80～90 米处损坏,引进事件 $E_1=\{$两段音乐均未受损$\}$,事件 $E_2=\{$两段音乐至少一段受损$\}$,则 $\mathbf{P}(E_1)\leqslant\mathbf{P}(E_2)$。

命题 15 假设 4 考生的准考证混放在一起,现在将其随意地发给 4 个人,则没有一个人领到自己准考证的概率小于至少有一个人领到自己准考证的概率。

命题 16 假设一批产品中一等品、二等品、三等品的比例为 6∶3∶1。现在从中随意取出一件,结果不是三等品,则取到的是一等品的概率 α 大于取到的是二等品的概率 β。

命题 17 假设事件 A,B 的概率为 $\mathbf{P}(A)=0.5,\mathbf{P}(B)=0.7$,则概率 $\mathbf{P}(AB)$ 的最大值等于 0.5,而最小值等于 0.2。

命题 18 设 A_1,A_2,B 是任意事件,其中 $0<\mathbf{P}(B)<1$,满足等式

$$\mathbf{P}(A_1+A_2\mid B)=\mathbf{P}(A_1\mid B)+\mathbf{P}(A_2\mid B)$$

则

$$\mathbf{P}(A_1+A_2)=\mathbf{P}(A_1)+\mathbf{P}(A_2)$$

命题 19 设患有某种疾病者在人口中的比重为 0.2%。一项血液化验用于诊断这种疾病,有 95%的患者呈阳性反应,有 1%的健康人也呈阳性反应——伪阳性,则这种化验不应采用。

命题 20 对于任意三事件 $A,B,C(\mathbf{P}(C)>0)$,若事件 A 和 B 独立,则 A 和 B 关于 C 条件独立,即

$$\mathbf{P}(AB\mid C)=\mathbf{P}(A\mid C)\mathbf{P}(B\mid C)$$

命题 21 假设事件 A,B,C 两两独立,则事件 A,B,C 相互独立的充分和必要条件是 A 和 BC 独立。

命题 22 对于任意二事件 A 和 B,下列各等式

(1) $\mathbf{P}(B|A)=\mathbf{P}(B)$

(2) $\mathbf{P}(A|B)=\mathbf{P}(A)$

(3) $\mathbf{P}(B|A)=\mathbf{P}(B|\overline{A})$

(4) $\mathbf{P}(B|A)+\mathbf{P}(\overline{B}|\overline{A})=1$

都是 A 和 B 相互独立的充分必要条件。

命题 23 对于任意二事件 A_1,A_2,考虑二随机变量

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{若事件 } A_i \text{ 出现}\\ 0 & \text{若事件 } A_i \text{ 不出现}\end{cases}\qquad(i=1,2)$$

"随机变量 X_1 和 X_2 独立"的充分与必要条件是事件 A_1 和 A_2 相互独立。

答案为:是。

命题 24 任意二事件 A 和 B 的概率都满足不等式

$$|\mathbf{P}(AB)-\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|\leqslant\frac{1}{4}$$

命题 25　对于独立重复试验(各次试验相互独立,各次试验成功的概率不变),只要每次试验成功的概率不为0,随着试验的不断重复,以概率1迟早会成功。

命题 26　将一枚完全对称的硬币独立地掷两次,设 $A_1=\{$掷第一次出现正面$\}$,$A_2=\{$掷第二次出现正面$\}$,$A_3=\{$正、反面各出现一次$\}$,则事件 A_1,A_2,A_3 两两独立。

命题 27　对于任意事件 A 和 B,若 $AB\neq\phi$,则 A 和 B 有可能相互独立。

命题 28　将一枚完全对称的硬币接连掷 $n(n\geqslant 2)$ 次,以 A 表示事件"正面最多出现一次",以 B 表示事件"正面和反面各至少出现一次",则事件 A 和 B 的独立性与掷硬币的次数 n 无关。

命题 29　假设两名篮球运动员甲和乙每次投篮投中的概率分别为0.7和0.6,每人各进行3次投篮,进球较多者胜,进球较少者负,则"甲胜"比"平局"的可能性要大。

命题 30　概率为0或1的事件和任何事件都独立。

命题 31　设 A 和 B 是概率都不为0或1的任意二不相容事件,则 A 和 B 一定不独立。

二、随机变量及其分布

命题 32　假设 X 是在区间 $(0,1)$ 内取值的连续型随机变量,而 $Y=1-X$。已知概率 $\mathbf{P}\{X\leqslant 0.29\}=0.75$,则可以惟一地确定满足 $\mathbf{P}\{Y\leqslant k\}=0.25$ 的常数 k。

