普通高等教育“十五”国家级规划教材

高等数学基础

多元函数微积分与线性常微分方程

马知恩　王绵森　主编

高等教育出版社

普通高等教育“十五”国家级规划教材

高等数学基础

多元函数微积分与线性常微分方程

马知恩　王绵森　主编

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

多元函数微积分与线性常微分方程/马知恩,王绵森主编.—北京:高等教育出版社,2005.2

(高等数学基础/马知恩主编)

ISBN 7-04-016388-8

Ⅰ.多... Ⅱ.①马...②王... Ⅲ.①微积分-高等学校-教材 ②非线性-常微分方程-高等学校-教材 Ⅳ.O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第143343号

策划编辑 王 强 **责任编辑** 姚 晖 **封面设计** 刘晓翔 **责任绘图** 朱 静
版式设计 张 岚 **责任校对** 杨雪莲 **责任印制** 孔 源

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京四季青印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2005年2月第1版
印　　张	23	**印　　次**	2005年2月第1次印刷
字　　数	420 000	**定　　价**	24.10元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　16388-00

内容提要

《高等数学基础》是普通高等教育"十五"国家级规划教材,全书共分三册,本书是其中的一册,也是作者编写的《工科数学分析基础》下册的简化本。内容包括多元函数微分学及其应用、多元函数积分学及其应用、线性常微分方程三章及附录Ⅰ矩阵与行列式初步、附录Ⅱ向量代数与空间解析几何。

本书保持了《工科数学分析基础》一书的主要特色,适当降低了教学要求,删去了一些要求较高的理论内容,努力揭示数学概念的本质,注重数学思想方法的讲授和应用能力的培养,加强基本训练,以适应多数高等理工科院校的教学需要。本书体系结构简明严谨,内容丰富,要求适中,应用实例范围广泛,叙述清晰,深入浅出,富于启发性。每节习题分为A、B两类,每章后还配有习题和综合练习题,书末有部分习题答案或提示。

本书可作为高等理工科院校非数学类专业本科生的教材,也可供其他专业的师生选用和社会读者阅读。

前　言

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材。全书共分三册，即一元函数微积分与无穷级数、线性代数与解析几何、多元函数微积分与线性常微分方程，其中的微积分部分是作者编写的《工科数学分析基础》一书的简化本。《工科数学分析基础》是由高等教育出版社出版的面向21世纪教材，也是“九五”国家级重点教材，并于2001年获中国高校科学技术一等奖，2002年获国家优秀教材一等奖，适用于高等理工科院校对数学要求较高的非数学类专业的本科生。本书则兼顾科技发展的需要和当前我国高等院校的实际情况，对《工科数学分析基础》内容的深、广度作较大幅度的调整，使其适用于多数院校的教学需求。本书在编写的指导思想和内容体系方面继承了《工科数学分析基础》的一些主要特色：

1. 适当拓宽必要的数学基础。与《工科数学分析基础》相比，本书虽然删去了实数完备性、确界定理、一致连续、含参变量积分、微分方程稳定性与无限维分析等内容，削减了极限理论以及某些定理的证明，并对级数的一致收敛、二元函数的Taylor公式、Frenet标架、挠率、重积分的一般换元法、线性微分方程组等目录标题前冠以“*”号，其内容用楷体字排印，不作为教学基本要求。但是，本书仍保留了在集合与映射的基础上讲解函数、极限的基本理论、向量值函数的微分、通过向量值函数的微分来研究曲线与曲面的性质等内容。对于没有给出分析证明的重要定理，也努力通过几何直观或其他方法分析并揭示定理的正确性或定理证明的基本思路，以便使学生掌握必要的数学知识的同时，在数学的抽象性、逻辑性和严谨性方面受到必要的基本训练，培养他们的理性思维方法，提高数学素养和能力。

2. 注意分析、代数与几何相关内容的有机结合和相互渗透。本书从多元函数微分学开始，就注意逐步加强向量和矩阵的运用，利用向量、矩阵和线性代数中的知识来表述微积分中的有关内容，并采用从二维、三维逐步过渡到 n 维的讲解方法。例如，利用Jacobi矩阵来表示向量值函数的导数和微分；用向量值函数的微分来研究曲线和曲面的性质；将第二型线、面积分与向量场的研究结合起来。另一方面，在线性代数中，又列举了一些分析方面的例题，说明线性代数的某些概念。例如在讲解内积时，介绍了用两个函数乘积的定积分定义函数空间中内积的例子，在矩阵特征值理论中讲解了它在求解线性微分方程组方面的应用等。这样做，既有利于培养学生综合运用数学知识的能力，又能更好地满足现代科技的发展对数学的需求。

