



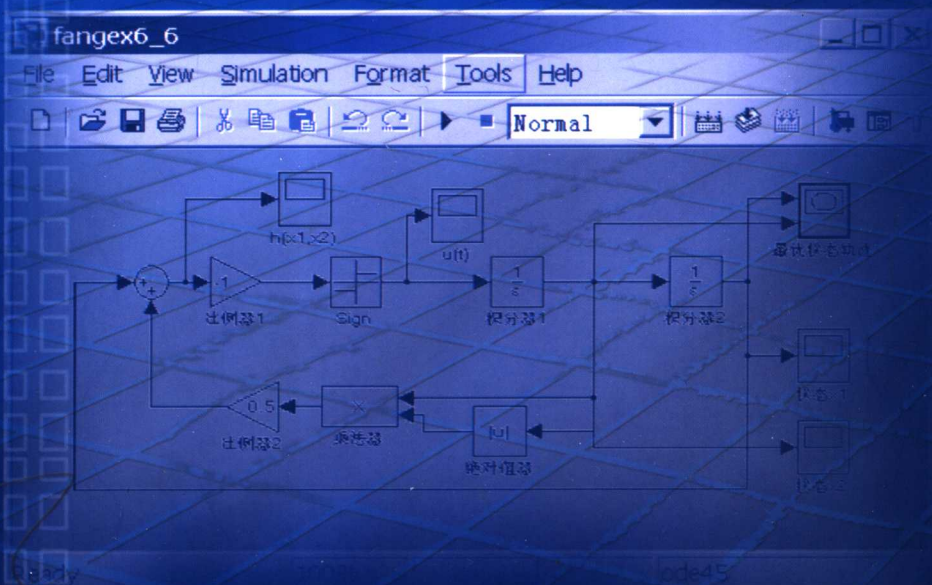
新世纪高等院校精品教材

XIANDAI KONGZHI LILUN JIQI

MATLAB SHIJIAN

现代控制理论及其 MATLAB 实践

方水良 编著



浙江大学出版社

现代控制理论 及其 MATLAB 实践

方水良 编著

浙江大学出版社

内容简介

本课程主要讲授对象为控制专业的本科生以及非控制专业类研究生,课时 30~40 小时,特别适合近年来由于研究生学历从两年半缩短为两年后各课程的课时普遍减少的现状。教材主要包括一般概念下的现代控制理论,如系统状态空间法;动态方程的建立及其求解;系统能控性、能观性和稳定性分析;最优控制问题及其基本求解方法等。本课程还介绍一种功能强大的计算机辅助控制系统分析设计工程软件包——MATLAB,并将其应用于现代控制系统的分析和设计。

通过本课程的学习,使学生能够初步掌握现代控制理论的基本知识及其分析方法,同时能初步掌握 MATLAB 工具包,并将其应用于控制系统的分析与综合,提高学生的系统分析和综合能力。

图书在版编目(CIP)数据

现代控制理论及其 MATLAB 实践 / 方水良编著. —杭州:
浙江大学出版社, 2005. 6
ISBN 7-308-04229-4

I. 现... II. 方... III. 现代控制理论—高等学校
—教材 IV. 0231

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 054997 号

责任编辑 樊晓燕

封面设计 宋纪浔

出版发行 浙江大学出版社

(杭州浙大路 38 号 邮政编码 310027)

(E-mail: zupress@mail. hz. zj. cn)

(网址: <http://www.zjupress.com>)

排 版 杭州好友排版工作室

印 刷 杭州杭新印务有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16

印 张 8.25

字 数 200 千

版 印 次 2005 年 6 月第 1 版 2005 年 6 月第 1 次印刷

印 数 0001—2000

书 号 ISBN 7-308-04229-4/O·324

定 价 13.50 元

目 录

第 1 章 绪言	1
1.1 自动控制发展历史简介	1
1.2 现代控制理论的基本内容	3
1.3 控制论、信息论及系统论	3
1.4 MATLAB 工程软件	4
第 2 章 状态空间分析法	5
2.1 状态、状态变量、状态空间、状态方程、动态方程	5
2.2 建立实际物理系统的动态方程	7
2.3 由控制系统的方块图求系统动态方程	10
2.4 由系统的传递函数求其动态方程(系统实现)	12
2.4.1 系统实现的直接法	12
2.4.2 系统实现的串联法	15
2.4.3 系统实现的并联法	17
2.5 系统状态方程的线性变换	20
2.5.1 系统状态空间表达式的非惟一性	20
2.5.2 对角标准型	21
2.5.3 约当标准型	25
2.6 从系统动态方程求系统传递函数(阵)	28
2.7 离散时间系统的状态空间表达式	29
2.8 MATLAB 在状态空间分析法中的应用	30
习题 2	36
第 3 章 控制系统状态方程求解	38
3.1 线性连续定常齐次方程求解	38
3.2 e^{At} 的性质及其求法	40
3.3 线性连续定常非齐次状态方程求解	47
3.4 连续时间状态空间表达式的离散化	48
3.5 离散时间系统状态方程求解	50
3.6 MATLAB 在状态方程求解中的应用	51
习题 3	55
第 4 章 系统稳定性及李雅普诺夫稳定	56
4.1 稳定性的一般概念	56