命题 33　一个学徒工在同一台机床上接连加工了3个零件,假设第 k 个零件不合格的概率为 $p_k=1/(k+1)(k=1,2,3)$,以 X 表示不合格品的件数,则 $\mathbf{P}\{X=2\}=1/3$。

命题 34　设备由3个部件构成,运行中各部件需要调整的概率相应为0.1,0.2,0.3。假设各部件的状态相互独立,则同时需要调整的部件个数 X 的概率分布为

$$X\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0.902 & 0.092 & 0.006\end{pmatrix}$$

命题 35　假设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & 若\ x<-1\\ a+b\arcsin x & 若\ -1\leqslant x<1\\ 1 & 若\ x\geqslant 1\end{cases}$$

则对于适当选择的常数 a 和 b,$F(x)$ 是连续型随机变量的分布函数。

命题 36　设 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 都是随机变量的分布函数,a 和 b 是非负常数且 $a+b=1$,则 $F(x)=aF_1(x)+bF_2(x)$ 也可以做随机变量的分布函数。

命题 37　假设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布,$F(x)$ 是其分布函数,则随机变量 $Y=F(X)$ 在区间 $[0,1]$ 上服从均匀分布。

命题 38 假设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，$G(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的均匀分布函数，则随机变量 $Y=G(X)$ 在区间 $[0,1]$ 上服从均匀分布。

命题 39 假设 X 是只有两个可能值的离散型随机变量，Y 是连续型随机变量，且 X 和 Y 相互独立，则随机变量 $X+Y$ 的分布函数是连续函数。

命题 40 假设随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)$ 关于直线 $x=a$ 对称，则 X 分布函数 $F(x)$ 一定满足

$$F(a-x)+F(a+x)=1 \qquad (-\infty<x<\infty)$$

命题 41 设随机变量 X 服从指数分布，$Y=\min\{X,2\}$，则随机变量 Y 的分布函数恰好有一个间断点。

命题 42 连续型随机变量的概率密度是：(1) 连续函数；(2) 非负有界函数。

命题 43 (1) 连续型随机变量等于任何给定值 a 的概率为 0；(2) 二连续型随机变量之和未必是连续型随机变量。

命题 44 设 $F_1(x),F_2(x)$ 是随机变量的分布函数，$f_1(x),f_2(x)$ 是相应的概率密度，则 $F_1(x)F_2(x)$ 也是分布函数，其密度为 $f_1(x)f_2(x)$。

命题 45 一正立方体容器盛有 3/4 的液体，假设在其 4 个侧面和底面随机部位出现了一个小孔，液体经此小孔流出，剩余液体液面的高度 X 是一随机变量，则其分布函数 $F(x)$ 至少有 2 个间断点。

命题 46 以 X 表示 n 次独立重复试验(伯努利试验)成功的次数。假设每次试验成功的概率为 p，则事件“成功次数 X 为奇数”的概率 $\alpha=0.5$。

命题 47 设试验 E 是一伯努利试验，其成功的概率为 p，而失败的概率为 $q=1-p$。现在将 E 独立地一次接一次地进行，直到成功或完成 n 次试验为止，其中 $n\geqslant 2$ 是给定的自然数，则做试验次数 X 的概率分布是参数为 (n,p) 的二项分布。

命题 48 设 X 是只取正整数为值的随机变量，则它服从几何分布：

$$\mathbf{P}\{X=k\}=p(1-p)^{k-1} \qquad (k=1,2,\cdots,n,\cdots;0<p<1)$$

当且仅当 $n\geqslant 1$ 时，有

$$\mathbf{P}\{X=m+n \mid X>n\}=\mathbf{P}\{X=m\} \qquad m\geqslant 1$$

命题 49 一辆汽车沿 4 处设有红绿信号灯的街道行驶，假设各信号灯的状态相互独立，而且红和绿两种信号显示的时间相同，则该汽车在遇到红灯前已通过信号灯的个数 X 服从几何分布。

