工程弹性力学基础

GCTYXLXJC

胡玉林　刘延強　编

石油大学出版社

工程弹性力学基础

胡玉林　刘延强　编

石油大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

工程弹性力学基础/胡玉林编著.一东营:石油大学出版社,2001.9

ISBN 7-5636-1529-6

Ⅰ.工… Ⅱ.胡… Ⅲ.工程力学:弹性力学 Ⅳ.TB125

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第061168号

书　　名:工程弹性力学基础

主　　编:胡玉林　刘延强

出 版 者:石油大学出版社(山东　东营　邮编　257061)

网　　址:http://sunctr.hdpu.edu.cn/~upcpress

电子信箱:upcpress@mail.hdpu.edu.cn

印 刷 者:泰安开发区成大印刷厂

发 行 者:石油大学出版社(电话　0546—8392563)

开　　本:850×1168　1/32　印张7　字数:182千字

版　　次:2001年8月第1版第1次印刷

印　　数:1—1000册

定　　价:9.80元

前　言

根据教学的需要，按照大纲的要求，我们在教学研究和实践的基础上编写了这本教材。

为了教学使用方便，扩大使用范围，使学生在较少的学时内掌握弹性力学的基本理论和应用，以适应教育改革的需要，编写中我们本着提高起点、力求简明、精减篇幅的原则，既保留了传统教材的优势，又力求有新的发展和特色。本书从整体上采用了从一般到特殊的讨论方式，结构紧凑。本书初稿曾分别于1995年和1999年两次校内印刷，在石油大学〔华东〕本科生中作为教材使用了五年，效果良好。

本书共分十一章，前七章介绍了弹性力学的基本理论，为基本内容；后四章通过对化工机械、石油机械和动力机械等一些工程结构与零部件实际问题的分析，介绍了弹性力学的解法与应用。因此，该书除作为机械类、近机械类和土建类专业本科生的教材外，对相关工程技术人员也有一定的参考价值。

本书第二、四、六、八、九、十一章由胡玉林编写。第一、三、五、七、十章由刘延强编写。该书初稿由北京工业大学的张延庆教授作了认真细仔的审阅，并提出许多宝贵意见，同时也受到教研室领导和同事们的大力支持，在此一并致谢。

限于编者水平，书中难免有错误和不妥之处，恳请读者批评指正。

编　者

2001.3

目　　录

第一章 绪 论

§1-1 弹性力学的任务

弹性体力学，常简称为弹性力学，又称为弹性理论，是固体力学的一个分支。它主要研究弹性体由于受外力作用或温度改变以及支座沉陷等原因而发生的应力、应变和位移。

弹性力学的任务与材料力学、结构力学的任务一样，都是分析机构和结构或其构件在弹性阶段的应力和位移，校核它们是否满足所需的强度、刚度和稳定性，并寻求或改进它们的计算方法。但是，弹性力学与材料力学等又有所分工和区别。

首先是研究问题的范围不同，材料力学基本上只研究杆状（长度远大于高度和宽度）构件在拉压、剪切、弯曲、扭转变形状态下的应力和位移；结构力学则主要在材料力学基础上研究杆状构件组成的结构（如桁架、刚架等杆件系统）。而弹性力学研究范围除上述杆件外，还包括板、壳、块体及其组成的结构等问题，例如工程中的叶轮、机壳、大轴、高压容器及管道、桥梁、堤坝、土墙、地基等，所以它的研究范围更加广泛。

其次是研究问题的严密程度不同。在研究杆件时，弹性力学和材料力学虽然都从静力、几何、物理三方面进行分析，但材料力学却用了一些关于形变状态或应力分布的假设，大大简化了推演，使解答具有很大程度的近似性；弹性力学研究该问题时不需引用这些假定，因而研究方法更严密，解答更精确，可以用来校核材料力学解答的近似性。

例如，研究直梁在横向载荷下的弯曲，材料力学采用了平面假设，得出了横截面上正应力按线性分布这一近似结论；而弹性力学

末用该假设，从而其研究结果可以验证该假设的精确性和适用范围，即梁的高度 h 远小于梁跨度 l 时，材料力学解满足工程要求，而当 $h>l/4$ 时，该假设不再适用，这时横截面上正应力按曲线分布。