4.2 李雅普诺夫稳定性定义	57
4.2.1 系统的平衡状态	57
4.2.2 李雅普诺夫稳定	57
4.3 李雅普诺夫第一法(间接法)	58
4.4 李雅普诺夫第二法(直接法)	59
4.4.1 标量函数及其符号	59
4.4.2 李雅普诺夫第二法	60
4.5 线性定常系统的李雅普诺夫稳定分析	61
4.6 MATLAB 在系统稳定性分析中的应用	65
习题 4	66
第 5 章 能控性和能观性	68
5.1 离散时间系统的能控性	68
5.2 线性定常连续系统能控性	70
5.3 离散时间系统的能观性	72
5.4 线性定常连续系统的能观性	74
5.5 对偶系统和对偶原理	74
5.5.1 对偶系统	74
5.5.2 对偶原理	75
5.6 系统能控标准型和能观标准型	76
5.6.1 单输入系统能控标准型	76
5.6.2 单输出系统的能观标准型	80
5.7 MATLAB 在系统能控性和能观性分析中的应用	83
习题 5	85
第 6 章 系统的最优控制	86
6.1 线性反馈控制的基本结构及其特性	86
6.1.1 状态反馈	86
6.1.2 输出反馈	87
6.2 系统最优控制的概念	88
6.3 泛函及其变分法	89
6.3.1 泛函及其变分法概念	89
6.3.2 泛函极值的必要条件——欧拉方程(Euler Equation)	90
6.4 用变分法求连续系统最优控制	96
6.5 最小值原理和时间最短控制	103
6.6 MATLAB 在系统最优控制中的应用	108
习题 6	110

附录 MATLAB 简介	111
A.1 MATLAB 概述	111
A.2 如何获得 MATLAB 帮助	112
A.3 MATLAB 基本功能	116
A.3.1 MATLAB 的主要线性代数运算	116
A.3.2 常用的控制系统处理函数	117
A.4 MATLAB 的 M 文件	119
A.5 SIMULINK 仿真工具及其应用	119
主要参考文献	123
后 记	124

1.1 自动控制发展历史简介

自动控制思想及其实践可以说历史悠久。它是人类在认识世界和改造世界的过程中产生的,并随着社会的发展和科学水平的提高而不断发展。据古代楔形文字记载和从埃及古墓出土的实物可以看到,巴比伦和埃及在公元前 1500 年以前便已有很长的水钟使用历史了。公元前 300 年,古希腊就运用反馈控制原理设计了浮子调节器,并应用于水钟和油灯中。

在如图 1-1 所示的水钟原理图中,最上面的蓄水池提供水源,中间蓄水池浮动的三角形水塞保证中间水池有恒定水位,以确保其流出的水滴速度均匀,从而保证最下面水池中的带有指针的浮子均匀上升,并指示出时间信息。

中国有着灿烂的古代文明。早在 1000 多年前,我国古代先人们也发明了铜壶滴漏计时器、指南车等控制装置。据《周礼》记载,约在公元前 500 年,中国的军队中即已用漏壶作为计时的装置。约在公元 120 年,著名的科学家张衡(78—139 年,东汉)又提出了用补偿壶解决随水头降低计时不准确问题的巧妙方法。在他的“漏水转浑天仪”中,不仅有浮子、漏箭,而且还有虹吸管和至少一个补偿壶。最有名的中国水钟“铜壶滴漏”由铜匠杜子威和洗运行建造于公元 1316 年(元代延祐三年),并一直连续使用到 1900 年。

1765 年,俄罗斯的珀尔朱诺夫(I. Polzunov)发明了蒸汽机锅炉的水位自动调节器(这在俄罗斯被认为是世界上的第一个自动调节器)。1760—1800 年,美国的瓦特(J. Watt)对蒸汽机进行了彻底的改造,他给蒸汽机添加了一个“节流”控制器即节流阀,其原理图如图 1-2 所示。它由一个离心“调节器”操纵,“调节器”或“飞球调节器”用于调节蒸汽流,以便确保引擎工作时速度大致均匀。这是当时反馈调节器在工业生产中最成功的应用。因此,瓦特的这个控制蒸汽机转速的飞球控制器常被认为是首个真正成功应用于工业的自控器。

