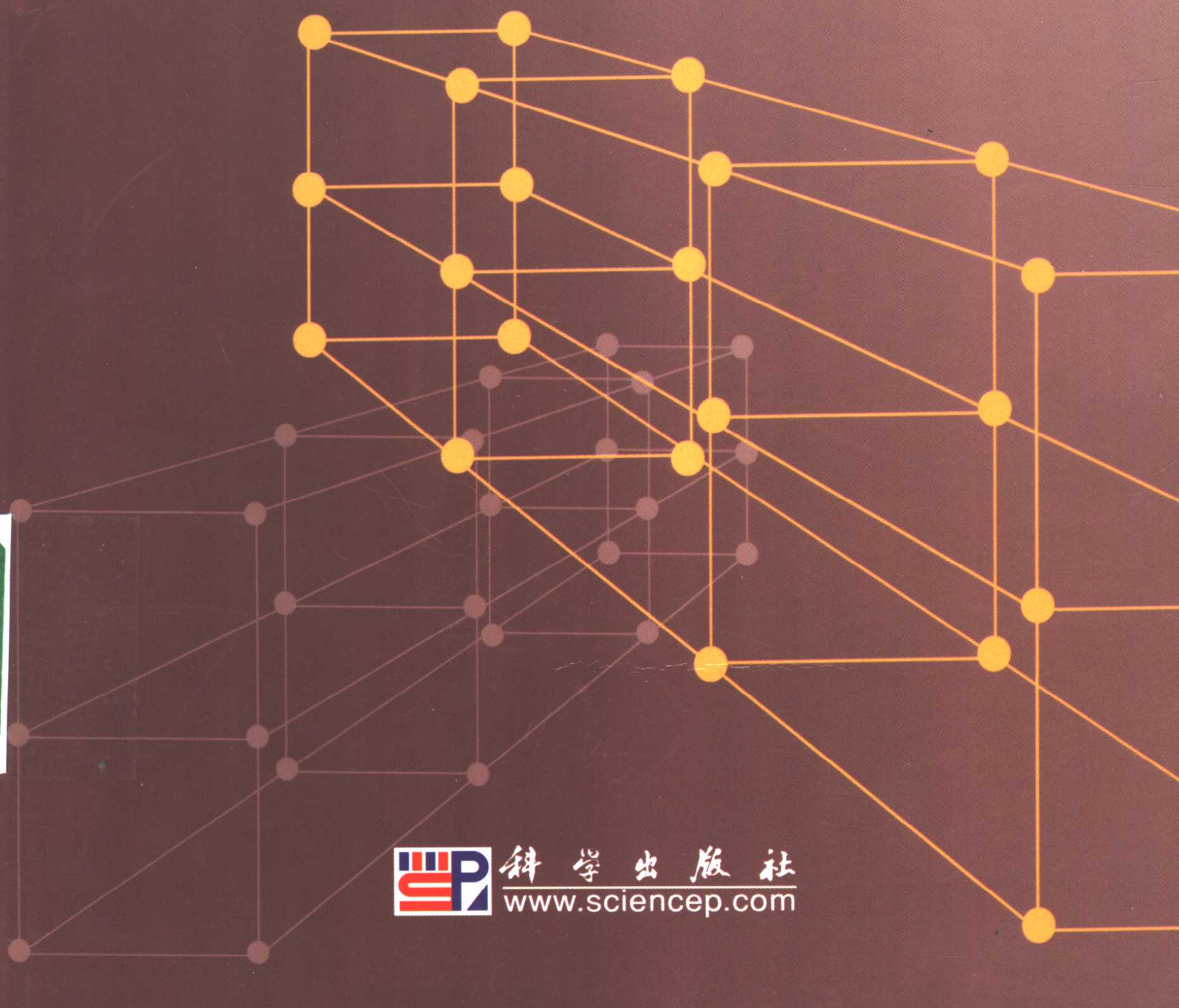
索伯列夫空间论

王向东 梁鋆廷 戎海武 著



科学出版社
www.sciencep.com

索伯列夫空间论

王向东　梁鍳廷　戎海武　著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

索伯列夫空间和有关的嵌入定理已成为研讨偏微分方程理论必不可少的工具．本书内容不仅包含了索伯列夫空间的经典理论，还含有大量的新内容．书中介绍并讨论了加权索伯列夫空间和各向异性索伯列夫空间，并将其推广，还用较大篇幅介绍其在偏微分方程理论中的重要应用．