命题 50 假设有 10 台设备，每台设备出故障的概率为 0.08。每台设备出现故障时需要由一人进行维护，则为保证在 95% 的情况下当设备出现故障时都能及时得到维护，至少需要安排两个人值班。

命题 51 已知随机变量 X 和 Y 相互独立且服从同一(几何)分布：

$$\mathbf{P}\{X=k\}=\mathbf{P}\{Y=k\}=pq^{k-1} \qquad (k=1,2,\cdots)$$

则对于 $n\geqslant 2$，随机变量 X 关于事件 $\{X+Y=n\}$ 的条件概率分布是等可能分布（X 以相同的概率取有限个可能值）。

命题 52　设 X 和 Y 分别服从参数为 λ_1 和 λ_2 的泊松分布，并且相互独立，则 $X+Y$ 服从参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松分布。

命题 53　假设一日内到过某商店的顾客人数服从泊松分布，分别以 X 和 Y 表示一日内到过该商店的顾客中购货和未购货的人数，则随机变量 X 和 Y 的概率分布都是泊松分布。

命题 54　假设某药物产生副作用的概率为 0.2%，则可以利用泊松分布计算在 1 000 例服此药的患者中：

(1) 恰好有 0,1,2,3 例出现副作用的概率的近似值；

(2) 至少有一例出现副作用的概率的近似值。

命题 55　假设一大型设备在任何长为 t 的时间内出现故障的次数 $v(t)$ 服从参数为 λt 的泊松分布，则相继出现两次故障的时间间隔 T 服从参数为 λ 的指数分布。

命题 56　假设 X 是只取正值的随机变量，则对于任意 $x>0,t>0$，当且仅当 X 服从指数分布时，有

$$\mathbf{P}\{X\leqslant x+t\mid X>t\}=\mathbf{P}\{X\leqslant x\}$$

命题 57　假设一种电池的寿命 X 服从指数分布，已知这种电池的平均寿命为 200 小时，则随意一只电池在已经使用了 80 小时的条件下，它至少还能再使用 80 小时的条件概率，等于它最初可以使用 80 小时的概率。

命题 58　假设一装置启动后无故障工作的时间 X(百小时)服从指数分布，平均无故障工作的时间为 2 百小时；每次启动(在无故障的情形下)只需工作 10 小时便自行关机，则该装置每次启动无故障工作的时间 Y 的分布函数恰好有一个间断点。

命题 59　假设随机变量 $X\sim N(0,1)$。记

$$Y=\begin{cases}X & \text{若 } |X|\leqslant 1\\ -X & \text{若 } |X|>1\end{cases}$$

则随机变量 Y 仍服从标准正态分布，而 $Z=X+Y$ 不服从正态分布。

命题 60*　假设随机变量 X 服从区间[0,1]上的均匀分布，且是随机变量 Y 的函数，即

$$X=\frac{1}{2}[1+g(Y)]$$

其中

$$g(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^y \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u$$

则随机变量 Y 服从标准正态分布。

命题 61　设随机变量 $X_1\sim N(\mu,4^2)$，$X_2\sim N(\mu,5^2)$，有

$$p_1=\mathbf{P}\{X_1\leqslant \mu-4\}\qquad p_2=\mathbf{P}\{X_2\geqslant \mu+5\}$$

则对于任意实数 μ，有 $p_1=p_2$。

命题 62 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则随 σ 的增大，概率 $\mathbf{P}\{|X-\mu|\leqslant\sigma\}$ 也随之增大。

命题 63 假设 $y=g(x)$ 是严格单调的连续函数，(c,d) 是函数 $y=g(x)$ 的值域，$x=h(y)$ 是 $y=g(x)$ 的惟一反函数；X 是连续型随机变量，其概率密度为 $f(x)$，则 Y 也是连续型随机变量，其概率密度 $p(y)$ 通过 $f(x)$ 表示为

$$p(y)=\begin{cases}f(h(y))\mid h'(y)\mid & 若\ c<y<d\\ 0 & 其他\end{cases}$$

命题 64 称随机变量 Y 服从参数为 (μ,σ^2) 的对数正态分布，如果其概率密度为

$$f(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}} & 若\ y>0\\ 0 & 若\ y\leqslant 0\end{cases}$$

那么，若随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则随机变量 $Y=\ln X$ 服从参数为 (μ,σ^2) 的对数正态分布。

