信息与计算科学丛书——34

边值问题的 Galerkin有限元法

李荣华 著

8

科学出版社
www.sciencep.com

信息与计算科学丛书 34

边值问题的Galerkin有限元法

李荣华 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书用统一观点介绍经典的Galerkin法、标准有限元法、非标准有限元法(非协调元、杂交元和混合元)、边界有限元法以及有限体积法的基本理论与方法.

本书可作为计算数学专业研究生学位课和本科生选修课教材，也可作为从事Galerkin有限元法理论和应用研究的科研人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

边值问题的Galerkin有限元法/李荣华 著. —北京：科学出版社，2005
(信息与计算科学丛书;34)
ISBN 7-03-015570-X

I.边… II.李… III.边值问题-有限元法 IV.O175.8

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第050832号

责任编辑：林 鹏 范庆奎／责任校对：钟 洋
责任印制：钱玉芬／封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
源海印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2005年8月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2005年8月第一次印刷 印张：15 1/4
印数：1—2 500 字数：287 000

定价：35.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

《信息与计算科学丛书》序

20 世纪 70 年代末，由已故著名数学家冯康先生任主编、科学出版社出版了一套《计算方法丛书》，至今已逾 30 多册. 这套丛书以介绍计算数学的前沿方向和科研成果为主旨，学术水平高、社会影响大，对计算数学的发展、学术交流及人才培养起到了重要的作用.

1998 年教育部进行学科调整，将计算数学及其应用软件、信息科学、运筹控制等专业合并，定名为“信息与计算科学专业”. 为适应新形势下学科发展的需要，科学出版社将《计算方法丛书》更名为《信息与计算科学丛书》，组建了新的编委会，并于 2004 年 9 月在北京召开了第一次会议，讨论并确定了丛书的宗旨、定位及方向等问题.

新的《信息与计算科学丛书》的宗旨是面向高等学校信息与计算科学专业的高年级学生、研究生以及从事这一行业的科技工作者，针对当前的学科前沿、介绍国内外优秀的科研成果. 强调科学性、系统性及学科交叉性，体现新的研究方向. 内容力求深入浅出，简明扼要.

原《计算方法丛书》的编委和编辑人员以及多位数学家曾为丛书的出版做了大量工作，在学术界赢得了很好的声誉，在此表示衷心的感谢. 我们诚挚地希望大家一如既往地关心和支持新丛书的出版，以期为信息与计算科学在新世纪的发展起到积极的推动作用.

石钟慈

2005 年 7 月

前言

有限元法是求解数学物理问题的一类重要数值方法. 迄今有关有限元法的文献 (包括论文和专用软件) 浩如烟海, 出版的书籍 (包括教材、专著) 品种繁多, 但是从 Galerkin 法 (或 Ritz-Galerkin 法) 的一般观点出发阐述有限元法的著作并不多见. 有限元法源自 Galerkin 法, 它是 Galerkin 法的特款. Galerkin 法于 1915 年提出后, 在力学、物理及工程计算中扮演了重要的角色, 其理论在 20 世纪 40 年代末已由以 S. G. Mikhlin 为代表的前苏联数学家建立. 有限元法最早于 1943 年由 R. Courant 提出, 主要思想是用分片线性函数构造 Galerkin 投影空间. 其后经过众多工程师、力学家和数学家的努力 (其中包括中国数学家冯康), 到 20 世纪 60 年代至 70 年代初, 有限元法及其理论已达到完善的地步. 有限元法理论由以下两部分组成: Galerkin 法和 Sobolev 空间的插值理论. 已有的有限元法著作多侧重于第二部分而忽略第一部分. 本书的第一个特点是强调 Galerkin 法的经典理论, 用两章篇幅 (第 2、3 章) 系统讨论了抽象变分原理, Ritz-Galerkin 法及其误差估计, 从而在一定程度上包括并发展了 S. G. Mikhlin 如下经典著作的主要内容: Variational Methods in Mathematical Physics(1957 年俄文版). 这样, 不但加强了有限元法的理论基础, 而且也有助于拓广有限元法的应用范围. 本书从抽象的变分原理出发, 还导出若干重要数学物理的变分原理, 特别是用统一观点导出线弹性理论的四个著名变分原理. 第二, 已有著作主要讨论标准有限元法, 而本书则讨论了非标准有限元法 —— 非协调元法 (第 4.4 节)、杂交有限元法 (第 5 章) 和混合有限元法 (第 6 章). 第三, 我们还用一章 (第 7 章) 介绍近年来非常活跃的边界元法. 边界有限元法对某些重要的数学物理问题如外边值问题、奇点问题特别有效. 我们只介绍方法的计算技巧, 不涉及它的理论 (因为要用到拟微分算子理论). 第四, 有限体积法或广义差分法是近年来发展起来的求解偏微分方程, 特别是流体力学方程的重要方法. 我们在第 8 章从广义 Galerkin 法观点出发介绍这一方法的基本结果. 本书以不太长的篇幅 (第 4 章前 3 节) 介绍标准有限元法. 在叙述插值逼近理论时, 我们采用初等的 Peano 核函数法, 这就避免了使用 Sobolev 嵌入定理. 第 1 章 Hilbert 空间初步, 介绍以后用到的 Hilbert 空间知识, 这一章是为那些未学过泛函分析和 Sobolev 空间的读者写的, 除嵌入定理和迹定理没有给出证明外, 其他概念和定理都有详细论述.