本书可供数学相关专业高年级大学生、研究生、教师或对近代数学感兴趣的读者阅读参考．

图书在版编目(CIP)数据

索伯列夫空间论/王向东，梁鋆廷，戎海武著．—北京：科学出版社，2004
ISBN 7-03-012544-4

Ⅰ．索…　Ⅱ．①王…②梁…③戎…　Ⅲ．索伯列夫空间　Ⅳ．O177.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 117910 号

责任编辑：林　鹏　陈玉琢　吴寅泰　宪　楠／责任校对：包志虹
责任印制：钱玉芬／封面设计：耕者

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2004年5月第 一 版　开本：B5(720×1000)
2004年5月第一次印刷　印张：18 3/4
印数：1—2 000　字数：359 000

定价：42.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

前　言

偏微分方程、计算数学、应用数学以及数学物理等领域的近代发展都需要利用索伯列夫(Sobolev)空间理论作为研究工具,但是在大学阶段,很难安排大学生学习有关的理论.而大学生要学习上述诸领域的近代数学,特别是想要开展相关的科学研究时,就一定要掌握好 Sobolev 空间的有关理论,否则对已有文献都很难阅读.

本书是为攻读偏微分方程的硕士研究生而著,自然地,本书也可成为大学生自学近代数学领域的基础理论参考书,也可供相关人员参考、备查.

本书以介绍 Sobolev 空间理论的有关内容为目的,内容不仅包含 Sobolev 空间理论的经典结果,如:$W_p^1(G)$空间中的嵌入定理、嵌入算子的紧性以及 $W_p^1(G)$空间等,还包含了Sobolev空间理论的大量新内容以及后来的发展,如:$W_p^l(G)$中函数连续的条件、$W_p^1(G)$中函数的奇异集的维数、$\mathring{W}_n^1(G)$空间的嵌入定理、逆 Hölder 不等式,以 Muckenhoupt 函数类作权的加权 Sobolev 空间和各向异性 Sobolev 空间等.书中对某些重要定理,特别是嵌入定理,给出不止一种的证明方法,目的在于从不同角度应用不同方法解决同一问题,使读者开阔眼界、得到启发.

在本书的编写过程中,我们参阅、引用了国内外大量文献,在此一并向原作者致谢.另外,中国科学院院士郭柏灵教授、徐海祥博士、杨灵娥教授为本书的编写和出版提出许多有益建议,国家自然科学基金、广东省自然科学基金、佛山科学技术学院出版基金与佛山科学技术学院应用数学重点学科为本书的出版慷慨资助,在此谨表谢意.

本书是在早期讲义基础上,经过逐年修改、增补、积累而成,难免存在书写风格、推证简繁不尽一致的缺点;同时本书涉及内容较多,其中还有许多精妙的内容,限于作者的学识,可能对某些内容理解不够,出现错误也在所难免,敬请读者批评指正.

著　者

2003 年 5 月 10 日

目　　录

第一章　函数类和区域类

定义在区域 $G\subset E^n$ 上的函数 $f(x)$，称为在 G 上满足指数为 $\mu>0$ 的一致 Hölder 条件，或同样地称 $f(x)$ 为在 $\overline{G}$ 的 μ-Hölder 连续函数，记作 $f(x)\in C_\mu(\overline{G})$，如果存在常数 $\mathscr{K}>0$，使对任何 $x_1,x_2\in G$，成立

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\mathscr{K}|x_1-x_2|^\mu. \tag{1.1}$$

（如果 $\mu=1$，则称 $f(x)$ 为在 $\overline{G}$ 的 Lipschitz 函数，它们的全体记为 $\mathrm{Lip}(\overline{G})$.）满足(1.1)的最小常数 $\mathscr{K}$（用 $H_\mu(f)$ 记之）称为函数 $f(x)$ 在 $\overline{G}$ 上的 Hölder 系数或 Hölder 常数．

$C^m(\overline{G})$ 记所有在 $\overline{G}$ 上 m 次连续可微函数（$m=0$ 时，$C^0(\overline{G})\equiv C(\overline{G})$ 记在 $\overline{G}$ 上连续的函数）的全体，并且定义范数

$$\|u(x)\|_{C^m(\overline{G})}=\sum_{k=0}^{m}\sum_{|\alpha|=k}\max_{\overline{G}}|D^\alpha u|,\ u\in C^m(\overline{G}).$$