3. 强化学生数学应用能力的培养。在讲解数学内容的同时，着力于揭示数学概念的本质和在实际问题中有重要应用的数学思想方法是本书的另一个鲜明特色。例如，编者反复强调了微积分基本思想方法、局部线性化方法、逼近的思想、最优化方法、微元法以及变量代换的思想和方法等。为了培养学生应用数学解决实际问题的意识、兴趣和能力，书中精选了一批工程、生态、人口、经济、医学，甚至在日常生活方面饶有趣味的应用性例题和习题，并配备了一些综合练习题，供读者选做。

4. 削减次要内容，淡化运算技巧的训练。与某些传统教材相比，本书精减了一些次要内容。例如，以链式法则为主线讲解一元函数求导法；以换元法和分部积分法两种基本方法为主线讲解积分法，将一些简单的有理函数、三角有理函数和无理函数的积分作为两种基本积分法的应用例题；将某些近似计算方法移至《数学实验》等后继课中；每节配备的习题均分为 A、B 两类，微积分部分每章后还配备了一些综合性习题。A 类为基本要求题，致力于基本概念、基本理论、基本运算和应用的训练；B 类题以及每章后配备的习题，可供学有余力的同学选做。

5. 适当采用了一些近代数学的思想、术语和符号，为学生学习近代数学开设一些“窗口”和“接口”。与《工科数学分析基础》相比，本书删去了不少要求较高的内容，但仍保留了某些近代数学的思想和观点。例如，将多元函数分为数量值函数与向量值函数，定义为从 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^m$ 的映射；将定积分、重积分、第一型线(面)积分统一为几何形体上的数量值函数的积分；以参数方程为主线讲解曲线与曲面的有关内容等。但在讲解这些内容时，我们更加注意可接受性，采用由直观到抽象、由特殊到一般的方法循序渐进，逐步深入。

本书中的《线性代数与解析几何》分册介绍了线性代数和空间解析几何的基本内容，共分八章。该分册采用模块式结构，可根据不同专业大类的教学要求和学时对内容进行取舍。讲完基本内容(除打“*”的部分)约需 42～48 学时，讲完全部内容约需 56～60 学时。该分册力求将线性代数与解析几何相互结合，相互渗透，并为学习多元函数微积分和线性常微分方程提供必要的准备，因此，它既可与微积分课程配套使用，又可单独作为线性代数课程的教材。

由于学习本书的《多元函数微积分和线性常微分方程》分册需要少量线性代数与空间解析几何的知识，因此使用本书可采用两种不同的方法。一种是将线性代数与空间解析几何单独设课，与一元函数微积分双轨并进，在学习《多元函数微积分与线性常微分方程》前完成；另一种是用单轨串连式，即先讲一元函数微积分，再讲线性代数与解析几何，最后讲多元函数微积分。本书在《多元函数微积分与线性常微分方程》分册后编写了一个附录，简要介绍了使用该分册除线性微分方组外所必须具备的线性代数和空间解析几何的基本知识。这样，即便

对于某些将线性代数在二年级单独设课，而将空间解析几何放在高等数学课程中讲解的院校（如果不讲线性微分方程组一节），也可用本书作为教材。

另外，为了便于在高等数学课程中进行双语教学，编者与美国著名数学家 Fred Brauer 合作，编写了书名为《Fundamentals of Advanced Mathematics》的英文教材，这本教材将由高等教育出版社正式出版。该书在体系和内容方面与本书基本相同，是两本相互配套的教材。因此，一方面，本书可作为使用该英文教材进行双语教学师生配套的参考书；另一方面，使用本书的读者也可将该英文教材作为一本英文参考书。

参加本书编写的有马知恩、王绵森、魏战线、武忠祥、常争鸣和徐文雄。全书分三册，其中《一元函数微积分与无穷级数》由王绵森、马知恩主编，《多元函数微积分与线性常微分方程》由马知恩、王绵森主编，《线性代数与解析几何》由魏战线编。本书已在西安交通大学电气工程学院等多个数学大班试用过两届，任课教师提出的许多宝贵意见对书稿的修改完善起了重要作用。借此机会对参加试用的所有教师表示衷心的感谢。同时，感谢高等教育出版社的编辑们，他们为本书的出版和质量的提高起了十分重要的作用。