命题 65 已知随机变量 X 的概率密度(即 X 服从柯西分布)

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}\qquad(-\infty<x<\infty)$$

则随机变量 $Y=\arctan X$ 服从均匀分布。

三、随机变量的联合分布

命题 66 设 $\mathbf{P}\{X\geqslant0,Y\geqslant0\}=3/7$，$\mathbf{P}\{X\geqslant0\}=\mathbf{P}\{Y\geqslant0\}=4/7$，则 $\mathbf{P}\{\max[X,Y]\geqslant0\}$ 等于二事件 $\{X\geqslant0\}$ 与 $\{Y\geqslant0\}$ 之和的概率。

命题 67 设随机变量 X 和 Y 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-2x-y} & 若\ x>0,y>0\\ 0 & 若\ x\leqslant0\ 或\ y\leqslant0\end{cases}$$

则随机变量 X 和 Y 相互独立。

命题 68 若随机变量 X 与它自己独立，则存在一常数 C，使 $\mathbf{P}\{X=C\}=1$。

命题 69 设随机变量 X 和 Y 的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}0 & 若\ \min\{x,y\}<0\\ \min\{x,y\} & 若\ 0\leqslant\min\{x,y\}<1\\ 1 & 若\ \min\{x,y\}\geqslant1\end{cases}$$

则随机变量 X 和 Y 有相同的概率分布。

命题 70 假设随机变量 X 和 Y 相互独立，都服从同一 0—1 分布：

$$X \sim \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{Bmatrix} \qquad Y \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

则 $\mathbf{P}\{X=Y\}=1$。

命题 71　假设试验 E 每次试验成功的概率为 p。将试验 E 独立地一次一次进行，以 X 表示第一次成功之前失败的次数，Y 表示前两次成功之间失败的次数，则 X 和 Y 相互独立。

命题 72　假设随机变量 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{4}(1+xy) & 若\ |x|<1,\ |y|<1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

则随机变量 X 和 Y 不独立，但是 X^2 和 Y^2 独立。

命题 73　设随机变量 X 和 Y 都服从正态分布，则它们的联合分布也一定是正态分布。

命题 74　设随机变量 X 和 Y 都服从正态分布，则 $X+Y$ 一定服从正态分布。

命题 75　设随机变量 X 和 Y 都服从正态分布，且相互独立，则 $X+Y$ 与也服从正态分布。

命题 76　假设独立随机变量 X 和 Y 都服从对数正态分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}} & 若\ x>0 \\ 0 & 若 \leqslant 0 \end{cases}$$

则随机变量 $U=XY$ 也服从对数正态分布。

命题 77　假设随机变量 X 和 Y 相互独立，服从参数分别为 λ_1 和 λ_2 的指数分布，则随机变量 $Z=X+Y$ 仍然服从指数分布。

命题 78　设随机变量 X 和 Y 的联合概率分布是圆 $x^2+y^2\leqslant r^2(r>1)$ 上的均匀分布，则 X 和 Y 都服从均匀分布。

答案为：非。

命题 79　设随机变量 X 在区间 $(1,3)$ 上服从均匀分布，而 Y 在区间 $(X,3)$ 上服从均匀分布，则随机变量 Y 也在区间 $(1,3)$ 上服从均匀分布。

命题 80　设随机变量 X 和 Y 独立，X 的概率分布和 Y 的概率密度相应为

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad Y \sim f(y)=\begin{cases} 1 & 若\ y\in[0,1] \\ 0 & 若\ y\notin[0,1] \end{cases}$$

则随机变量 $Z=X+Y$ 的概率分布是均匀分布。

命题 81　若随机变量 (X,Y) 在以 $(2,0)$，$(0,2)$，$(-2,0)$，$(0,-2)$ 为顶点的正方形 G 上均匀分布，则随机变量 X 和 Y 都在区间 $[-2,2]$ 上服从均匀分布。

命题 82　如果随机变量 X_1,X_2,X_3,X_4 独立，且都服从 0－1 分布：

$$X_i \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} \qquad (i = 1,2,3,4)$$

$$X = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}$$

则行列式 X 的概率分布也是 0－1 分布。

命题 83 某商品一周的需求量 X 是随机变量,已知其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-x} & 若\ x > 0 \\ 0 & 若\ x \leqslant 0 \end{cases}$$