$C_\mu^m(\overline{G})$ 记 $C^m(\overline{G})$ 中所有这样的函数的全体，它们的所有 m 阶导数（$m=0$ 时是函数本身）在 $\overline{G}$ 满足指数 $\mu>0$ 的一致 Hölder 条件，并且定义范数

$$\|u(x)\|_{C_\mu^m(\overline{G})}=\|u\|_{C^m(\overline{G})}+\sum_{|\alpha|=m}H_\mu(D^\alpha u),\ u\in C_\mu^m(\overline{G}).$$

$C_\mu^m(G)$（$C^m(G)$）记定义在 G 的这样的函数的全体，它们属于 $C_\mu^m(\overline{G}')$（$\in C^m(\overline{G}')$），其中 $G'\subset\overline{G}'\subset G$ 为任意，并且当 $u(x)\in C_\mu^m(G)$ 时，称 $u(x)$ 为在 G 内的 m 次 μ-Hölder 连续可微函数．

$C^\infty(G)$ 记在 G 内无限次连续可微函数的全体．$C_c^\infty(G)$（$C_c^m(G)$）记 $C^\infty(G)$（$C^m(G)$）中具有在 G 内紧支集的函数的全体．$\mathrm{Lip}_c(G)$ 记 $\mathrm{Lip}(G)$ 中具有在 G 内的紧支集的函数的全体．

称定义在 G 的函数 $\varphi(x)$ 具有在 G 内的紧支集，如果存在某个

$$G'_\varphi\subset\overline{G}'_\varphi\subset G$$

使

$$\varphi(x)=0,\qquad 当\ x\in G\setminus G'_{\varphi}.$$

区域 $G\subset E^n$ 称为是 Lipschtz 区域,如果对每一点 $x_0\in\partial G$,存在常数 $\nu,k>0$ 不依赖于 x_0,使得在 $B(x_0,\nu)$存在映象 $y=\Phi(x)$满足

$$k^{-1}|x_1-x_2|\leqslant|\Phi(x_1)-\Phi(x_2)|\leqslant k|x_1-x_2|,\tag{1.2}$$

映区域

$$\Omega=B(x_0,\nu)\cap G$$

为 E^n 中的某个区域Ω',后者以超平面$\{y^n=0\}$上的某个$(n-1)$维区域作为它的边界的一部分,并使得

$$\partial G\cap B(x_0,\nu)\ 和\ \partial\Omega'\cap\{y^n=0\}$$

之间建立起一一对应关系.

此外,若还有

$\Phi(x)\in C^1(\overline{B(x_0,\nu)})$并且$\|\Phi(x)\|_{C^1(\overline{B(x_0,\nu)})}\leqslant k$,

则称 G 为 C^1 类区域,简写 $G\in C^1$. 类似地,若

$$\Phi(x)\in C^m(\overline{B(x_0,\nu)})(或\in C^m_\mu(\overline{B(x_0,\nu)}))$$

并且

$$\|\Phi(x)\|_{C^m(\overline{B(x_0,\nu)})}\leqslant k(\|\Phi(x)\|_{C^m_\mu(\overline{B(x_0,\nu)})}\leqslant k),\tag{1.3}$$

那么称 G 为 C^m 类(C_μ 类)区域,记为 $G\in C^m(G\in C^m_\mu)$.

由有限覆盖定理,当 G 为有界 C^1 类区域时,G 可以为有限多个

$$B_i(x_i,\nu)\cap G=G_i,\ x_i\in G_i,\ i=1,2,\cdots,N$$

所覆盖.不仅如此,还可以认为

$$B_i(x_i,\frac{\nu}{2})\cap G=G'_i,\ i=1,2,\cdots,N$$

也同样覆盖了 G(这只需取 N 充分大即可),并且在每个 G_k 上,对应的映象 $\Phi(x)$ 都满足(1.3). 对于有界 $C^m(C^m_\mu)$类区域 G,类似的结果同样发生.