1868 年以前,自控装置和系统的设计还处于直觉阶段,没有系统的理论指导,因此在控制系统的各项性能(如稳、准、快)的协调控制方面经常出现问题。19 世纪后半叶,许多科学家开始基于数学理论的自控理论的研究,并对控制系统的性能改善产生了积极的影响。1868 年,麦克斯威尔(J. C. Maxwell)在他的论文《论调节器》(Maxwell J C, On Governors, Proc. Royal Society of London, vol. 16: 270~283, 1868)中,建立了飞球控制器的微分方程数学模型,并在平衡点附近进行了线性化处理,指出稳定性取决于特征方程的根是否具有负的实部。1877 年,罗斯(E. J. Routh)提出了不求系统微分方程根的稳定性判据。1895 年,霍尔维茨(A. Hurwitz)也独立提出了类似的霍尔维茨稳定性判据。1892 年,俄罗斯伟大的数学力

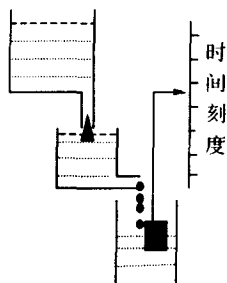


图 1-1 水钟原理图

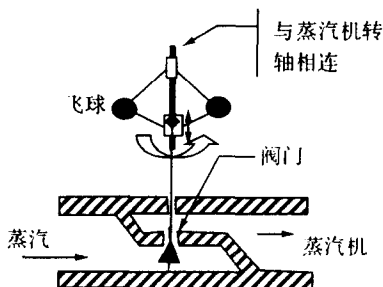


图 1-2 飞球转速调节器原理图

学家李雅普诺夫(A. M. Lyapunov)发表了其具有深远历史意义的博士论文《运动稳定性的一般问题》(*The General Problem of the Stability of Motion*)。在这一论文中,他提出了极其重要的李雅普诺夫第二方法或李雅普诺夫直接法。这一方法不仅可用于线性系统而且可用于非线性时变系统的分析与设计。

第二次世界大战前后,对于自动武器研发的需要,为控制理论的研究和实践提出了更大的需求,从而大大推动了自控理论的发展。1948年,数学家维纳(N. Wiener)的《控制论》(*Cybernetics*)一书的出版,标志着控制论的正式诞生。这个“关于在动物和机器中的控制和通讯的科学”(Wiener所下的经典定义)经过了半个多世纪不断发展,其研究内容及其研究方法都有了很大的变化。图1-3所示为控制理论的主要发展历史。

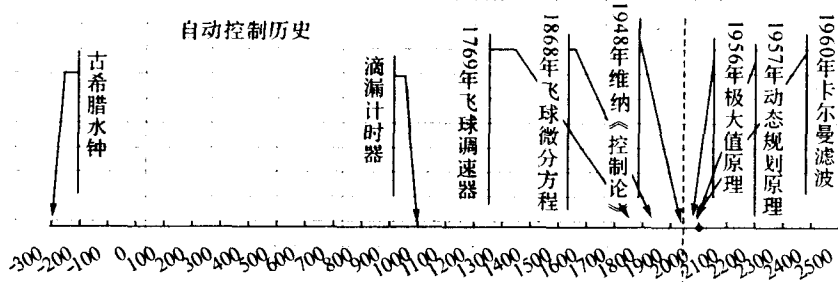


图 1-3 控制理论发展简史

概括地说,控制论发展经过了三个时期:

第一阶段是20世纪40年代末到50年代的经典控制论时期,着重研究单机自动化,解决单输入单输出(SISO—Single Input Single Output)系统的控制问题;它的主要数学工具是微分方程、拉普拉斯变换和传递函数;主要研究方法是时域法、频域法和根轨迹法;主要问题是控制系统的快速性、稳定性及其精度。

第二阶段是20世纪60年代的现代控制理论时期,着重解决机组自动化和生物系统的多输入多输出(MIMO—Multi Input Multi Output)系统的控制问题;主要数学工具是一次微分方程组、矩阵论、状态空间法等;主要方法是变分法、极大值原理、动态规划理论等;重点是最优控制、随机控制和自适应控制;核心控制装置是电子计算机。

第三阶段是20世纪70年代的大系统理论时期,着重解决生物系统、社会系统这样一些众多变量的大系统的综合自动化问题;方法以时域法为主;重点是大系统多级递阶控制;核心装置是网络化的电子计算机。