假设各周的需求量相互独立,则两周需求量的概率密度即 $Y=2X$ 的概率密度为

$$g(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}y\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}} & 若\ y > 0 \\ 0 & 若\ y \leqslant 0 \end{cases}$$

命题 84 假设随机变量 X_1,X_2 独立同分布,$F(x)$是各变量共同的分布函数,则$X_{(1)} = \min\{X_1,X_2\}$和 $X_{(2)}=\max\{X_1,X_2\}$也独立同分布。

命题 85 二元函数

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 & 若\ x+y \geqslant 1 \\ 0 & 若\ x+y < 1 \end{cases}$$

具有如下性质:对于每一个自变量单调不减、右连续,且 $F(x,-\infty)=F(-\infty,y)=0$,$F(+\infty,+\infty)=1$,但是 $F(x,y)$不是二元分布函数。

命题 86 设 $F(x,y)$是随机变量 X 和 Y 的联合分布函数,则对于任意实数 $a<b,c<d$ 有

$$\mathbf{P}\{a < X \leqslant b, c < Y \leqslant d\} =$$
$$F(b,d) - [F(b,c) + F(a,d)] + F(a,c)$$

命题 87 设随机变量 X 和 Y 相互独立,且都服从 0－1 分布:

$$\mathbf{P}\{X = 1\} = \mathbf{P}\{Y = 1\} = 0.6$$
$$\mathbf{P}\{X = 0\} = \mathbf{P}\{Y = 0\} = 0.4$$

则随机变量 $U=X+Y$ 和 $V=X-Y$ 不独立。

命题 88 假设随机变量 X 和 Y 都服从正态分布,则“X 和 Y 独立”与“X 和 Y 不相关”等价。

命题 89 若随机变量 X 和 Y 的联合分布是二元正态分布,则“X 和 Y 独立”与“X 和 Y 不相关”等价。

命题 90 假设某地区一年内发生大暴雨的次数 X 和一般暴雨的次数 Y 相互独立,且分别服从参数为 λ_1 和 λ_2 的泊松分布,则在一年内共发生了 $n(n\geqslant1)$次暴雨的条件下,大暴雨次数 X 的条件概率分布仍然是泊松分布。

命题 91 设 A 和 B 是任意二事件,而二随机变量为

$$X=\begin{cases}1 & \text{若 } A \text{ 出现}\\ 0 & \text{若 } A \text{ 不出现}\end{cases}$$

$$Y=\begin{cases}1 & \text{若 } B \text{ 出现}\\ 0 & \text{若 } B \text{ 不出现}\end{cases}$$

则随机变量 X 和 Y 独立的充分与必要条件是事件 A 和 B 相互独立。

命题 92 假设随机变量 X 和 Y 独立同分布,则对于任意 $a<b$,有

$$\mathbf{P}\{a<\min[X,Y]\leqslant b\}=[\mathbf{P}\{X>a\}]^2-[\mathbf{P}\{Y>b\}]^2$$

命题 93 假设随机变量 X 和 Y 的联合概率密度为 $f(x,y)$,则

(1) $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}f(z-y,y)\mathrm{d}y$$

(2) $Z=X-Y$ 的概率密度为

$$f(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(z+y,y)\mathrm{d}y$$

命题 94 设随机变量 X 和 Y 的联合分布是二元正态分布,其联合密度为

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{u^2-2\rho uv+v^2}{2(1-\rho^2)}\right\}$$

其中 $u=(x-\mu_1)/\sigma_1$,$v=(y-\mu_2)/\sigma_2$,则随机变量

(1) $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$,$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$;

(2) X 关于 $\{Y=y\}(-\infty<y<\infty)$ 的条件分布是正态分布 $N(\mu_{1|2},\sigma_{1|2}^2)$,其中

$$\mu_{1|2}=\mu_1(y)=\mu_1+\frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)$$

$$\sigma_{1|2}^2=\sigma_1^2(1-\rho^2)$$

(3) Y 关于 $\{X=x\}(-\infty<x<\infty)$ 的条件分布是正态分布 $N(\mu_{2|1},\sigma_{2|1}^2)$,其中

$$\mu_{2|1}=\mu_2(x)=\mu_2+\frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)$$

$$\sigma_{2|1}^2=\sigma_2^2(1-\rho)^2$$

命题 95 假设随机变量 X 和 Y 独立,且同服从参数为 $p(0<p<1)$ 的 0—1 分布,随机变量

$$Z=\begin{cases}0 & \text{若 } X+Y \text{ 为奇数}\\ 1 & \text{若 } X+Y \text{ 为偶数}\end{cases}$$