定理 1.1　设区域 $G\subset E^n$ 有界,定义在 $\overline{G}$ 上的函数 $\{f_n(x)\}$ 满足如下条件:

(i) $|f_n(x)|\leqslant K$(一致有界);

(ii) $|f_n(x)-f_n(y)|\leqslant\varepsilon(|x-y|)$, $x,y\in\overline{G}$(同等连续),

其中 $\varepsilon(\rho)\to0(\rho\to0)$ 且 K 和 $\varepsilon'(\rho)$ 均与 n 无关. 那么在 $\{f_n(x)\}$ 中有子列 $\{f_{n_i}(x)\}$ 在 $\overline{G}$ 一致收敛于某个定义在 $\overline{G}$ 的连续函数 $f(x)$.

证明　首先,由于假定了 $\{f_n(x)\}$ 在 $\overline{G}$ 一致有界,故对任何有限点集 $\{x_1,x_2,\cdots,x_N\}\subset\overline{G}$,可以找到子列 $\{f_{n_i}(x)\}\subset\{f_n(x)\}$,使对每一点 $x_k\in\{x_1,x_2,\cdots,x_N\}$, $\{f_{n_i}(x)\}$ 都收敛.

现设 $\rho_1>\rho_2>\cdots>\rho_n>\cdots$,并且 $\rho_n\to0(n\to\infty)$. 对每一个 ρ_i,确定有限点集

$$\{x_i^{(1)},x_i^{(2)},\cdots,x_i^{(N_i)}\}\subset\overline{G},$$

使得对任何 $x\in\overline{G}$,都至少有一个 $x_i^{(j)}$,使

$$|x_i^{(j)}-x|<\rho_i.$$

从而,可找到子列 $\{f_{n_1}(x)\}\subset\{f_n(x)\}$:

$$\{f_{n_1}(x)\}=\{f_{n_1}^{(1)}(x),f_{n_1}^{(2)}(x),\cdots\}$$

使在每一点 $x_1^{(j)}(j=1,2,\cdots,N_1)$ 收敛,同样可以在 $\{f_{n_1}(x)\}$ 中找到子列 $\{f_{n_2}(x)\}$:

$$\{f_{n_2}(x)\}=\{f_{n_2}^{(1)}(x),f_{n_2}^{(2)}(x),\cdots\}$$

使在每一点 $x_2^{(j)}(j=1,2,\cdots,N_2)$ 收敛. 类似地我们可以找到

$$\{f_n(x)\}\supset\{f_{n_1}(x)\}\supset\cdots\supset\{f_{n_k}(x)\}\supset\cdots,$$

其中

$$\{f_{n_k}(x)\}=\{f_{n_k}^{(1)}(x),f_{n_k}^{(2)}(x),\cdots\}$$

在每一点 $x_k^{(j)}(j=1,2,\cdots,N_k)$ 收敛. 然后选出对角线上的函数如下:

$$f_{n_1}^{(1)}(x),f_{n_2}^{(2)}(x),\cdots,f_{n_k}^{(k)}(x),\cdots.$$

显然后者包含在每一 $\{f_{n_k}(x)\}$ 中,从而在每一点 $x_k^{(j)}(j=1,2,\cdots,N_k,k=1,2,\cdots)$

收敛.

下证这样选出的子列在每一点 $x\in\overline{G}$ 收敛.

事实上,对任何 $x\in\overline{G}$,存在 $x_k^{(j)}$ 使

$$|x_k^{(j)}-x|<\rho_k.$$

于是由条件(ii)和函数 $f_{n_k}^{(k)}(x)$的选择,知

$$\begin{aligned}\left|f_{n_i}^{(i)}(x)-f_{n_l}^{(l)}(x)\right| &\leqslant \left|f_{n_i}^{(i)}(x)-f_{n_i}^{(i)}(x_k^{(j)})\right| \\ &\quad+\left|f_{n_i}^{(i)}(x_k^{(j)})-f_{n_l}^{(l)}(x_k^{(j)})\right|+\left|f_{n_l}^{(l)}(x_k^{(j)})-f_{n_l}^{(l)}(x)\right| \\ &\leqslant \varepsilon(\rho_k)+\varepsilon(i,l)+\varepsilon(\rho_k),\end{aligned}$$

其中

$$\varepsilon(i,l)\to 0,\text{当 } i,l\to\infty.$$

至于 $\varepsilon(\rho_k)\to 0$,则是由 $\rho_k\to 0$ 保证的.这隐含了 $f_{n_k}^{k}(x)$在 $\overline{G}$ 不仅处处收敛而且一致收敛.记极限函数为 $f(x)$,则后者在 $\overline{G}$ 连续.证毕.