从控制论的观点看,动物,特别是人,是最巧妙、最灵活的控制系统。它善于根据外界条件的变化而作出正确的处理。如何将人的智能应用于实际的自动控制系统中,这是一个有重要意义的研究课题。从20世纪70年代开始,人们不仅研究社会、经济、管理、生态环境等系统问题,而且还研究和模拟人脑功能,从而形成了新的学科——人工智能。计算机技术的发展为人工智能的发展提供了坚实的基础,人们通过计算机的强大的信息处理能力来开发人工智能,并用它来模仿人脑。在没有人的干预下,人工智能系统能够进行自我调节、自我学习和自我组织,以适应外界环境的变化,并作出相应的决策和控制。

1.2 现代控制理论的基本内容

科学在发展,控制论也在不断发展。所以“现代”两个字加在“控制理论”前面,其含义容易被误解。实际上,我们讲的现代控制理论指的是20世纪五六十年代所产生的一些重要控制理论,主要包括:

- 用状态空间法对多输入多输出复杂系统建模,并进一步通过状态方程求解分析,研究系统的可控性、可观性及其稳定性,分析系统的实现问题。

- 用变分法、最大(最小)值原理、动态规划原理等求解系统的最优控制问题,其中常见的最优控制包括时间最短、能耗最少等,以及它们的组合优化问题,相应的有状态调节器、输出调节器、跟踪器等综合设计问题。

- 最优控制往往要求系统的状态反馈控制,但在许多情况下,系统的状态是很难求得的,往往需要一些专门的处理方法,如卡尔曼滤波技术。

- 20世纪60年代以来,现代控制理论各方面有了很大的发展,而且形成了几个重要的分支课程,如线性系统理论、最优控制理论、自适应控制理论、系统辨识理论等。

对控制系统一定要进行定量分析,否则就没有控制论;而要进行定量分析,就必须用数学模型来刻画描述系统,也即建立系统的数学模型。这是一个很重要的问题,也是一个很复杂的问题。

经典控制论中常用一个高阶微分方程来描述系统的运动规律,而现代控制论中采用的是状态空间法,就是用一组状态变量的一阶微分方程组作为系统的数学模型。这是现代控制理论与经典控制理论的一个重要区别。从某种意义上说,经典控制中的微分方程只能描述系统的输入与输出的关系,却不能描述系统内部的结构及其状态变量,它描述的只是一个“黑箱”系统。而现代控制论中的状态空间法不但能描述系统输入与输出的关系,而且还能完全描述内部的结构及其状态变量的关系,它描述的是一个“白箱”系统。由于能够描述更多的系统信息,所以可以实现更好的系统控制。

1.3 控制论、信息论及系统论

控制论、信息论、系统论作为独立的学科,各自都有自己的研究重点、研究方式和发展方向,同时又有内在的联系。在研究通讯和控制时,都离不开系统;研究系统或控制时,又离不开信息。一般系统论把其研究对象作为一个整体加以考虑,提出适合于一切系统的模式、原则和规律,强调系统大于个体,这有助于说明有组织的系统。而控制论的研究对象是系统,它对于进一步考察系统内部的组织、控制和调节的功能是不可缺少的。信息是组织系统的一个

重要特征,它使系统得以实现自我调节,是系统之间、系统与环境之间联系的主要方式。系统、信息、控制不可分离。

我们知道,一般系统有三大要素:物质、能量和信息。对控制系统而言,信息是最重要的,信息与控制是不可分的,系统中任何信息的传递、交换和处理都是为了系统的控制,而控制正是控制论系统的主要目的。所以,从某种意义上说,控制系统一定是一个信息系统。

实际上,控制论中的系统常常是一个很复杂的系统,施控系统和受控系统都由许多子系统组成,而且常常不能明显地区分。例如,一个企业可看做是一个复杂的控制系统,厂长施控于各部门负责人,而各负责人又施控于其下属……直到每个工人施控于各机床设备,以及各具体的刀具、主轴、马达、油泵等。

所以,控制论思想不但可以广泛应用于军事、航天航空、化工生产等装备和生产线的控制,也可对人文、社会等方面的管理控制带来积极的指导作用。

1.4 MATLAB 工程软件

MATLAB 是 MATrix LABoratory 的缩写,起源于 1980 年美国的 Cleve Moler 博士的工作,初衷主要是为了进行线性代数课程中复杂的矩阵、向量的各种运算。由于该软件具有极强的矩阵和向量处理能力,所以很快就被广大的控制领域的研究人员采用,并在原来的基础上开发了各种各样的控制系统的研究分析软件。后来其他学科的研究人员也在已有 MATLAB 基础上不断扩展各自领域的专门的工具包,所以现在的 MATLAB 已不仅仅局限于现代控制系统分析和综合应用,它已是包罗众多学科的功能强大的“技术计算语言(The Language of Technical Computing)”。