则当 $p=0.5$ 时随机变量 X,Y,Z 两两独立,但是对于任意 $p(0<p<1)$,X,Y,Z 不独立。

四、随机变量的数字特征

命题 96 已知随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & 若\ x<-1\\ 0.25 & 若\ -1\leqslant x<0\\ 0.75 & 若\ 0\leqslant x<1\\ 1 & 若\ x\geqslant 1\end{cases}$$

则 $\mathbf{D}\left(\frac{X}{1+X^2}\right)=0.125$。

命题 97 假设无线电测距仪无系统误差，其测量的随机误差服从正态分布。已知随机测量的绝对误差以概率 0.95 不大于 20 米，则随机测量误差的标准差 $\sigma=20$ 米。

命题 98 将一枚均匀对称的色子独立地重复掷 4 次，以 X 表示 4 次掷出的点数之和，则由切贝绍夫（切比雪夫）不等式，可见

$$\mathbf{P}\{10<X<18\}\leqslant\frac{13}{48}$$

命题 99 设 X 是任一非负（离散型或连续型）随机变量，已知 $\sqrt{X}$ 的数学期望存在，则对于任意实数 $\varepsilon>0$，有

$$\mathbf{P}\{X\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{\mathbf{E}\sqrt{X}}{\sqrt{\varepsilon}}$$

命题 100 设随机变量 X 的数学期望为 $\mu=\mathbf{E}X$，则 $\mathbf{E}(X-C)^2$ 当常数 $C=\mu$ 时取最小值，即

$$\mathbf{E}(X-\mu)^2=\min_C\mathbf{E}(X-C)^2$$

命题 101 假设随机变量 $X_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 独立同分布，且 $\mathbf{E}X_{ij}=\mu,\mathbf{D}X_{ij}=\sigma^2$，则对于行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix}X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n}\\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nn}\end{vmatrix}$$

（1）数学期望 $\mathbf{E}\Delta=0$；

（2）方差 $\mathbf{D}\Delta=n!\ \sigma^{2n}$，假如 $\mu=0$。

命题 102 设（离散型或连续型）随机变量 X 和 Y 的数学期望 $\mathbf{E}Y$ 和 $\mathbf{E}Y$ 存在，则

（1）$\mathbf{E}(X+Y)=\mathbf{E}X+\mathbf{E}Y$；

（2）$\mathbf{E}XY=\mathbf{E}X\mathbf{E}Y$，假如 X 和 Y 独立。

命题 103 自动生产线加工的零件的内径 X（毫米）服从正态分布 $N(\mu,1)$，内径小于 10 毫米或大于 12 毫米的为不合格品，其余为合格品。每件产品的成本为 10 元，内径小于 10 毫米的可再加工成合格品，尚需费用 5 元。全部合格品在市场上销售，每件合格品售价 20 元，则当 $\mu\approx10.31$ 毫米时，销售一个零件的平均销售利润最大。

命题 104 一名射手的命中率为 p，总共有十发子弹；他接连独立地进行射击直到命中目标或子弹用完为止，则射击次数 X 服从几何分布，且其数学期望为 $1/p$。

命题 105 假设某季节性商品，适时地售出 1 千克可以获利 s 元，季后销售每千克净亏损 t 元。假设一家商店在季节内该商品的销售量 X(千克)是一随机变量，并且在区间(a,b)内均匀分布，则季初应安排 h_0(千克)商品可以使期望销售利润最大，其中

$$h_0=\frac{sb+ta}{s+t}$$

命题 106 假设 n 个信封内分别装有发给 n 个人的信件，但信封上各收信人的地址是随机填写的。以 X 表示收到自己信件的人数，则 X 的数学期望和方差都等于 1。