本书是在作者 1988 年出版的《解边值问题的迦辽金方法》(上海科技出版社, 列入李荣华主编的《计算数学丛书》) 的基础上编写的, 该书曾在吉林大学作为计算数学专业研究生教材长期使用. 这次出版时, 仍保留原来的章节结构, 但删减了部分内容 (如第 5 章), 还修正了在教学过程中发现的错误, 改写了某些较困难的证明, 使之

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

更便于教学和自学. 第 8 章是在中国科学院石钟慈教授建议下新加的. 在第 7 章, 我们新增了多尺度 Galerkin 法 (7.4 节), 这一节是在中山大学陈仲英教授的协助下写成的. 中国科学院余德浩教授对本章也提出了有益的建议. 谨此向以上三位教授深表谢意. 本书的出版得到了中国科学院科学出版基金的资助, 特此表示感谢.

李荣华

2005 年 2 月于长春

目　录

第 1 章　Hilbert 空间初步

1.1　Hilbert 空间

1.1.1　若干定义

首先回顾一下线性空间的概念.

定义 1.1.1　设 K 是复 (或实) 数域, H 是某些元素的集合. 如果对 H 中任意元素 x,y 定义了一种所谓 "加法" 运算 $x+y$, 以及与 $\alpha \in H$ 的 "乘法" 运算 αx, 使 $x+y$, αx 属于 H, 且满足条件:

(I) H 是加法群, 即

(a) $x+y=y+x$(交换律),

(b) $(x+y)+z=x+(y+z)$(结合律),

(c) H 中存在元素 θ(称为零元素) 使 $\theta+x=x$, $\forall x \in H$,

(d) 对任何 $x \in H$, 存在加法逆元素 $-x \in H$, 使 $x+(-x)=\theta$;

(II) 乘法与加法运算满足:

(e) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$(结合律),

(f) $1x=x$,

(g) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$(分配律),

(h) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$(分配律),

则称 H 是一复 (或实) 线性空间或向量空间.

在线性空间里, 还可定义加法的逆运算 "减法": $x-y=x+(-y)$. 平行于线性代数, 不难建立线性相关、线性无关、子空间、同构、维数等概念.

定义 1.1.2　设 H 为复 (实) 线性空间, 如果对 H 中每一元素 x, 按某一规则对应一非负实数 $\|x\|$, 满足条件:

(i) $\|x\| \geqslant 0$, $\|x\|=0$ 当且仅当 $x=\theta$(零元素);

(ii) $\|\alpha x\|=|\alpha|\cdot\|x\|$, α 是复数;

(iii) $\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$(三角不等式);

则称 H 为线性赋范空间, 称 $\|x\|$ 为 x 的范数或模.

有了范数, 就可以引进收敛、极限点、开集、闭集及基本序列等一系列概念.