MATLAB 目前是国际上控制领域最流行的计算机辅助软件,它对提高我们对各种控制系统、各种控制理论方法的理解和分析综合能力是大有帮助的。它除了传统的人机交互式编程计算以外,还提供了丰富可靠的矩阵运算、图形绘制、数据处理、图像处理等功能。另外还包括大量的专门工具箱(Toolbox),如控制系统工具箱(Control System Toolbox)、系统辨识工具箱(System Identification Toolbox)、鲁棒控制工具箱(Robust Control Toolbox)、多变量频域设计工具箱(Multi-Variable Frequency Design Toolbox)、最优化工具箱(Optimization Control Toolbox),等等。特别还开发了功能强大的控制系统仿真环境 SIMULINK,它用形象的图形环境为控制系统的分析设计提供了很好的试验工具。

本教材将初步介绍 MATLAB 中有关现代控制理论的分析应用功能。

状态空间分析法

2.1 状态、状态变量、状态空间、状态方程、动态方程

任何一个系统在特定时刻都有一个特定的状态,每个状态都可以用最小的一组(一个或多个)独立的状态变量来描述。

设系统有 n 个状态变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 它们都是时间 t 的函数。控制系统的每一个状态都可以在一个由 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为轴的 n 维状态空间上的一点来表示,用向量形式表示就是:

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

X 称做系统的状态向量。

设系统的控制输入为 $u_1, u_2, \dots, u_r$, 它们也是时间 t 的函数。记

$$U = (u_1, u_2, \dots, u_r)^T$$

那么表示系统状态向量 $X(t)$ 随系统输入向量 $U(t)$ 以及时间 t 变化的规律的方程就是控制系统的状态方程

$$\dot{X}(t) = F[X(t), U(t), t] \quad (2-1)$$

其中 $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ 是一个函数矢量。状态方程一般是一个一次微分方程组。

设系统的输出变量为 $y_1, y_2, \dots, y_m$, 则 $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T$ 称为系统的输出向量。表示输出向量 $Y(t)$ 与系统状态向量 $X(t)$ 、系统输入向量 $U(t)$ 以及时间 t 的关系的方程就称系统的输出方程

$$Y(t) = G[X(t), U(t), t] \quad (2-2)$$

其中 $G = (g_1, g_2, \dots, g_m)^T$ 是一个函数矢量。实际上,系统的输出方程只是表达了在任意时刻 t , 系统输出向量 $Y(t)$ 与系统状态向量 $X(t)$ 以及系统输入向量 $U(t)$ 的显式函数关系,不存在一般意义上的解方程运算。

在现代控制理论中,用系统的状态方程和输出方程来描述系统的动态行为,状态方程和输出方程合起来称做系统的状态空间表达式或称动态方程。

根据函数向量 F 和 G 的不同情况,一般控制系统可以分为如下四种:

- 线性定常(时不变)系统;
- 线性不定常(时变)系统;
- 非线性定常系统;
- 非线性时变系统。

在本教材中,我们主要考虑线性定常系统(LTI)。这时,系统的动态方程可以表示如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \cdots + b_{1r}u_r \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \cdots + b_{2r}u_r \\ \cdots \cdots \end{cases} \quad (2-3)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \cdots + b_{nr}u_r \\ y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n + d_{11}u_1 + d_{12}u_2 + \cdots + d_{1r}u_r \\ y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n + d_{21}u_1 + d_{22}u_2 + \cdots + d_{2r}u_r \\ \cdots \cdots \\ y_m = c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \cdots + c_{mn}x_n + d_{m1}u_1 + d_{m2}u_2 + \cdots + d_{mr}u_r \end{cases} \quad (2-4)$$

写成矢量形式为

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX + DU \end{cases} \quad (2-5)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix}$$

上式中, $A_{n \times n}$ 称为系统矩阵, $B_{n \times r}$ 称为输入(或控制)矩阵。 A 由系统内部结构及其参数决定,体现了系统内部的特性,而 B 则主要体现了系统输入的施加情况。

$C_{m \times n}$ 矩阵称为输出矩阵,它表达了输出变量与状态变量之间的关系, $D_{m \times r}$ 矩阵称为直接转移矩阵,表示了控制向量 U 直接转移到输出变量 Y 的转移关系。一般控制系统中,通常情况下 $D=0$ 。

(2-5) 式所表示的系统动态方程通常可以用 $\sum(A, B, C, D)$ 简写。图 2-1 所示为该系统的系统方块图。它由两个前向通道和一个状态反馈回路组成,其中 D 通道表示控制输入 U 到系统输出 Y 的直接转移。