本书得到了高等教育出版社和西安交通大学教务处的资助，在此，我们向有关方面一并表示感谢！

本书书稿虽几经试用和修改，但由于编者水平所限，加之时间较紧，不妥之处在所难免。恳请专家、同行以及广大读者不吝指正，使本书在今后的教学实践中日臻完善！

编　者

二〇〇四年四月于西安交通大学

目　录

第五章

多元函数微分学及其应用

在上册中,我们讨论了一元函数微积分,研究的对象是仅依赖于一个自变量的一元函数.然而,在实际问题中常会遇到依赖于两个或两个以上自变量的所谓多元函数,因此,还需要讨论多元函数的微积分.多元函数微积分的基本概念、理论和方法是一元函数微积分中相应概念、理论和方法的推广与发展,它们既有许多相似之处,又有很多本质上的不同.读者在学习多元函数微积分的时候,要善于将它与一元函数微积分进行比较,既要注意它们的共同点和相互联系,更要注意它们之间的区别,研究所出现的新情况和新问题.这样,才能深刻理解,融会贯通.

本章讨论多元函数微分学.首先将极限、连续的概念推广到多元函数,然后重点讲解多元函数(包括多元数量值函数和多元向量值函数)的导数、微分与微分法,最后讨论多元函数微分学在多元函数极值问题和几何中的一些应用.

第一节　多元函数的极限与连续

同一元函数微积分一样,多元函数的极限与连续概念也是学习多元函数微积分的基础.因此需要首先将极限和连续的概念推广到多元函数.由于 n 元函数的定义域是 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中的子集,所以本节先来介绍 $\mathbf{R}^n$ 中点集的一些初步知识.

1.1　$\mathbf{R}^n$ 空间中点集的初步知识

读者在线性代数中已学习过 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 的有关知识,现将其中主要之点作如下复习.

我们称一个 $n(n\geqslant 2)$元有序实数组

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\quad(x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n)$$

为一个 **n 维实向量**,记 n 维实向量全体所构成的集合为

$$\mathbf{R}^n=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\}.$$

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$,定义两个向量的加法为

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n),\tag{1.1}$$

数 $\alpha \in \mathbf{R}$ 与向量 $\boldsymbol{x}$ 的乘法定义为

$$\alpha \boldsymbol{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n), \tag{1.2}$$

则 $\mathbf{R}^n$ 按照上述向量的加法及数与向量的乘法构成一个 **n 维实向量空间**(或 **n 维实线性空间**).

在 $\mathbf{R}^n$ 空间中定义两个向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的**内积**为

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \tag{1.3}$$

则 $\mathbf{R}^n$ 按照内积(1.3)构成一个 **n 维 Euclid 空间**.

n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中的向量也称为点,向量 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个分量 x_i 也称为点 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个坐标. $\mathbf{R}^n$ 中的点(向量)常用小写黑体英文字母 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 等表示,有时也用大写英文字母 P、Q 等来表示 $\mathbf{R}^n$ 中的点.

特别地,$\mathbf{R}^2$ 中的点(向量)常用(x, y)来表示,所以 $\mathbf{R}^2$ 可看作是一个平面上全体点所组成的集合;$\mathbf{R}^3$ 中的点(向量)常用(x, y, z)来表示,所以可把 $\mathbf{R}^3$ 与几何空间看成是等同的.

$\mathbf{R}^n$ 中向量 $\boldsymbol{x}$ 的**长度**(或**范数**)定义为

$$\| \boldsymbol{x} \| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}, \tag{1.4}$$

两点 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 之间的**距离**定义为

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}. \tag{1.5}$$

$\mathbf{R}^n$ 中上述概念显然都是三维空间 $\mathbf{R}^3$ 中相应概念的直接推广.

现在,可以利用 $\mathbf{R}^n$ 的线性运算和距离的概念,来介绍 $\mathbf{R}^n$ 中点集的一些基本概念,包括邻域、开集、闭集和区域等. 虽然这些概念都是在 $\mathbf{R}^n$ 空间中定义的,但读者容易通过平面 $\mathbf{R}^2$ 中的直观图形来理解它们.