由定理 1.1,在各自的范数下,对任何 $m\geqslant 0$ 和 $0<\mu\leqslant 1$, $C^m(\overline{G})$和 $C_\mu^m(\overline{G})$分别是 Banach 空间.

定理 1.2 设 $G\subset E^n$ 有界,$0<\alpha\leqslant 1$,那么 $C_\alpha(\overline{G})$中的有界集是任何 $C_{\alpha'}(\overline{G})$ $(0\leqslant\alpha'<\alpha)$中的紧集.

证明 设 $\mathscr{M}$ 为 $C_\alpha(\overline{G})$中的有界集,即

$$\|\varphi\|_{C_\alpha(\overline{G})}\leqslant M,\quad \varphi\in\mathscr{M}.$$

则由定义,对任何 $\varphi\in\mathscr{M}$,成立

$$\max_{x\in\overline{G}}|\varphi(x)|\leqslant M \text{ 和 } |\varphi(x)-\varphi(y)|\leqslant M|x-y|^\alpha,\ x,y\in\overline{G}.$$

显然满足定理 1.1 的两个条件.于是对任何$\{\varphi_m(x)\}\subset\mathscr{M}$,存在子列

$$\{\varphi_n(x)\}\subset\{\varphi_m(x)\}\subset\mathscr{M}$$

使得对一切 $x\in\overline{G}$,有

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\varphi_0(x),$$

并且收敛是一致的,极限函数同样属于 $C_\alpha(\overline{G})$,这可由对前述定理 1.1 的导出．不仅如此,对于 $\varphi_0(x)$还成立

$$\| \varphi_0(x) \|_{C_\alpha(\overline{G})} \leqslant M.$$

于是,当命

$$\Psi_n(x) = \varphi_n(x) - \varphi_0(x)$$

时,成立

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in\overline{G}} | \Psi_n(x) | = 0 \text{ 和 } \| \Psi_n(x) \|_{C_\alpha(\overline{G})} \leqslant 2M. \tag{1.4}$$

下证对任何 $0\leqslant\alpha' < \alpha$,有

$$\| \Psi_n(x) \|_{C_{\alpha'}(\overline{G})} \to 0 \ (n \to \infty) \tag{1.5}$$

事实上,由于一致收敛,对任意的 $\varepsilon > 0$,存在常数 $N(\varepsilon) > 0$,只要 $n > N(\varepsilon)$,就有

$$\begin{aligned} | \Psi_n(x) - \Psi_n(y) | &\leqslant 2 \max_{x\in\overline{G}} | \Psi_n(x) | < \varepsilon \\ &\leqslant \varepsilon^{1-\alpha'} | x - y |^{\alpha'}, \ x, y \in \overline{G} \text{ 且 } | x - y | > \varepsilon. \end{aligned} \tag{1.6}$$

至于$|x-y|\leqslant\varepsilon$ 的情形,根据式(1.4)成立

$$| \Psi_n(x) - \Psi_n(y) | \leqslant 2M | x - y |^{\alpha} \leqslant 2M\varepsilon^{\alpha-\alpha'} | x - y |^{\alpha'}. \tag{1.7}$$

(1.6),(1.7)一起隐含了(1.5),即

$$\| \varphi_n(x) - \varphi_0(x) \|_{C_{\alpha'}(\overline{G})} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

定理 1.2 获证．

比定理 1.2 更为一般的结果是

定理 1.3　设 G 有界,m, k 为整数,$0\leqslant\alpha, \alpha'\leqslant 1$. 若 $k + \alpha' < m + \alpha$,则 $C_\alpha^m(\overline{G})$中的有界集是 $C_{\alpha'}^k(\overline{G})$中的紧集．

证明从略．

第二章　$L_p(G)$空间

设 $G\subset E^n$ 是一开集，$p\geqslant 1$，$L_p(G)$记 G 中 p 次幂可和的可测函数的集合；$p=\infty$，$L_\infty(G)$记在 G 为有界的可测函数的集合．

1．Hölder 不等式

设

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1 \qquad (p>1,p'>1),$$

则对任何 $f(x)\in L_p(G)$和 $g(x)\in L_{p'}(G)$，成立

$$\left|\int_G f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\left(\int_G|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_G|g(x)|^{p'}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{2.1}$$