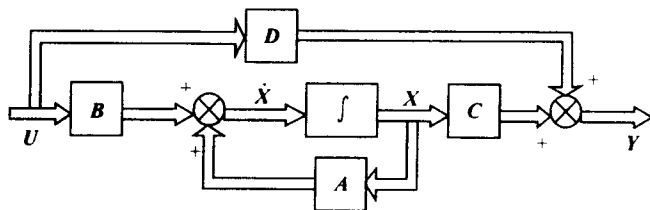


图 2-1 系统动态方程的方块图结构

2.2 建立实际物理系统的动态方程

一般控制系统可分为电气、机械、机电、液压、热力等类型。要研究它们,一般先要建立其运动的数学模型(微分方程(组)、传递函数、动态方程等),然后根据具体系统结构及其研究目的,选择一定的物理量作为系统的状态变量和输出变量,并利用各种物理定律,如牛顿定律、基尔霍夫电压电流定律、能量守恒定律等,即可建立系统的动态方程模型。

例 2-1 机械平移系统 图 2-2 所示为一加速度仪的结构原理图。它可以指示出其壳体相对于惯性空间(如地球)的加速度。

设 x_i 为壳体相对于惯性空间的位移; x_o 为质量 m 相对于惯性空间的位移; $y = x_i - x_o$ 为质量 m 相对于壳体的位移。

根据牛顿第二定律,这个系统的运动方程为

$$m\ddot{x}_o = ky + \mu \dot{y}$$

将 $x_o = x_i - y$ 代入,我们就可以得到关于加速度仪以变量 y 为输出的微分方程

$$m\ddot{x}_i = ky + \mu \dot{y} + m\ddot{y}$$

以质量 m 相对于壳体的位移 y 作为状态变量 x_1 , 以 m 相对于壳体的速度为状态变量 x_2 , 并将质量 m 相对于加速度仪外壳的位移 y 作为系统输出, 以加速度仪外壳相对于地面的加速度 $\ddot{x}_i$ 作为系统输入 u , 那么有

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{\mu}{m}x_2 + u \\ y = x_1 \end{cases}$$

写成矢量形式为

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -\mu/m \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = AX + Bu \\ y = x_1 = [1 \ 0] X = CX \end{cases} \quad (2-6)$$

这就是图 2-2 所示加速度仪的动态方程。

当加速度 $\ddot{x}_i$ 为常数, 且系统达到稳定状况时, 有

$$y = m\ddot{x}_i/k$$

所以我们可以通过 y 的读数, 确定运动物体的加速度值。

例 2-2 RLC 电路 在图 2-3 所示 RLC 电路中, 以 e_i 作为系统的控制输入 $u(t)$, e_o 作为系统输出 $y(t)$, 建立系统的动态方程。

该 RLC 电路有两个独立的储能元件 L 和 C 。我们可以取电容 C 两端电压和流过电感 L 的电流 i 作为系统的两个状态变量, 分别记作 x_1 和 x_2 。根据基尔霍夫电压定律和 R , L , C 元件的电压电流关系, 可得到下列方程:

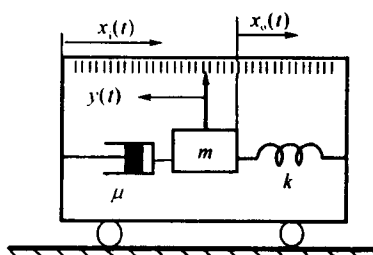


图 2-2 加速度仪的结构原理图

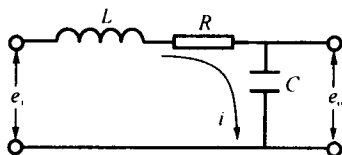


图 2-3 RLC 振荡系统

$$\begin{cases} L \frac{dx_2}{dt} + Rx_2 + x_1 = u(t) \\ x_1 = \frac{1}{C} \int x_2 dt \\ y = e_o = x_1 \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{C} x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{L} x_1 - \frac{R}{L} x_2 + \frac{1}{L} u(t) \\ y = e_o = x_1 \end{cases}$$

写成矢量形式为

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u(t) \\ y = [1 \ 0] X \end{cases} \quad (2-7)$$

这就是如图 2-3 所示 RLC 电网路的动态方程。

例 2-3 电枢控制式电机控制系统 图 2-4 所示为电枢控制式电机控制系统原理图,其中 R, L 和 $i(t)$ 分别为电枢回路的内阻、内感和电流, μ 为电机轴的旋转阻尼系数, $u(t)$ 为电枢回路的控制电压, K_t 为电动机的力矩系数, K_b 为电动机的反电动势系数。

根据电机原理,电机转动时,将产生反电势 e_b ,其大小为

$$e_b = K_b \cdot \omega$$

在磁场强度不变的情况下,电动机产生的力矩 T 与电枢回路的电流成正比,即

$$T = K_t i(t)$$

根据基尔霍夫电压定律,电枢回路有下列关系:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + e_b = u(t)$$