1. 邻域 设点 $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$,常数 $\delta > 0$,则称 $\mathbf{R}^n$ 中与点 $\boldsymbol{a}$ 的距离小于 δ 的点 $\boldsymbol{x}$ 的全体所构成的点集为点 $\boldsymbol{a}$ 的 **δ 邻域**,记为 $U(\boldsymbol{a}, \delta)$,即

$$U(\boldsymbol{a}, \delta) = \{ \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \| < \delta \},$$

而将 $U(\boldsymbol{a}, \delta)$中去掉点 $\boldsymbol{a}$ 的部分称为 $\boldsymbol{a}$ 的**去心 δ 邻域**,记为 $\mathring{U}(\boldsymbol{a}, \delta)$,即

$$\mathring{U}(\boldsymbol{a}, \delta) = U(\boldsymbol{a}, \delta) \setminus \{ \boldsymbol{a} \},$$

在不需要强调邻域的半径时,通常就用 $U(\boldsymbol{a})$与 $\mathring{U}(\boldsymbol{a})$分别表示点 $\boldsymbol{a}$ 的某个邻域与某个去心邻域.

在直线 $\mathbf{R}$ 上,$U(a, \delta)$就是开区间$(a - \delta, a + \delta)$;在平面 $\mathbf{R}^2$ 上,$U(\boldsymbol{a}, \delta)$就是以 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$为中心、$\delta$ 为半径的圆周$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = \delta^2$ 内的所有点构成的集合(称为开圆盘);在空间 $\mathbf{R}^3$ 中,$U(\boldsymbol{a}, \delta)$就是以 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$

为中心、δ 为半径的球面 $(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+(x_3-a_3)^2=\delta^2$ 内的所有点构成的集合，也就是通常所说的开球.

2. 内点、外点与边界点 设 A 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个点集，点 $\boldsymbol{a}\in A$，如果存在 $\boldsymbol{a}$ 的一个邻域 $U(\boldsymbol{a},\delta)$，使得 $U(\boldsymbol{a},\delta)\subseteq A$，则称 $\boldsymbol{a}$ 为点集 A 的一个**内点**，A 的内点全体所组成的集合称为 **A 的内部**，记为 A° 或 $\operatorname{int} A$；设点 $a_1\in\mathbf{R}^n$，如果存在点 $\boldsymbol{a}_1$ 的一个邻域 $U(\boldsymbol{a}_1,\delta_1)$，使得 $U(\boldsymbol{a}_1,\delta_1)$ 中的点都不是 A 的点，即 $U(\boldsymbol{a}_1,\delta_1)\subseteq A^c$，则称 $\boldsymbol{a}_1$ 为 A 的一个**外点**，A 的外点全体所组成的集合称为 **A 的外部**，记为 $\operatorname{ext} A$；设点 $a_2\in\mathbf{R}^n$（$\boldsymbol{a}_2$ 可能属于 A，也可能不属于 A），如果对任何 $\delta>0$，$U(\boldsymbol{a}_2,\delta)$ 中既含有 A 中的点，也含有 A 的余集 A^c 中的点，则称 $\boldsymbol{a}_2$ 为点集 A 的一个**边界点**，A 的边界点全体所组成的集合称为 **A 的边界**，记为 ∂A（图 1.1 给出了 $\mathbf{R}^2$ 中点集 A 的内点、外点和边界点的示意图）.

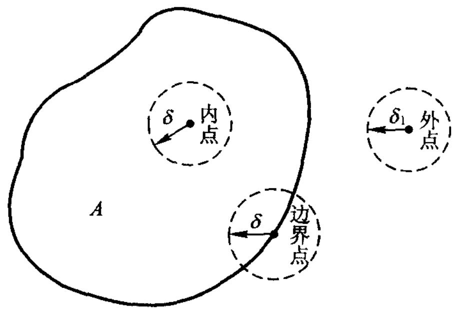


图 1.1

例如，设 $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2=0, 1<x^2+y^2\leqslant 4\}$，则由上述定义易知 A 的内部、外部和边界分别为：$A^\circ=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 1<x^2+y^2<4\}$，$\operatorname{ext}A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 0<x^2+y^2<1, x^2+y^2>4\}$，$\partial A=\{(0,0)\}\cup\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2=1, x^2+y^2=4\}$.