第三是解决问题的能力不同。弹性力学可以解决材料力学、结构力学无法解决的问题。例如，拉压构件上的孔边应力集中问题，材料力学就不能解决，只能计算净截面上平均应力。而按弹性力学的计算结果，净截面上的应力远不是均布的，在孔边附近发生高度的应力集中，孔边最大应力值比平均应力大出几倍。另外，虽然弹性力学通常不研究杆件系统，但近几十年许多人的工作，使弹性力学与结构力学特别是通过有限单元法，越来越密切地结合起来，弹性力学吸收了结构力学中超静定结构的分析方法（位移法、力法或混合法等等），大大扩展了应用范围，提高了解决问题的能力。

总之，弹性力学研究问题的范围更广、方法更严密、结果更精确、能力更强。然而，它与材料力学、结构力学间也不是截然分开的，更不是一成不变的。我们应淡化分工，更多地发挥它们的综合应用，更好地发挥它们的作用。

§1-2　弹性力学中的基本假定与研究方法

物体受力后表现的力学性能实际上非常复杂，若精确考虑各种因素，将难以导出其力学方程，建立具有普遍意义的理论。即使导出了方程，也相当复杂，不可能求解。因此，必须根据物体性质与解题范围，略去一些次要的、非本质的因素，使问题大为简化，方程易于建立并使求解成为可能，又能反映问题的主要方面，符合实际。为此，做如下基本假定：

一、连续性假设

连续性假设是假定物体的介质不留空隙地填满整个物体体

积。这样，物体内的应力、应变和位移等物理量可视为连续的，因而才可能用坐标的连续函数来表示它们的变化规律。实际物体都是微粒组成的，相互间有间隙，但其尺寸远小于微粒尺寸，故该假定不会引起明显误差。

二、均匀性假设

均匀性假设即假定整个物体是由同类型的均匀材料组成的。这样，物体内各点的物理性质都相同，不随坐标位置的改变而改变。研究时可取小部分分析，然后将分析结果用于整体。像混凝土这样由两种或两种以上的材料组成的物体，只要每种材料颗粒均匀分布且远小于物体，也可视为均匀的。

三、各向同性假设

各向同性假设即假定沿任何方向，物体的物理性质都相同，这种物体称为各向同性体。金属材料中的微小晶体是各向异性的，但由于晶体很小且排列杂乱无章，从统计平均意义上讲，可视为各向同性体。木材、竹材、复合材料是各向异性体。

四、完全弹性假设

完全弹性假设即假定物体在引起变形的外力去除后，能完全恢复原状。这样，物体的变形与外力成正比，即服从虎克定律。所以该假定又称线弹性假定。

五、小变形假设

小变形假设即假定位移远小于物体原尺寸，应变和转角远小于 1。在研究物体平衡时，可不考虑变形引起的物体尺寸和位置变化；在建立几何方程和物理方程时，可不计形变的二次或二次以上幂项，使得基本方程皆为线性方程，可应用叠加原理。

另外还有无初应力假设，即假定物体受力前处于自然状态，内

部无应力。因此应力解仅为荷载或温度变化而产生的。若有初应力时,物体内实际应力等于初应力加上外力(或温度变化等)作用下用弹性力学方法求得的应力。

凡符合前四个假定的物体,称为理想弹性体。该书限于讨论理想弹性体问题。

在研究方法上,与材料力学的截面法不同,弹性力学采用分离体法,即在物体内部取无数个平行六面体,而在物体表面取无数个四面体。由分离体的平衡,写出弹性体的平衡微分方程,但数量少于未知应力总数,所以弹性力学问题是超静定的。因此解决问题必须考虑变形条件,即根据连续性假设,物体发生变形后仍为连续体,从而导出一组应变协调方程,再由虎克定律表示应力与应变关系。另外尚须知道边界条件和初始条件,才可求得问题的唯一解。实际上,弹性力学问题就是偏微分方程的边值问题。

§1-3 弹性力学的基本概念

外力、应力、形变和位移是弹性力学中最基本的概念,虽然材料力学已作过讨论,在此有必要再加说明。

一、外力

弹性力学中作用于物体上的外力,分为体力和面力,这与材料力学的称谓有所不同。所谓体力是指分布在物体体积内的力,一般用单位体积的力表示,如重力、磁力、惯性力,其单位为牛顿/米^3 (N/m^3)。体力分量是体力在坐标轴方向的投影,通常在直角坐标系下由 X、Y、Z 表示;极坐标系下由 K_r、K_θ 表示。而面力是分布于物体表面上的力,一般用单位表面面积上的力表示,如风力、液压和接触力等,其单位为牛顿/米^2(N/m^2)或帕(Pa),面力分量是面力在坐标轴方向的投影,通常在直角坐标系下由 $\overline{X}$、$\overline{Y}$、$\overline{Z}$ 表示;极坐标系下由$\overline{K_r}$、$\overline{K_\theta}$表示。后面的讨论均认为外力是已知的。