对电机转轴,根据牛顿定律,有

$$T = J \ddot{\theta} + \mu \dot{\theta}$$

取电枢回路电流 $i(t)$ 、电机轴角速度 ω 及其转角 θ 为系统的三个状态变量 x_1, x_2, x_3 ,取电机轴转角 θ 为系统输出,电枢控制电压 $u(t)$ 为系统输入,我们有

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{L} x_1 - \frac{K_b}{L} x_2 + \frac{1}{L} u(t) \\ \dot{x}_2 = \frac{K_t}{J} x_1 - \frac{\mu}{J} x_2 \\ \dot{x}_3 = x_2 \\ y = x_3 \end{cases}$$

写成矢量形式为

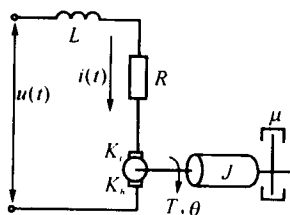


图 2-4 电枢控制式电机控制

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K_b}{L} & 0 \\ \frac{K_t}{J} & -\frac{\mu}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ Y = [0 \quad 0 \quad 1]X \end{cases} \quad (2-8)$$

这是一个三阶系统。

如果我们对电机轴转角 θ 不感兴趣,在本例中我们可以取电枢回路电流 $i(t)$ 及电机轴角速度 ω 为系统的两个状态变量 x_1, x_2 , 取电机轴角速度 ω 为系统输出, 电枢控制电压 $u(t)$ 为系统输入。我们有

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{K_b}{L}x_2 + \frac{1}{L}u(t) \\ \dot{x}_2 = \frac{K_t}{J}x_1 - \frac{\mu}{J}x_2 \\ y = x_2 \end{cases}$$

写成矢量形式为

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K_b}{L} \\ \frac{K_t}{J} & -\frac{\mu}{J} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \quad 1]X \end{cases}$$

这是一个二阶系统。

实际上,根据不同的研究目的以及不同的状态变量的取法,同一个控制系统的动态方程可以是各种各样的。对这个问题的更进一步的讨论可参阅后续章节。

例 2-4 多输入多输出系统(MIMO) 在图 2-5 所示的机械系统中,质量 m_1, m_2 各受到外力 f_1, f_2 的作用。质量相对于静平衡位置的位移分别为 x_1, x_2 ; 速度分别为 v_1, v_2 。请建立系统的动态方程。

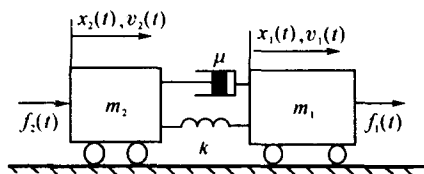


图 2-5 多输入多输出系统

解 根据牛顿定律,分别对 m_1, m_2 进行受力分析并建立动力学方程。我们有

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = f_1(t) + \mu(v_2 - v_1) + k(x_2 - x_1) \\ m_2 \ddot{x}_2 = f_2(t) - \mu(v_2 - v_1) - k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

取 x_1, x_2, v_1, v_2 为系统的四个状态变量 x_1, x_2, x_3, x_4 ; $f_1(t), f_2(t)$ 为系统的两个控制输入 $u_1(t), u_2(t)$, 则有状态方程:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = -\frac{k}{m_1}x_1 + \frac{k}{m_1}x_2 - \frac{\mu}{m_1}x_3 + \frac{\mu}{m_1}x_4 + \frac{1}{m_1}u_1(t) \\ \dot{x}_4 = \frac{k}{m_2}x_1 - \frac{k}{m_2}x_2 + \frac{\mu}{m_2}x_3 - \frac{\mu}{m_2}x_4 + \frac{1}{m_2}u_2(t) \end{cases}$$

如果取 x_1, x_2 为系统的两个输出,即

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \end{cases}$$

写成矢量形式,得系统的动态方程为

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & -\frac{\mu}{m_1} & \frac{\mu}{m_1} \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & \frac{\mu}{m_2} & -\frac{\mu}{m_2} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} U \\ Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} X \end{cases} \quad (2-9)$$

2.3 由控制系统的方块图求系统动态方程

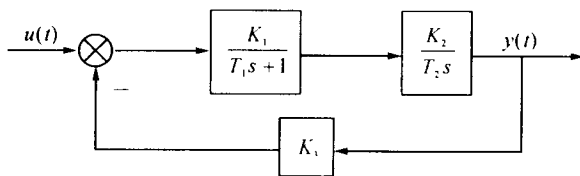
系统方块图是经典控制中常用的一种用来表示控制系统各环节、各信号间相互关系的图形化的模型,具有形象、直观的优点,常为人们采用。