如果线性赋范空间 H 中任一基本序列均有极限, 则说 H 是完全空间.

定义 1.1.3　一个线性、赋范、完全空间称为 Banach 空间.

在 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中, 不但可以定义向量的范数 (即长度), 而且可以定义二向量的内积. 对于一般抽象空间, 我们按下列定义引进内积.

定义 1.1.4　设 H 为复 (实) 线性空间, 若对 $\forall x, y \in H$, 恰有一复 (实) 数 (x,y) 和它对应, 满足:

(i) $(x,x) \geqslant 0$, 又 $(x,x)=0$ 当且只当 $x=\theta$;

(ii) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$;

(iii) $(ax,y)=a(x,y)$;

(iv) $(x,y)=\overline{(y,x)}$;

则称 (x,y) 为 x 与 y 的内积, 而称 H 为内积空间.

在内积空间中, 可定义 x 的范数:

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}.$$

显然 $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$, $\|x\| \geqslant 0$ 且 $\|x\|=0$ 当且只当 $x=\theta$. 我们将证明三角不等式:

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|. \tag{1.1.1}$$

为此先建立 Schwarz 不等式:

$$|(x,y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|. \tag{1.1.2}$$

对于任意实参数 λ,

$$(x+\lambda y, x+\lambda y) \geqslant 0,$$

即

$$(x,x)+\lambda[(x,y)+(y,x)]+\lambda^2(y,y) \geqslant 0. \tag{1.1.3}$$

设 $(x,y)=re^{i\theta}$, 其中 $r=|(x,y)|$, $i=\sqrt{-1}$ 是虚单位. 以 $e^{-i\theta}x$ 代替式 (1.1.3) 中之 x, 得

$$\begin{aligned}
&(e^{-i\theta}x, e^{-i\theta}) + 2\lambda\,|(x,y)| + \lambda^2(y,y) \\
=&(x,x)+2\lambda\,|(x,y)|+\lambda^2(y,y) \\
\geqslant&\, 0,
\end{aligned}$$

从而判别式

$$|(x,y)|^2 - \|x\|^2\,\|y\|^2 \leqslant 0.$$

这就是 Schwarz 不等式 (1.1.2).

由 Schwarz 不等式,

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= (x+y, x+y) \\
&= (x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y) \\
&\leqslant \|x\|^2 + 2\,\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\|+\|y\|)^2.
\end{aligned}$$

两边开方便得三角不等式 (1.1.1).

由此可见, 内积空间必为线性赋范空间, 但不一定是完全空间.

定义 1.1.5 一个完全的内积空间称为 Hilbert 空间.

显然 Hilbert 空间是 Banach 空间的特例, 它具有较 Banach 空间更丰富的性质.

例 1.1.1 m 维欧氏空间 $\mathbf{R}^m$ 是 Hilbert 空间的特例 (维数 m 有限).

例 1.1.2 考察复数序列 $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ 使

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2<+\infty$$

成立的集合, 记作 l_2. 对于 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_i,\cdots)$ 和 $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_i,\cdots)$, 定义加法和乘法运算:

$$x+y=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\cdots,\xi_i+\eta_i,\cdots)$$

$$ax=(a\xi_1,a\xi_2,\cdots,a\xi_i,\cdots).$$

x,y 的内积定义为

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\bar{\eta}_i,$$

则 l_2 为完全的内积空间, 即 Hilbert 空间. l_2 空间是欧氏空间最自然的推广.

例 1.1.3 考察有限区间 (a,b) 上复值可测函数 $f(x)$ 使

$$\int_a^b|f(x)|^2\,\mathrm{d}x<\infty$$

成立的函数类, 记作 $L_2(a,b)$. 对 $f,g\in L_2(a,b)$, 显然 $af, f+g$ 均属于 $L_2(a,b)$, 且内积

$$(f,g)=\int_a^b f\bar{g}\mathrm{d}x$$

有意义. 由实变函数论知道, $L_2(a,b)$ 是完全的内积空间, 从而是 Hilbert 空间.