3. 聚点 设 A 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个点集，$\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$（点 $\boldsymbol{a}$ 可能属于 A，也可能不属于 A），如果对任何 $\delta>0$，点 $\boldsymbol{a}$ 的去心邻域 $\mathring{U}(\boldsymbol{a},\delta)$ 中总含有 A 中的点，则称点 $\boldsymbol{a}$ 为点集 A 的一个**聚点**.

例如，满足条件 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$ 的任一点 (x,y) 都是集合 $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2=0, 1<x^2+y^2\leqslant 4\}$ 的聚点，但 $(0,0)$ 点不是 A 的聚点.

4. 开集与闭集 设 $A\subseteq\mathbf{R}^n$，如果 A 的点都是 A 的内点，即 $A^\circ=A$，则称 A 为 $\mathbf{R}^n$ 的**开集**；如果 A 的余集 A^c 为开集，则称 A 为**闭集**①.

例如，$\mathbf{R}^2$ 中的点集 $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 1<x^2+y^2<4\}$ 是开集；$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 是闭集；而 $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 0\leqslant y<x^2\}$ 既不是开集也不是闭集.

5. 区域 设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中两个不同点，称点集

$$\{t\boldsymbol{a}+(1-t)\boldsymbol{b} \mid t\in\mathbf{R}, 0\leqslant t\leqslant 1\}$$

为 $\mathbf{R}^n$ 中联结点 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**线段**. 设 $A\subseteq\mathbf{R}^n$，如果 A 是开集，而且 A 中任意两点都

① 通常约定空集 $\varnothing$ 及全空间 $\mathbf{R}^n$ 既是开集也是闭集.

可以用完全含在 A 中的由有限条线段所组成的折线联结起来(具有此性质的点集 A 称为连通集),则称 A 是**开区域**或**区域**,换句话说,区域是指**连通的开集**.区域连同它的边界一起,称为**闭区域**①.

6. 有界集与无界集 设 $A\subseteq\mathbf{R}^n$,如果存在一个常数 $M>0$,使得对于所有的 $\boldsymbol{x}\in A$,都有 $\|\boldsymbol{x}\|<M$,则称 A 是**有界集**,否则称为**无界集**.显然,有界集的几何意义是它能被包含在一个以原点 O 为中心、M 为半径的开球 $U(O,M)$中.

1.2 多元函数的概念

在实际问题中常常要研究多个变量之间的关系.例如,理想气体状态方程式 $P=R\dfrac{T}{V}$(R 为常数)表示气体的压强 P 对体积 V 及绝对温度 T 的依赖关系,它可以看成两个自变量 V 和 T 与一个因变量 P 之间的关系.这里的自变量有两个,我们称 P 是关于 V、T 的二元函数.

定义 1.1 设 $A\subseteq\mathbf{R}^n$ 是一个点集,$f:A\to\mathbf{R}$ 是一个映射,则称 f 是定义在 A 上的一个 n **元函数**,这个函数也可记作

$$w=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad \text{或}\quad w=f(\boldsymbol{x}),$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in A$ 称为**自变量**,w 称为**因变量**,$D(f)=A$ 称为 f 的**定义域**,$R(f)=\{w\mid w=f(\boldsymbol{x}),x\in D(f)\}$称为 f 的**值域**.

习惯上,二元函数常记成 $z=f(x,y),(x,y)\in A\subseteq\mathbf{R}^2$.三元函数常记成

$$u=f(x,y,z),(x,y,z)\in A\subseteq\mathbf{R}^3.$$

与一元函数类似,所谓多元函数的定义域,也是指使得函数有意义的自变量的全体所组成的点集,它必须使得数学算式有意义,对于实际问题,还要求使得实际问题有意义.但与一元函数不同,n 元函数的定义域是 $\mathbf{R}^n$ 中的点集.

例 1.1 求下列函数的定义域 D:

(1) $z=\ln(1-x^2-2y^2)$;

(2) $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$;

(3) $u=\dfrac{1}{\sqrt{z-x^2-y^2}}$.

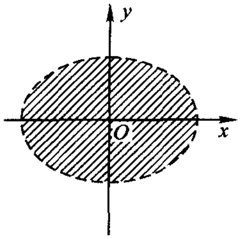
解 (1) $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x^2+2y^2<1\}$,它是 xOy 平面上以椭圆 $x^2+2y^2=1$ 为边界的有界区域(图 1.2(a)中阴影部分,不含椭圆).