二、应力与应力分量

物体受力后内部将产生内力。物体任何部位的内力特征用应力来描述。为了说明应力的概念，现考察受平衡力系的任意形状的物体(图 1-1)。物体受外力作用时，其内部相邻两部分之间就产生了相互作用力即内力，假想过 P 点用截面 mn 将物体分为两部分，撤开一部分，该部分对剩下的部分的作用可用分布在截面上的内力来代替。在截面上任一点 P 处取一微小面积 ΔA，其上合内力矢量为 ΔQ。则内力平均集度为 $\Delta Q/\Delta A$。当 ΔA 无限减小趋于点 P 时，物体在该截面上 P 点全应力或应力矢量即 $\Delta Q/\Delta A$ 的极限值：

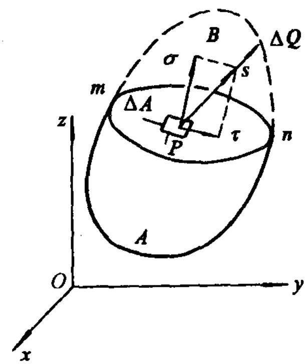

图 1-1

$$S=\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta A}\quad（方向为 \Delta Q 的极限方向）$$

由上分析可知：

① 应力大小反映了截面上某点内力的强度即内力分布集度。

② 过同一点所取的截面方位不同，应力也不相同，即应力与所取截面的方位有关。

③ 应力是矢量。为了便于描述物体变形和材料强度，一般由正应力 σ(沿截面法向)和剪应力 τ(沿截面切向)两个分量来表示。

由于 mn 截面是任取的，实际上过 P 点可取无数个方位不同的截面，各截面上 P 点应力是不同的。为此将物体同一点各截面上的应力状况称为一点的应力状态。分析一点的应力状态，对研究物体的强度是十分重要的。

为了分析一点的应力状态，绕 P 点平行坐标面取一微小六面

体(简称微元体)(图 1-2)。其中外法向与坐标轴正向一致的截面称为正面,反之称为负面。只要知道过一点三个互相垂直微面上的应力矢量,即可确定该点应力状态。令三个正面上应力矢量分别为$\boldsymbol{F}_x$、$\boldsymbol{F}_y$、$\boldsymbol{F}_z$(下标表示所在截面方位)。将每个矢量向坐标轴分解得三个应力分量,分别表示为:

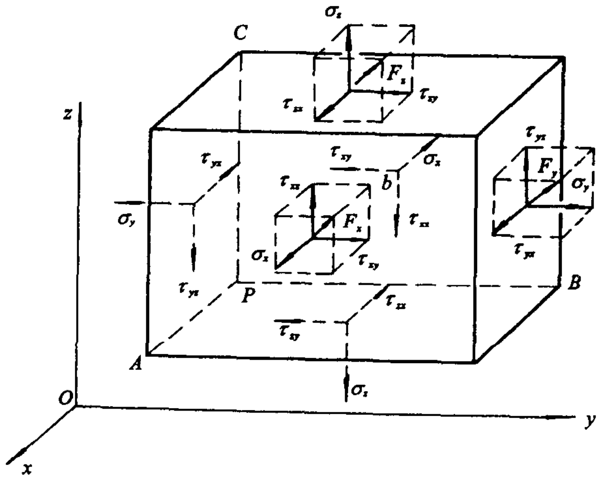

图 1-2

$$\boldsymbol{F}_x=(\sigma_x,\tau_{xy},\tau_{xz})$$

$$\boldsymbol{F}_y=(\tau_{yx},\sigma_y,\tau_{yz})$$

$$\boldsymbol{F}_z=(\tau_{zx},\tau_{zy},\sigma_z)$$

当微元体无限缩小时,3 个截面即趋于过 P 点截面。9 个应力分量即该点的应力分量。这 9 个应力分量作为一个整体,称为应力张量,表示为:

$$\sigma_{ij}=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{bmatrix}$$

由后面证明的剪应力互等定理可知,9 个应力分量只有 6 个是独

立的，即 σ_x、σ_y、σ_z、τ_{xy}、τ_{yz}、τ_{zx}。后面将说明这 6 个应力分量可确定一点的应力状态。应力分量的下标含意与材料力学相同。正应力下标表示其作用面外法向，剪应力第一个下标表示作用面外法向，第二个下标表示其方向。它们的正负规定为：正应力拉为正，压为负；剪应力在正面上与坐标轴向一致为正，反之为负，而在负面上则与坐标轴向相反为正，反之为负。这与材料力学规定有所不同。

三、应变与应变分量

变形即形状的改变。物体形状可用各部分长度和角度来表示。因此物体的变形可由其长度和角度的改变来表示。

为了表述物体内任一点 P 的变形情况，过 P 点沿三轴正向取三条微小线段 PA、PB、PC（图 1-2）。物体变形后，该三条线段长度及它们之间直角必将发生改变。各线段单位长度的伸缩，即相对伸缩，称为正应变；各线段间直角的改变（以弧度计）称为剪应变。正应变用 ε 表示，ε_x 表示 x 方向的线段 PA 的正应变，余类推。正应变以拉伸为正，缩短为负，剪应变用 γ 表示，γ_{xy}表示 x 与 y 两方向的线段（即 PA 与 PB）之间的直角的改变，余类推。剪应变以直角变小为正，变大为负，正负号规定与剪应力相适应。正应变与剪应变皆为无因次量。

可以证明（见后），在物体内任一点如果已知 ε_x、ε_y、ε_z、γ_{xy}、γ_{yz}、γ_{zx}这 6 个应变，经该点的任一线段的正应变和任两线段之间直角的剪应变都可求得，即该点的应变状态可以确定，所以这 6 个应变称为该点的应变分量。

四、位移与位移分量

位移即位置的移动，其中只产生了刚体移动和转动，物体各点相对位置不变，这种位移为刚体位移；各点之间相对位置发生变化使物体大小形状发生改变，这部分位移称为变形位移。弹性力学中主要讨论变形位移。

物体内任一点的位移，用其在 x、y、z 三轴上的投影 u、v、w 来表示，以沿坐标轴正向为正，沿坐标轴负向为负。u、v、w 即该点的位移分量。

应当指出，体力、面力、应力、应变、位移等各分量，一般都随点的位置不同而不同，因而是坐标的函数。

习 题

1-1 举例说明均匀的各向异性体和非均匀的各向同性体以及非均匀的各向异性体各是什么。

1-2 一般的混凝土构件、钢筋混凝土构件、岩质地基、土质地基等能否作为理想弹性体？

第二章　应力分析

§2-1　一点的应力状态

上一章曾指出，物体受外力作用后，过内部任一点不同截面上的应力一般是不同的。为了研究强度问题，必须知道任一点各截面上的应力情况，即一点的应力状态。

假设已知物体内任一点 M 的六个独立的应力分量 σ_x、σ_y、σ_z、τ_{xy}、τ_{yz}、τ_{zx}，研究过该点任意斜截面上的应力情况。为此，绕 M 点截取平行于坐标面的微六面体，然后，取任意斜平面 ABC，从其上截取一四面体 $MABC$，如图 2-1 所示。当面积 ABC 无限小而趋于

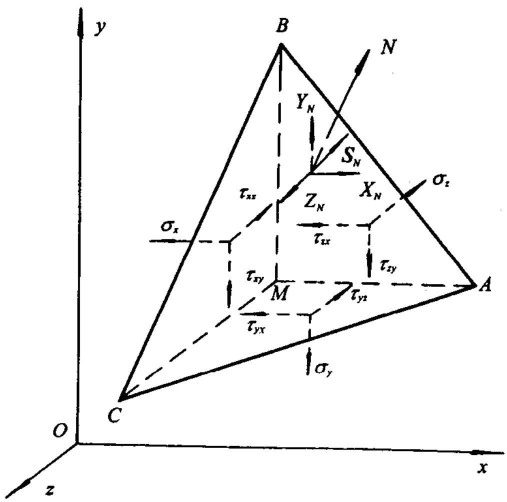

图 2-1

M 点时，平面 ABC 上的应力就是过 M 点任意斜截面上的应力。