1.1.2 空间的完全化

设 M 是内积空间 H 的子集: $M\subset H$. 我们说 M 在 H 中稠密, 如果对任何 $x\subset H$, 恒有 $x_n\in M$ 使 $x_n\to x$. 这时也称 M 为 H 的稠密子集. 若更设 M 为 H 的线性子空间, 则称 M 为 H 的稠密线性子集. 我们证明任何一个不完全的内积空间, 总可将它完全化, 使之成为一个 Hilbert 空间. 详言之, 有

定理 1.1.1 任何内积空间 H 均可由添加新元素而做成一个 Hilbert 空间 $\overline{H}$, 且使 H 为 $\overline{H}$ 的稠密线性子集.

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

证明　考虑 H 中所有基本序列组成的集合 $\overline{H}$. 对 $\overline{H}$ 中的元素 $\xi = \{x_n\}$ 和 $\eta = \{y_n\}$, 若满足条件:

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0,$$

则认为它们等同, 记作 $\xi = \eta$. 对任一 $x \in H$, 显然 $\bar{x} = (x, x, \cdots, x, \cdots) \in \overline{H}$, 我们认为 $\bar{x} = x$. 任一收敛到 x 的基本序列 $\{x_n\}$, 按照我们的约定, 均与 $\bar{x}$ 等同, 这样就可将 H 看成 $\overline{H}$ 的子集.

现在规定 $\overline{H}$ 中的线性运算, 使之成为一线性空间. 对 $\xi = \{x_n\}, \eta = \{y_n\} \in \overline{H}$ 和复数 a, 定义 $\xi + \eta = \{x_n + y_n\}$ 和 $ax = \{ax_n\}$. 显然如此定义的加法及乘法运算有意义, $\overline{H}$ 关于这两个运算是线性空间, 且 H 是 $\overline{H}$ 的线性子空间.

其次在 $\overline{H}$ 中定义内积. 对 $\overline{H}$ 中的 $\xi = \{x_n\}, \eta = \{y_n\}$, 由于

$$\begin{aligned} &|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)| \\ \leqslant &\|x_n - x_m\| \cdot \|y_n\| + \|x_m\| \cdot \|y_n - y_m\| \\ \to &0, \quad 当\ n, m \to \infty, \end{aligned}$$

序列 $\{(x_n, y_n)\}$ 必有极限, 于是定义 ξ, η 的内积为

$$(\xi, \eta) = \lim_{n\to\infty} (x_n, y_n). \tag{1.1.4}$$

为使 (ξ, η) 有意义, 应证上式右端极限与 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 的选取无关. 实际上, 若 $\{x_n\} = \{\hat{x}_n\}$, $\{y_n\} = \{\hat{y}_n\}$, 即 $\|x_n - \hat{x}_n\| \to 0$, $\|y_n - \hat{y}_n\| \to 0$, 则

$$\begin{aligned} &|(x_n, y_n) - (\hat{x}_n, \hat{y}_n)| \\ \leqslant &\|x_n - \hat{x}_n\| \cdot \|y_n\| + \|\hat{x}_n\| \cdot \|y_n - \hat{y}_n\| \\ \to &0, \quad 当\ n \to \infty. \end{aligned}$$

显然当 ξ, η 属于 H 时, 如此定义的内积和 H 的内积一致. 此外, 内积式 (1.1.4) 满足定义 1.1.4 的条件 (i)~(iv). 因此 $\overline{H}$ 是内积空间, H 是 $\overline{H}$ 的子空间. 特别, $\overline{H}$ 是线性赋范空间.

今证 H 在 $\overline{H}$ 中稠密. 设 $\xi = \{x_n\} \in \overline{H}$, 取 $\bar{x}_n = (x_n, x_n, \cdots, x_n, \cdots)$, 则

$$\|\xi - \bar{x}_n\| = \lim_{j\to\infty} (x_j - x_n, x_j - x_n)^{\frac{1}{2}} = \lim_{j\to\infty} \|x_j - x_n\|, \tag{1.1.5}$$

而 $\|x_j - x_n\| \to 0$, 当 $j, n \to \infty$, 故 $\|\xi - \bar{x}_n\| \to 0$, 当 $n \to \infty$. 这表明 H 于 $\overline{H}$ 稠密.