命题 107 假设随机变量 X 和 Y 在椭圆

$$G=\left\{(x,y):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$$

服从均匀分布，则随机变量

(1) X 和 Y 一个关于另一个的条件概率分布是均匀分布；

(2) X 和 Y 不相关，但是不独立。

命题 108 一微波线路有两个中间站，其中任何一个出现故障都要引起全线路故障。假设两个中间站无故障的时间都服从指数分布，平均无故障工作的时间相应为 1 和 0.5(千小时)，则全线路无故障工作时间 X 的数学期望等于 0.5(千小时)。

命题 109 假设随机变量(X,Y)的联合密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2}[\varphi_1(x,y)+\varphi_2(x,y)]$$

其中 $\varphi_1(x,y)$和 $\varphi_2(x,y)$都是二元正态分布密度，即

$$\varphi_1(x,y)=\frac{3}{4\pi\sqrt{2}}\exp\left\{-\frac{9}{16}\left(x^2-\frac{2}{3}xy+y^2\right)\right\}$$

$$\varphi_2(x,y)=\frac{3}{4\pi\sqrt{2}}\exp\left\{-\frac{9}{16}\left(x^2+\frac{2}{3}xy+y^2\right)\right\}$$

则随机变量 X 和 Y

(1) 都服从标准正态分布；

(2) 不相关，但是不独立。

命题 110 设 X 和 Y 分别表示 100 次独立重复试验的成功次数和失败次数，则随机变量 X 和 Y 的

(1) 标准差的最大值等于 5；

(2) 相关系数等于 $\rho=-1$。

命题 111 对于任意随机变量 X 和 Y，$\mathbf{D}(X+Y)=\mathbf{D}(X-Y)$是 X 和 Y 不相关的充分和必要条件。

命题 112 假设随机变量 X 在区间 $[-1,1]$ 上均匀分布，则 $U=\arcsin X$ 和 $V=\arccos X$ 的相关系数等于 -1。

命题 113 对于任意二事件 A 和 B，其中 $0<\mathbf{P}(A)$，$\mathbf{P}(B)<1$，称

$$\rho=\frac{P(AB)-P(A)P(B)}{\sqrt{P(A)P(\overline{A})P(B)P(\overline{B})}}$$

为事件 A 和 B 的相关系数，则

(1) $|\rho|\leqslant 1$；

(2) 二事件 A 和 B 独立的充分和必要条件是 $\rho=0$。

命题 114 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=0.5\mathrm{e}^{-|x|}(-\infty<x<\infty)$，则 X 与 $|X|$ 不相关，但是不独立。

命题 115 假设随机变量 X 和 Y 有二阶原点矩，则

(1) $(\mathbf{E}XY)^2\leqslant \mathbf{E}X^2\mathbf{E}Y^2$；

(2) $|\rho|\leqslant 1$，其中 ρ 是 X 和 Y 的相关系数。

命题 116 假设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，并且都服从参数为 $p(0<p<1)$ 的 $0-1$ 分布。记

$$Y_i=\begin{cases}0 & X_i+X_{i+1}\text{ 是偶数}\\ 1 & X_i+X_{i+1}\text{ 是奇数}\end{cases}$$

$$Y=\sum_{i=1}^{n-1}Y_i$$

则 $\mathbf{E}Y=2npq$，$\mathbf{D}Y=(n-1)pq[n-4(n-1)pq]$。

命题 117 对于任意二随机事件 A 和 B，设随机变量

$$X=\begin{cases}1 & \text{若 } A \text{ 出现}\\ -1 & \text{若 } A \text{ 不出现}\end{cases}$$

$$Y=\begin{cases}-1 & \text{若 } B \text{ 出现}\\ 1 & \text{若 } B \text{ 不出现}\end{cases}$$

则当且仅当"事件 A 和 B 独立"时"随机变量 X 和 Y 不相关"。

命题 118 假设 X 和 Y 是取自然数为值的随机变量，并且相互独立，其 $\mathbf{E}X$ 和 $\mathbf{E}Y$ 存在，则

$$\mathbf{E}\min\{X,Y\}=\sum_{m=1}^{\infty}\mathbf{P}\{X\geqslant m\}\mathbf{P}\{Y\geqslant m\}$$

命题 119 已知随机变量 X 和 Y 独立同正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则随机变量

$$U=\alpha X+\beta Y \text{ 和 } V=\alpha X-\beta Y$$

当且仅当 $\alpha^2=\beta^2$ 时，不相关。

命题 120 设随机变量 X 在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布，在 $X=x(0<x<1)$ 的条件下，随