由于 Hölder 不等式，$f(x)\cdot g(x)$的可积性由(2.1)右端的积分的存在性保证．特别当 G 为有界时，$f(x)$在 G 的可积性由它的$L_p(G)$可积性导得．

为证明(2.1)，先证下面的不等式成立．

Young 不等式：对任何实数 $a,b\geqslant 0$，有

$$ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^{p'}}{p'}\quad\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,p>1,p'>1\right). \tag{2.2}$$

事实上，只要 a,b 中有一个等于0，那么 $ab=0$，因而(2.2)自然地满足．故只对 $a>0,b>0$ 的情形证明(2.2)即可．为此，置

$$\alpha=\frac{1}{p},\ 1-\alpha=\frac{1}{p'}.$$

由微分学中的定理易证

$$x^\alpha\leqslant\alpha(x-1)+1=\alpha x+(1-\alpha),\ 0<\alpha<1,x>0 \tag{2.3}$$

成立．特别当 $A,B>0$ 时，取 $x=\dfrac{A}{B}$，由(2.3)得

$$A^\alpha B^{1-\alpha}\leqslant\alpha A+(1-\alpha)B,$$

代入 $a=A^\alpha, b=B^{1-\alpha}$即得欲证的(2.2). 取

$$a=|f(x)|\left(\int_G|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{-\frac{1}{p}},\ b=|g(x)|\left(\int_G|g(x)|^{p'}\mathrm{d}x\right)^{-\frac{1}{p'}},$$

由(2.2)给出

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\left(\int_G|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_G|g(x)|^{p'}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p'}}}$$
$$\leqslant\frac{|f(x)|^p}{p\left(\int_G|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)}+\frac{|g(x)|^{p'}}{p'\left(\int_G|g(x)|^{p'}\mathrm{d}x\right)},$$

由于假定上式右端在 G 上的积分是存在的,从而左端亦然. 在 G 上积分上式两端,即得(2.1)式.

由归纳法,对任何 N 个函数$f_1(x),\cdots,f_N(x)$,若

$$\sum_{i=1}^N p_i^{-1}=1,\ p_i>1,$$

那么

$$\int_G|f_1(x)\cdots f_N(x)|\mathrm{d}x\leqslant\prod_{i=1}^N\left(\int_G|f_i(x)|^{p_i}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p_i}},\tag{2.1$'$}$$

其中惟一的要求是出现在(2.1)′右端的每一个积分都是有限的.

当 $f_1(x),\cdots,f_N(x)$等都只取有限个值时,那么积分由和来代替,于是由(2.1)′得

$$\sum_{i=1}^N a_1^{(i)}a_2^{(i)}\cdots a_k^{(i)}\leqslant\prod_{j=1}^k\left\{\sum_{i=1}^N|a_j^{(i)}|^{p_i}\right\}^{\frac{1}{p_i}}.$$

2. Minkowski 不等式

设 $p>1$,那么对任何 $f(x),g(x)\in L_p(G)$,成立

$$\left(\int_G|f(x)+g(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\int_G|f(x)^p\mathrm{d}x|\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_G|g(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.\tag{2.4}$$

证明 利用 Hölder 不等式,我们有

$$\left(\int_G |f(x)+g(x)|^p dx\right)$$

$$\leqslant \int_G |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)|dx+\int_G |f(x)+g(x)|^{p-1}|g(x)|dx$$

$$\leqslant \left(\int_G |f+g|^{(p-1)p'}dx\right)^{\frac{1}{p'}}\left\{\left(\int_G |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_G |g|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right\}$$

$$=\left(\int_G |f+g|^p dx\right)^{1-\frac{1}{p}}\left\{\left(\int_G |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_G |g|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right\},$$

此即为所证.

由归纳法,对任何 N 个函数 $f_1(x),\cdots,f_N(x)\in L_p(G)$, $p>1$,成立

$$\left(\int_G \left|\sum_{i=1}^N f_i(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant \sum_{i=1}^N\left(\int_G |f_i(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

对于级数成立

$$\left(\sum_i \left|\sum_j a_j^{(i)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant \sum_j\left\{\sum_i |a_j^{(i)}|^p\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

3. 现在在 $L_p(G)$ 中引进范数

$$\|f\|_{L_p(G)}=\left(\int_G |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}(p\geqslant 1). \tag{2.5}$$

由 Minkowski 不等式,当把 $L_p(G)$ 中几乎处处相等的函数视为相同的元素时, $\|f\|_{L_p(G)}$ 满足通常的范数公理:

(i) $\|f\|\geqslant 0$, $\|f\|=0$ 仅在 $f=0$($f(x)$ 等价于 0)时才是可能的;

(ii) 如果 C 是常数,则

$$\|Cf(x)\|=|C|\ \|f(x)\|;$$

(iii) $\|f+g\|\leqslant\|f\|+\|g\|$.