最后证明 $\overline{H}$ 完全. 设 $\xi_1, \cdots, \xi_n, \cdots$ 是 $\overline{H}$ 中的基本序列. 由于 H 于 $\overline{H}$ 稠密, 故对每一 ξ_n, 必有 $\bar{x}_n = (x_n, x_n, \cdots, x_n, \cdots) \in H$ 使 $\|\xi_n - \bar{x}_n\| < \dfrac{1}{n}$. 由

$$\begin{aligned} \|\bar{x}_n - \bar{x}_m\| &\leqslant \|\bar{x}_n - \xi_n\| + \|\xi_n - \xi_m\| + \|\xi_m - \bar{x}_m\| \\ &\leqslant \frac{1}{n} + \|\xi_n - \xi_m\| + \frac{1}{m} \to 0 \quad 当\ n, m \to \infty, \end{aligned}$$

可知 $\{\bar{x}_n\}$ 是 $\overline{H}$ 中的基本序列, 从而 $\{x_n\}$ 是 H 中的基本序列. 记 $\xi = \{x_n\} = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in \overline{H}$, 则

$$\|\xi - \xi_n\| \leqslant \|\xi - \bar{x}_n\| + \|\bar{x}_n - \xi_n\| \leqslant \|\xi - \bar{x}_n\| + \frac{1}{n}.$$

由式 (1.1.5),

$$\lim_{n\to\infty} \|\xi - \bar{x}_n\| = \lim_{n\to\infty}\lim_{j\to\infty} \|x_j - x_n\| = 0,$$

故当 $n \to \infty$ 时, $\xi_n \to \xi$. □

1.1.3 射影定理

设 H 为一 Hilbert 空间. 集合 $K \subset H$ 称为凸集, 如果当 x_1, x_2 属于 K 时, 联结它们的线段 $tx_1 + (1-t)x_2 (0 \leqslant t \leqslant 1)$ 也属于 K.

定理 1.1.2 设 K 为一凸闭集, $x_0 \in H$, 则有 $y \in K$ 使

$$\|x_0 - y\| = \inf_{z\in K} \|x_0 - z\|. \tag{1.1.6}$$

证明 令 $d = \inf\limits_{z\in K} \|x_0 - z\|$. 显然有 “极小化” 序列 $\{z_j\}$ 使

$$\lim_{j\to\infty} \|x_0 - z_j\| = d. \tag{1.1.7}$$

今证 $\{z_j\}$ 是基本序列. 因 K 是凸集, 故 $\frac{1}{2}(z_n + z_m) \in K$, 于是

$$\|z_n + z_m - 2x_0\| \geqslant 2d.$$

由平行四边形公式:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2),$$

我们有

$$\begin{aligned}\|z_n - z_m\|^2 &= \|(z_n - x_0) - (z_m - x_0)\|^2 \\ &= 2(\|z_n - x_0\|^2 + \|z_m - x_0\|^2) - \|(z_n - x_0) + (z_m - x_0)\|^2 \\ &\leqslant 2(\|z_n - x_0\|^2 + \|z_m - x_0\|^2) - 4d^2 \\ &\to 0, \quad \text{当 } n, m \to \infty,\end{aligned}$$

所以 $\{z_j\}$ 是基本序列. 而 K 是闭集, 必有 $y \in K$ 使 $\lim\limits_{j\to\infty} z_j = y$. 于是由式 (1.1.7) 推得式 (1.1.6). □

设 $\mathfrak{M}$ 是 H 的子空间 (即闭线性子空间). 定义

$$\mathfrak{M}^{\perp} = \{y \in H : (y, x) = 0, \forall x \in \mathfrak{M}\},$$

称之为 $\mathfrak{M}$ 的直交补. 易证 $\mathfrak{M}^{\perp}$ 也是 H 的子空间, 且 $\mathfrak{M}\bigcap\mathfrak{M}^{\perp}=\{\theta\}$.