要将系统方块图模型转化为状态空间表达式,一般可以按照下列三个步骤进行。

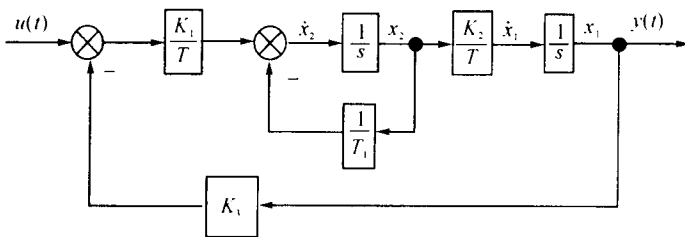
第一步:在系统方块图的基础上,将各环节通过等效变换分解,使得整个系统方块图只有标准积分器($1/s$)、比例器(K)及其综合器(加法器)组成。这三种基本器件通过串联、并联和反馈三种形式组成整个控制系统,而且标准积分器($1/s$)只能在系统的前向通道上出现。

第二步:系统等效方块图中的标准积分器($1/s$)的数目就是该系统具有的独立状态变量的数目。将上述调整过的方块图中的每个标准积分器($1/s$)的输出作为一个独立的状态变量 x_i ,那么积分器的输入端就是状态变量的一阶导数 $\dot{x}_i = dx_i/dt$ 。

第三步:根据调整过的方块图中各信号的关系,写出每个状态变量的一阶导数 $\dot{x}_i$ 的表达式,得到各变量的一阶微分方程,从而求得系统的状态方程。最后根据需要指定输出变量,即可从方块图写出系统的输出方程。



(a) 系统方块图



(b) 系统方块图等效图

图 2-6

例 2-5 某控制系统的方块图如图 2-6(a)所示,试求出其动态方程。

该系统主要由一个一阶惯性环节和一个积分器组成。对于一阶惯性环节,我们可以通过等效变换,将其转化为一个前向通道为一标准积分器的反馈系统。

图 2-6(a)所示方块图经等效变换后如图 2-6(b)所示。我们取每个积分器的输出端信号为状态变量 x_1 和 x_2 ,积分器的输入端即为 $\dot{x}_1$ 和 $\dot{x}_2$ 。从图可得系统状态方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{K_2}{T_2} x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{T_1} x_2 + \frac{K_1}{T_1} (u - K_3 x_1) = -\frac{K_1 K_3}{T_1} x_1 - \frac{1}{T_1} x_2 + \frac{K_1}{T_1} u \end{cases}$$

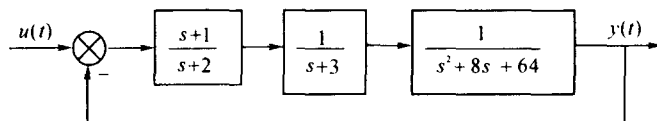
取 y 为系统输出,输出方程为

$$y = x_1$$

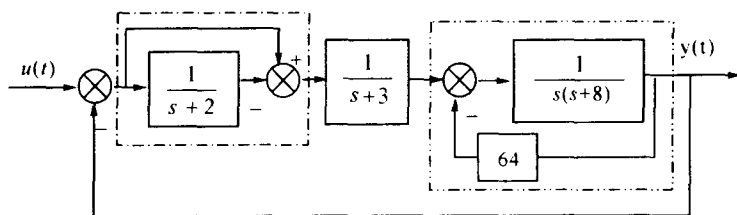
写成矢量形式,我们得到系统动态方程

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{K_2}{T_2} \\ -\frac{K_1 K_3}{T_1} & -\frac{1}{T_1} \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_1}{T_1} \end{bmatrix} u \\ \mathbf{Y} = [1 \quad 0] \mathbf{X} \end{cases} \quad (2-10)$$

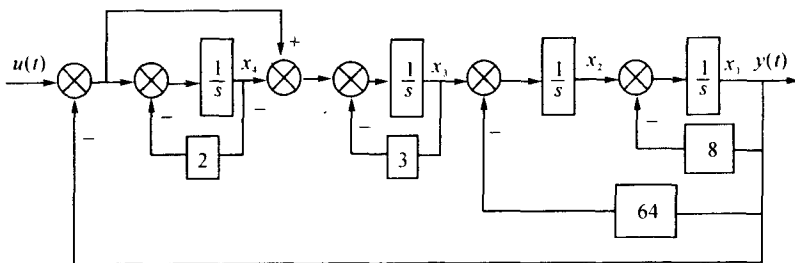
例 2-6 求如图 2-7(a)所示系统的动态方程。



(a) 系统方块图



(b) 第一次等效变换



(c) 由标准积分器组成的等效方块图

图 2-7