(2) $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid |x|\leqslant1,|y|\geqslant1\}$,它表示 xOy 平面上的两个无界闭区域(图 1.2(b)中阴影部分).

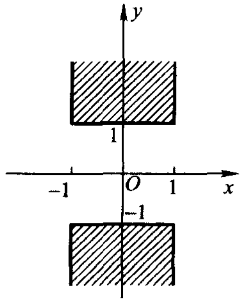
(3) $D=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\mid z>x^2+y^2\}$,它表示三维空间 $\mathbf{R}^3$ 中以抛物面 $z=$

① 严格地说,所谓区域是指开区域,但有时区域也用作开区域和闭区域的统称.

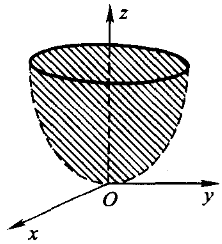
x^2+y^2 为边界的无界区域(图 1.2(c)中阴影部分,不含抛物面). ▌



(a)



(b)



(c)

图 1.2

二元函数 $z=f(x,y)((x,y)\in A\subseteq \mathbf{R}^2)$的图像

$$\mathrm{Gr}f=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in A,z=f(x,y)\}$$

是 $\mathbf{R}^3$ 中的点集,通常是 $\mathbf{R}^3$ 中的曲面,而这个曲面在 xOy 坐标面的投影区域就是函数 f 的定义域 A. 一般地,n 元函数 $w=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)((x_1,x_2,\cdots,x_n)\in A\subseteq\mathbf{R}^n)$的图像

$$\mathrm{Gr}f=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,w)\mid(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in A,w=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\}$$

是 $\mathbf{R}^{n+1}$中的点集. 例如,二元函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}((x,y)\in\mathbf{R}^2)$的图像是 $\mathbf{R}^3$ 中的圆锥面($z\geqslant 0$ 的部分). 而 n 元线性函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\rangle,$$
$$(\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n)$$

常称为 $\mathbf{R}^{n+1}$中的超平面,其中 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbf{R}^n$ 是常向量.

1.3 多元函数的极限与连续性

为了建立多元函数微积分的理论,必须将一元函数的极限与连续性概念推广到多元函数. 这两个概念从一元推广到二元会有本质上的变化,而从二元推广到 $n(n>2)$元没有任何实质性的困难,因此,下面主要讨论二元函数.

设 A 是平面 $\mathbf{R}^2$ 上的一个点集,(x_0,y_0)是 $\mathbf{R}^2$ 中的一点. 我们仿照一元函数极限的定义来定义二元函数 $f:A\to\mathbf{R}$ 当$(x,y)\to(x_0,y_0)$时的极限. 在讨论一元函数 f 当 $x\to x_0$ 时的极限定义时,要求函数 f 定义在 x_0 的某去心邻域上. 这是由于:一方面极限是用来研究当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$的变化趋势的,它与 f 在 x_0 处是否有定义,以及有定义时 f 在 x_0 处函数值$f(x_0)$的大小无关,也就是说,与 x_0 是否在 f 的定义域中无关;另一方面,为了反映 $f(x)$变化的趋势,还应要求

在 x_0 的任何去心邻域内都含有 f 的定义域中的点 x. 要求 f 定义在 x_0 的某个去心邻域中,实质上就是要求 x_0 是 f 的定义域的聚点. 基于同样的理由,在定义二元函数 $f: A\to\mathbf{R}$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限时,也应当要求 (x_0,y_0) 是 f 的定义域 A 的一个聚点①. 于是,便得到如下定义.

定义 1.2(二重极限) 设点集 $A\subseteq\mathbf{R}^2$, $f: A\to\mathbf{R}$ 是一个二元函数, (x_0,y_0) 是 A 的一个聚点, $a\in\mathbf{R}$ 是常数. 若

$$\forall\,\varepsilon>0,\exists\,\delta>0,\text{使得 }\forall\,(x,y)\in\mathring{U}((x_0,y_0),\delta)\cap A,$$
$$\text{恒有 }|f(x,y)-a|<\varepsilon, \tag{1.6}$$

则称当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时 $f(x,y)$ **有极限**,且称 a 为当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时 $f(x,y)$ 的**极限**,记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=a,\quad \text{或}\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=a,$$

这个极限也称为**二重极限**. 如果找不到使得(1.6)式成立的常数 a,则称当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时 $f(x,y)$ **没有极限**.