定理 1.1.3(射影定理) 设 $\mathfrak{M}$ 是 H 的子空间, 则每个 $x\in H$ 可唯一表成

$$x=y+z, \tag{1.1.8}$$

其中 $y\in\mathfrak{M}$, $z\in\mathfrak{M}^{\perp}$. 令 $y=Px$, 称 y 为 x 在 $\mathfrak{M}$ 上的正射影, P 是正射影算子. 显然

$$(y,z)=0,\ \ \|x\|^2=\|y\|^2+\|z\|^2.$$

证明 若 $x\in\mathfrak{M}$, 则取 $y=x$, $z=\theta$. 今设 $x\bar{\in}\mathfrak{M}$, 由定理 1.1.2, 必有 $y\in\mathfrak{M}$ 使

$$\|x-y\|=\inf_{z\in\mathfrak{M}}\|x-z\|.$$

对任何 $h\in\mathfrak{M}$ 和实参数 λ, 函数

$$\phi(\lambda)=\|x-y+\lambda h\|^2=\|x-y\|^2+2\mathrm{Re}(x-y,h)\lambda+\lambda^2\|h\|^2$$

(Re 表示取实部) 于 λ=0 取极小. 于是 $\phi'(0)=0$, 即

$$\mathrm{Re}(x-y,h)=0,\quad \forall h\in\mathfrak{M}.$$

设 $(x-y,h)=re^{i\theta}(r\geqslant 0)$, 以 $e^{-i\theta}h$ 代替上式中的 h, 则

$$|(x-y,h)|=r=\mathrm{Re}(x-y,e^{-i\theta})=0.$$

这说明 $(x-y)\in\mathfrak{M}^{\perp}$. 令 $z=x-y$, 即得式 (1.1.8).

最后证明唯一性. 设

$$x=y+z=y'+z',$$

其中 $y,y'\in\mathfrak{M},z,z'\in\mathfrak{M}^{\perp}$, 则 $y-y'=z'-z\in\mathfrak{M}\bigcap\mathfrak{M}^{\perp}$, 从而 $y=y',z=z'$. □

1.1.4 Riesz 表现定理

设 $f(x):H\to K$ 是定义在 H 上取值在数域 K 上的泛函. 若对 $\forall x,y\in H$ 和 $\forall a,\beta\in K$, 恒有

$$f(ax+\beta y)=af(x)+\beta f(y)\qquad (\text{特别}f(\theta)=0),$$

则称 $f(x)$ 为线性泛函. 若更设 $f(x)$ 连续, 即由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ 恒有

$$\lim_{n\to\infty}f(x)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为 H 上的连续线性泛函.

容易证明, 若线性泛函在一点连续则必处处连续.

设 $f(x)$ 是 H 上的线性泛函. 若存在常数 C 使

$$|f(x)| \leqslant C\,\|x\|$$

对一切 $x \in H$ 成立, 则说 $f(x)$ 为有界线性泛函. 使上述不等式成立的最小 C 称为泛函 $f(x)$ 的范数, 记作 $\|f\|$. 由定义可知

$$\|f\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|.$$

命题 1.1.1 线性泛函 $f(x)$ 连续的充要条件是它有界.

证明 设 $f(x)$ 有界, 则

$$|f(x)-f(x_0)| = |f(x-x_0)| \leqslant \|f\|\cdot\|x-x_0\|,$$

从而 $f(x)$ 连续. 反之, 若 $f(x)$ 连续而非有界, 则有 x_n 使

$$|f(x_n)| \geqslant n\,\|x_n\|, \quad n=1,2,\cdots.$$

令 $z_n = x_n/n\,\|x_n\|$, 则一方面 $z_n \to \theta$, 另一方面

$$|f(z_n)| = \left|f\left(\frac{x_n}{n\,\|x_n\|}\right)\right| \geqslant 1.$$

令 $n\to\infty$, 据连续性假设, $|f(\theta)| \geqslant 1$, 但 $f(\theta)=0$, 得出矛盾. □

今后所述的线性泛函均指连续或有界线性泛函.

定义 1.1.6 以 H' 表示 H 上一切线性泛函的集合, 称为 H 的**对偶空间或共轭空间**.

在 H' 中规定乘法 $(af)(x) = af(x)$ 和加法 $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, 则 H' 是线性空间.