下证在范数(2.5)下, $L_p(G)$ 空备,也即为 Banach 空间,仍记为 $L_p(G)$.

设 $\{f_n(x)\}\subset L_p(G)$, $p\geqslant 1$ 是 Cauchy 列,即满足

$$\|f_n - f_m\| \to 0 \qquad (n,m \to \infty), \tag{2.6}$$

只需证明存在 $f(x) \in L_p(G)$,使

$$\|f_n - f\|_{L_p(G)} \to 0 \qquad (n \to \infty). \tag{2.7}$$

为此,首先注意对任何实数 A,B 和任何正数$\lambda > 0$,成立

$$\left| |A|^\lambda - |B|^\lambda \right| \leqslant \lambda |A - B| \{|A|^{\lambda-1} + |B|^{\lambda-1}\}. \tag{2.8}$$

事实上,设 $a > b > 0$ 为任意,由微分中值定理知,存在 $\theta \in (0,1)$,使

$$\frac{a^\lambda - b^\lambda}{a - b} = \lambda[b + \theta(a - b)]^{\lambda-1}.$$

从而

$$\frac{a^\lambda - b^\lambda}{a - b} \leqslant \begin{cases} \lambda a^{\lambda-1}, & 当\ \lambda > 1 \\ \lambda b^{\lambda-1}, & 当\ \lambda < 1. \end{cases}$$

因此,当 $a \neq b$ 时,总有

$$\frac{a^\lambda - b^\lambda}{a - b} \leqslant \lambda(a^{\lambda-1} + b^{\lambda-1}).$$

令

$$a = |A|, \ b = |B|.$$

则由于

$$|a - b| \leqslant |A - B|.$$

即知式(2.8)成立.

设 $\chi_1(x), \chi_2(x) \in L_p(G)$,则由(2.8)知

$$\int_G \left| |\chi_1(x)|^p - |\chi_2(x)|^p \right| dx$$

$$\leqslant p\int_G |\chi_1(x) - \chi_2(x)| [|\chi_1(x)|^{p-1} + |\chi_2(x)|^{p-1}] dx$$

如果 $p>1$,那么由于 Hölder 不等式,继续有

$$\left|\int_G |\chi_1(x)|^p \mathrm{d}x - \int_G |\chi_2(x)|^p \mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant p\left(\int_G |\chi_1(x)-\chi_2(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\left(\int_G |\chi_1(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}} + \left(\int_G |\chi_2(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}}\right\}. \tag{2.9}$$

又由于

$$|A+B|^p \leqslant 2^{p-1}\{|A|^p + |B|^p\},\ p \geqslant 1,$$
$$|A+B| \leqslant |A| + |B|,$$

得

$$\int_G |\chi_1(x)-\chi(x)|^p \mathrm{d}x \leqslant C_p\left(\int_G |\chi_1(x)|^p \mathrm{d}x + \int_G |\chi_2(x)|^p \mathrm{d}x\right), \tag{2.10}$$

其中

$$C^p = 2^{p-1}, \text{当 } p>1;\ C_p = 1, \quad \text{当 } p = 1.$$

由于(2.6),对任何预给的正数 $\varepsilon>0$,存在常数 $N(\varepsilon)>0$,使得 $n,m \geqslant N(\varepsilon)$ 时,成立

$$\int_G |f_n(x)-f_m(x)|^p \mathrm{d}x \leqslant \varepsilon^{p+1},$$

即

$$\mathrm{mes}(\{x \,|\, |f_n(x)-f_m(x)| \geqslant \varepsilon\} \cap G) \leqslant \varepsilon.$$

现设 $\eta>0$ 为任意,那么当分别取

$$\varepsilon = \varepsilon_\nu = 2^{-\nu}\eta$$
$$n_{\nu+1} > n_\nu \geqslant N(2^{-\nu}\eta),\ \nu = 1,2,\cdots$$