在上面的定义中,由于 f 的定义域是一个集合 A,因此,在(1.6)式中要求 $(x,y)\in\mathring{U}((x_0,y_0),\delta)\cap A$.

二重极限的定义在形式上与一元函数极限的定义并无多大差异,因此,一元函数极限的有关性质(如唯一性、局部有界性、局部保号性、夹逼准则以及 Heine 定理等)和运算法则都可以推广到二重极限中来,这里不再重述.

但是,在二重极限中,由于自变量的增多,产生了一些与一元函数极限的本质差异. 在一元函数极限中,点 x 只能在数轴上从 x_0 左右趋近于 x_0;在二重极限中,点 (x,y) 在平面集合 A 中趋近于 (x_0,y_0) 的方式可能是多种多样的,方向可以任意多,路径也可以千姿百态. 所谓 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=a$ 是指当点 (x,y) 在集合 A 中从 (x_0,y_0) 的四面八方以可能有的任何方式和任何路径趋于 (x_0,y_0) 时, $f(x,y)$ 都趋于同一个常数 a. 因此,如果 (x,y) 以两种不同的方式或路径趋于 (x_0,y_0) 时 $f(x,y)$ 趋于不同的数,或者 (x,y) 按某一方式或路径趋于 (x_0,y_0) 时 $f(x,y)$ 不趋于一个确定的数,那么就可以断定当 (x,y) 趋于 (x_0,y_0) 时 $f(x,y)$ 的极限不存在.

例 1.2 用定义证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$.

---

① 以下在定义 f 的极限时也只要求点 (x_0,y_0) 是 f 的定义域 A 的一个聚点,因此 A 可以是 $\mathbf{R}^2$ 的一个点集(只要 (x_0,y_0) 是 A 的聚点). 这比一元函数极限中对函数的定义域的要求要宽得多.

证 因为函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$的定义域 $A=\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$,并且

$$|f(x,y)-0|=\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\leqslant|y|\leqslant\sqrt{x^2+y^2}.$$

所以,对任给的 $\varepsilon>0$,只要取 $\delta=\varepsilon$,则当 $0<\|(x,y)-(0,0)\|=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时(即 $\forall(x,y)\in\mathring{U}((0,0),\delta)\cap A$),就有

$$|f(x,y)-0|<\varepsilon,$$

根据定义 1.2 知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$. ▌

例 1.3 设 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$,讨论二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$是否存在.

解 令点(x,y)沿着直线 $y=kx$ 趋向于$(0,0)$,则

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=kx}}f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{kx^2}{(1+k^2)x^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

上式说明,若 k 不同,即当(x,y)沿着不同的直线 $y=kx$ 趋向于$(0,0)$时,$f(x,y)$趋于不同的常数,因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$不存在. ▌

明白了二元函数极限的概念,就不难讨论二元函数的连续性问题.与一元函数的连续性类似,可以定义二元函数连续性如下:

定义 1.3(二元连续函数) 设点集 $A\subseteq\mathbf{R}^2$,$f:A\to\mathbf{R}$ 是一个二元函数,(x_0,y_0)是 A 的聚点,并且$(x_0,y_0)\in A$,若当$(x,y)\in A$ 时有

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0),\tag{1.7}$$

则称函数 f **在点**(x_0,y_0)**处连续**,若 f 在其定义域A 中的每一点处连续,则称 f 是A 上的**连续函数**.如果点(x_0,y_0)是 A 的聚点,但 f 在(x_0,y_0)处不连续,则称(x_0,y_0)为 f 的**间断点**.

函数的连续性也可用 $\varepsilon-\delta$ 语言来描述.若 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,使得 $\forall(x,y)\in U((x_0,y_0),\delta)\cap A$,恒有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon,\tag{1.8}$$

则称 f 在点(x_0,y_0)处连续.

像一元函数一样,二元连续函数的和、差、积、商(除去分母为零的点)与复合仍为连续函数.

例如:函数 $z=\sin\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$可看成是由 $z=\sin u$ 与 $u=\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$复合而成的,而$z=\sin u$是连续函数,$u=\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$除圆周 $x^2+y^2=1$ 上的点之外在平面 $\mathbf{R}^2$ 上处处连续,因而复合函数 $z=\sin\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$在它的定义域 $A=\{(x,$