定理 1.1.4(Riesz 表现定理) 设 H 为一 Hilbert 空间, 则对任一线性泛函 $f \in H'$, 恒有唯一 $u \in H$ 使

$$f(x) = (x,u), \tag{1.1.9}$$

且 $\|f\| = \|u\|$. 反之, 对任一 $u \in H$, 由式 (1.1.9) 确定的 $f \in H'$, 且 $\|f\| = \|u\|$.

证明 定理第二部分显然. 今证第一部分, 设 $f \in H'$, 令

$$\mathfrak{M} = \{x \in H : f(x) = 0\},$$

则 $\mathfrak{M}$ 是 H 的子空间. 若 $\mathfrak{M} = H$, 则 $f(x)$ 是零泛函, 此时取 $u=\theta$ 即可. 设 $\mathfrak{M} \neq H$, 今证 $\mathfrak{M}$ 的直交补 $\mathfrak{M}^\perp$ 是一维子空间. 因若存在两个线性无关的元素 $x_0, x_1 \in \mathfrak{M}^\perp$, 可取不同时为零的复数 α,β-使

$$f(\alpha x_0 + \beta x_1) = \alpha f(x_0) + \beta f(x_1) = 0,$$

则 $\alpha x_0+\beta x_1\in\mathfrak{M}\bigcap\mathfrak{M}^{\perp}$, 因此 $\alpha x_0+\beta x_1=0$, 与 x_0,x_1 线性无关矛盾. 这样 $\mathfrak{M}^{\perp}=\{\alpha x_0:\alpha\in K\}$. 可选 x_0 使 $f(x_0)=1$. 据定理 1.1.3, 任一 $x\in H$ 可表为

$$x=\alpha x_0+z,\quad z\in\mathfrak{M}.$$

于是 $f(x)=\alpha$. 但 $(x,x_0)=\alpha\|x_0\|^2,\alpha=(x,x_0/\|x_0\|^2)$, 故

$$f(x)=\alpha=(x,u),u=x_0/\|x_0\|^2.$$

若另有 $u'\in H$ 使 $f(x)=(x,u')$, 则

$$(x,u-u')=0,\quad \forall x\in H.$$

特别取 $x=u-u'$, 得 $u-u'=\theta$, 所以如此的 u 唯一.

最后, 由

$$|f(x)|=|(x,u)|\leqslant\|x\|\cdot\|u\|,$$

得 $\|f\|\leqslant\|u\|$. 又 $|f(u)|=(u,u)=\|u\|^2$, 因此 $\|f\|\geqslant\|u\|$. 这表明 $\|f\|=\|u\|$. □

由 Riesz 表现定理, 可按式 (1.1.9) 建立 H' 和 H 之间的一对一关系：$Jf=u$, 具有性质 $J(\alpha f)=\bar{\alpha}u$ 和 $\|f\|=\|u\|$. 设 $Jg=v$ 则 $J(f+g)=u+v$, 这表明对应关系 J 具有保范性和 "反线性" 性. 若在 H' 中引进和范数 $\|f\|$ 相应的内积 $(f,g)=(u,v)$, 则 H' 作成一 Hilbert 空间. 所以从代数结构和拓扑结构看, 可将 H 和 H' 看成同一空间, 在这个意义下, 我们说 H 是自对偶或自共轭空间.

1.1.5　弱收敛、弱列紧

序列 $\{x_j\}\subset H$ 说是弱收敛于 x, 记作：$x_n\rightharpoonup x$, 如果

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,y)=(x,y),\quad \forall y\in H.$$

为区别起见, 将通常的收敛 ($\|x_n-x\|\to 0$) 称为强收敛或按模收敛. 显然若 x_n 强收敛于 x, 则必弱收敛于 x, 反之不一定成立. 弱收敛序列的极限必唯一.

集合 $S\subset H$ 说是弱列紧, 若 S 中之任一序列 $\{x_n\}$ 必含一弱收敛的子列 $\{x_{ni}\}$.

定理 1.1.5　H 中之任一有界集 S 必为弱列紧集.