时,存在可测子集 $E_\eta \subset G$,使对任何

$$x \in G \setminus E_\eta.$$

同时,有

$$| f_{n_\nu}(x) - f_{n_{\nu+1}}(x) | < 2^{-\nu}\eta,\ \nu = 1,2,\cdots.$$

容易知道,E_η 的测度

$$\mathrm{mes} E_\eta \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-\nu}\eta = \eta.$$

设 $H \subset G$ 为任何有有限测度的可测子集(在 $\mathrm{mes} G < \infty$ 的情形,H 可以取作 G),那么,对任何固定的整数 k,存在一个可测子集 $H_1 \subset H$,使

$$\mathrm{mes} H_1 \geqslant \mathrm{mes} H - 2^{1-k}\eta.$$

并且在 H_1 上对于所有的 $\nu \geqslant k$,都有

$$| f_{n_\nu}(x) - f_{n_{\nu+1}}(x) | < 2^{-\nu}\eta.$$

于是对任何 $\tau > k$,只需 μ,ν 充分大,即有

$$| f_{n_\nu}(x) - f_{n_\mu}(x) | < 2^{-\tau}\eta,\ 对所有\ x \in H_1.$$

这隐含了在 H_1 上,$f_{n_\nu}(x)$一致收敛 . 由于 k 可以任意大,于是 $f_{n_\nu}(x)$首先在 H 几乎处处收敛,然后由于 $H \subset G$ 的任意性,$f_{n_\nu}(x)$同样在 G 几乎处处收敛 . 函数 $f(x)$作为函数列 $f_{n_\nu}(x)$在 G 的(几乎处处收敛的)极限函数,在 G 几乎处处有定义,并且若不区别等价函数类的话它还是惟一的 .

下证$|f(x)|^p$ 在G 的可和性 . 为此,首先注意,由于(2.6)和(2.10),当 N 取得充分大时,就有

$$\begin{aligned}\int_G | f_n(x) |^p \mathrm{d}x &< C_p \int_G | f_N(x) |^p \mathrm{d}x + C_p \int_G | f_n(x) - f_N(x) |^p \mathrm{d}x \\ &\leqslant C_p \int_G | f_N(x) |^p \mathrm{d}x + C_p \varepsilon,\ n > N.\end{aligned}$$

这隐含了$\int_G |f_n(x)|^p dx$关于n为有界,从而由式(2.9),当$p>1$时,有

$$\begin{aligned}&\left|\int_G(|f_n(x)|^p-|f_m(x)|^p)dx\right|\\ &\leqslant p\left(\int_G|f_n(x)-f_m(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\left(\int_G|f_n(x)|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\right.\\ &\quad\left.+\left(\int_G|f_m(x)|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\right\}\to 0,n,m\to\infty.\end{aligned}\tag{2.11}$$

而当$p=1$时,则由于

$$\int_G|f_n(x)|dx\leqslant\int_G|f_m(x)|dx+\int_G|f_n(x)-f_m(x)|dx.$$

同样有($p=1$)

$$\int_G\Big||f_n(x)|^p-|f_m(x)|^p\Big|dx\leqslant\int_G|f_n(x)-f_m(x)|^p dx\to 0,n,m\to\infty.\tag{2.11$'$}$$

对任何有有限测度的可测子集$H\subset G$和任何预给的正数$\eta,\eta_1>0$,如前所证,存在可测子集$H_1\subset H$,使

$$\mathrm{mes}H_1>\mathrm{mes}H-\eta,\tag{2.12}$$

且在H_1上成立(由于$f_{n_\nu}(x)$在H_1上一致收敛于$f(x)$)

$$|f(x)-f_{n_\nu}(x)|<\eta,\quad 当\ \nu\ 充分大.\tag{2.13}$$

因为$f_{n_\nu}(x)$在H_1可和,并且(2.13)显然隐含了

$$|f(x)|<|f_{n_\nu}(x)|+\eta,\ x\in H_1,\nu\ 充分大.$$

于是有

$$\begin{aligned}&\int_{H_1}|f(x)|^p dx\leqslant\int_{H_1}[|f_{n_\nu}(x)|+\eta]^p dx\\ &\leqslant C_p\int_G|f_{n_\nu}(x)|^p dx+C_p\eta^p\mathrm{mes}H<+\infty\quad(p\geqslant 1),\end{aligned}\tag{2.14}$$