证明　设 $\{x_n\}\subset S,\|x_n\|\leqslant C(n=1,2,\cdots)$. 考虑由 $\{x_n\}$ 的一切线性组合：

$$a_1x_{n1}+a_2x_{n2}+\cdots+a_kx_{nk}$$

组成的线性子集, 记作 $\mathrm{Span}\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$; 然后再取闭包, 即得一线性子空间 $\mathfrak{M}$. 显然 $\mathfrak{M}$ 含有可数稠密子集 $\{y_k\}$. 今在 $\mathfrak{M}$ 中考虑 $\{x_n\}$. 因为

$$|(x_n,y_1)|\leqslant\|x_n\|\cdot\|y_1\|\leqslant M\|y_1\|,\qquad n=1,2,\cdots,$$

故有 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{1,n}\}$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{1,n},y_1)$ 存在, 同理又有 $\{x_{1,n}\}$ 的子序列 $\{x_{2,n}\}$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{2,n},y_k)$ 存在, 其中 $k=1,2$. 如此下去, 有 $\{x_{i-1,n}\}$ 的子序列 $\{x_{i,n}\}$ 使

$$\lim_{n\to\infty}(x_{i,n},y_k)\text{存在},\quad k=1,2,\cdots,i.$$

取 $x_{n_i}=x_{i,i}$, 则 $\lim\limits_{i\to\infty}(x_{n_i},y_j)$ 存在, 对一切 $j=1,2,\cdots$. 利用 $\{y_k\}$ 于 $\mathfrak{M}$ 的稠密性, 可证极限 $\lim\limits_{i\to\infty}(x_{n_i},y)$ 对所有 $y\in\mathfrak{M}$ 存在.

令

$$f(y)=\lim_{i\to\infty}(x_{n_i},y),\quad y\in\mathfrak{M},$$

显然 $\bar{f}(y)$(取复共轭) 是 $\mathfrak{M}$ 上的线性泛函. 又

$$\left|\bar{f}(y)\right|=|f(y)|=\lim_{i\to\infty}|(x_{n_i},y)|\leqslant C\|y\|,$$

故 $\bar{f}$ 是有界泛函. 据 Riesz 表现定理, 有 $x\in\mathfrak{M}$ 使 $f(y)=(x,y),\forall y\in\mathfrak{M}$. 由定理 1.1.3, 任一 $u\in H$ 可唯一表成 $u=y+z$, 其中 $y\in\mathfrak{M},z\in\mathfrak{M}^{\perp}$. 于是

$$\lim_{i\to\infty}(x_{n_i},u)=\lim_{i\to\infty}[(x_{n_i},y)+(x_{n_i},z)]=(x,y)=(x,u).$$

这证明了 $\{x_{n_i}\}$ 在 H 中弱收敛到 x. □

1.2 Sobolev 空间

1.2.1 光滑逼近

$L_2(\Omega)$ 空间的函数可用足够光滑的函数去逼近, 这是一个很有用的性质. 现在给出光滑逼近函数的做法: 磨光法.

设 $\Omega\in\mathbf{R}^n$ 是开域. 用 $C^m(\Omega)$ 表示定义在 Ω 上的 m 次连续可微函数, $C^\infty(\Omega)$ 表示定义在 Ω 上的无穷次可微函数. 对 Ω 上的任一函数 f, 称点集

$$\{x\in\Omega:f(x)\neq 0\}$$

的闭包为 f 的支集, 记为 $\mathrm{supp}f$. 对有界域 Ω 和 $0\leqslant m\leqslant\infty$, 记

$$C_0^m(\Omega)=\left\{f\in C^m(\Omega):\mathrm{supp}f\subset\Omega\right\},$$
$$C_0^\infty(\mathbf{R}^n)=\left\{f\in C^\infty(\mathbf{R}^n):\mathrm{supp}f\text{有界}\right\}.$$

令

$$j(x)=\begin{cases}\gamma^{-1}\exp\left(-\dfrac{|x|^2}{1-|x|^2}\right), & \text{当}|x|<1,\\ 0, & \text{当}|x|\geqslant 1,\end{cases}$$

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com