教育科学“十五”国家规划课题研究成果

高等学校经济管理学科数学基础教材

高等数学 上册

徐文雄 主编

赵仪娜 魏平 李换琴 李萍 刘晋平 合编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

教育科学"十五"国家规划课题研究成果
高等学校经济管理学科数学基础教材

高等数学

上　　册

徐文雄　主编

赵仪娜　魏　平　李换琴　李　萍　刘晋平　合编

高等教育出版社

内容提要

本书是教育科学"十五"国家规划课题"21世纪中国高等学校经济管理类数学课程教学内容和课程体系的创新与实践"课题项目成果之一，针对经济管理类学科人才培养总体要求和学科特点，按照教育部高等学校非数学专业数学课程教学指导委员会《经济管理类高等数学课程教学基本要求》编写而成.

本书是《高等数学》的上册，内容包括：函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用和无穷级数. 除一般高等数学教学基本内容之外，增加了微积分在经济与管理科学中的应用，介绍了许多具有专业特点的应用实例、数学概念和数学模型. 每章末配有典型问题解析(含历届考研典型题)、练习题(A)(基本题)、练习题(B)(提高题)及习题参考答案等，供师生在教学中采用.

本书可作为高等学校经济管理类专业学生高等数学教材或教学参考书，也可供其他专业学生和报考硕士研究生的考生参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册/徐文雄主编.—北京：高等教育出版社，2004.6

ISBN 7-04-014383-6

Ⅰ.高... Ⅱ.徐... Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第020899号

策划编辑 马 丽 **责任编辑** 高尚华 **封面设计** 王凌波
责任绘图 宗小梅 **版式设计** 王 莹 **责任校对** 康晓燕
责任印制 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www hep.edu.cn
总 机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷	北京市白帆印务有限公司		
开 本	787×960 1/16	版 次	2004年6月第1版
印 张	18.5	印 次	2004年6月第1次印刷
字 数	340 000	定 价	19.60元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换.

总 序

在社会科学中,数学的首要应用领域无疑是经济学。马克思认为,一门学科成熟与否的标志就是看其对数学的应用程度。经济学在上世纪飞速发展,其数学工具、模型的应用越来越广泛和深入,这是不可置疑的进步。随着中国加入WTO,经济全球化进程加快和知识经济时代的到来,培养经济学、管理学与数学相结合的复合型人才成为一种大趋势。为了探索和建立我国高等学校经济管理类数学课程教学内容和课程体系,全国高等学校教学研究中心(以下简称"教研中心")在承担全国教育科学"十五"国家规划课题——"21世纪中国高等教育人才培养体系的创新与实践"研究工作的基础上,决定组织高等学校经济管理专业开展其子项目课题——"21世纪中国高等学校经济管理类数学课程教学内容和课程体系的创新与实践"的研究与探索,以进一步推动和促进高等学校经济管理类数学课程建设。本课题的建设目标是:紧密配合教育部已经启动的"高等学校教学质量与教学改革工程精品课程建设工作",在经济管理类数学课程教学内容、课程体系和教材建设已经取得的成果基础上,在建设经济管理类专业的校、省、国家三级精品课程的过程中,集中力量,深入探索,在现代教育技术平台上建成适应经济管理类专业创新人才培养需要的数学课程体系和立体化教材体系。本项目得到了高等教育出版社的大力支持与配合,即将推出一批适应经济管理类数学课程需要的立体化教材,并冠以"教育科学'十五'国家规划课题研究成果"。

在项目的研究过程中,我们始终紧紧围绕着以上建设目标,从经济管理数学教学现状的调查研究与分析入手,不断拓宽专业视野,加强应用和实践的环节,力图在整个项目研究过程中,体现以下几点鲜明特色:

(1) 树立科学的发展观,在继承的基础上不断超越

经济数学,即在经济中应用的数学,是经济学与数学相互交叉的一个跨学科的领域。整体项目的研究工作以经管类数学基础课程如何适应现在及未来的经济学、管理学的发展为切入点,全面而深入地进行课程体系和教学内容探索与研究。即在消化与吸收多年来已有的成果基础上,努力实践,大胆创新,要随着经管学科的发展而不断与其融合,真正体现其应用性,这是项目研究工作的基石。

(2) 以项目研究为先导,为高校教学改革服务

随着我国高等教育的发展和高校教学改革的不断深入,特别是随着教育部"高等学校教学质量和教学改革工程"的启动和实施,建设一批具有示范性和适

应性的经管数学精品课程教材已经成为一种迫切的要求，而这些工作需要通过深入的研究和探索作为支撑。2003 年 8 月，在西安召开的高等学校非数学类专业数学课程教学基本要求研讨会上，经管项目小组成员集中讨论了在当前经管专业不断扩招的新形势下，应该如何制定与经管类专业数学教学相适应的基本要求。并对《经济管理类数学课程教学基本要求(初稿)》提出了很多具有建设性的意见和构想。目前修改稿在全国范围内征求意见。2003 年 12 月，国内七所财经类院校(中央财经大学、上海财经大学、对外经济贸易大学、南京财经大学、东北财经大学、山西财经大学、中南财经政法大学)的专家学者齐聚北京，在深入分析现阶段我国对经济管理类人才需求，并在广泛征求一线教师的意见基础上，根据《经济管理类数学课程教学基本要求》修改稿着手编写一套具有先进性、适用性、示范性和系统性的精品教材，为各高校进行相关专业课程体系和教学内容的设计与改革提供参考。

(3) 注重学科的交叉融合，建设立体化资源体系

经管类数学基础课程应重视数学、计算机技术与经济管理学的交叉结合，充分利用各个学校经济学和管理学的资源优势，强调基本概念的阐述，简化理论推导，反映科学技术的发展水平，突出学生的个性发展。经管类数学基础课程教材及教学资源的建设在项目研究的基础上，不断研制和开发系列教材相关配套教学资源，即注重配套的教学参考书、学习指导书、电子教案、多媒体课件、网络课程等的研发，鼓励先进的教学方法和手段特别是信息技术的应用。

(4) 进行分类指导，建设交流共享平台

如今，知识结构完整、适应性强、动手能力强的经济管理复合型人才越来越受到欢迎，同时，对经济管理人才需求的层次化和多样性也带来了高等院校经管专业定位的层次化和多样性，因此需要通过研究对各高校的经管专业进行分类指导。此外，还要为广大的教师搭建一个交流共享的平台，强调师资培训的重要性，将通过各种层面和形式的示范交流与师资培训，帮助广大一线教师提高教学水平，促进先进教学经验和优秀教学资源的交流与推广，帮助各高校加快课程体系和教学内容更新的步伐。

在新的世纪，经济管理类数学基础课程改革将不断培养出满足市场需求的人才，寻找自身的新定位，项目研究也将在对国内外经济管理类专业数学教学内容和课程体系进行深入研究的基础上，吸取各项教改成果，从而快速有效地建立起一个高水平的学习环境，为建立具有中国特色的适应 21 世纪人才培养需要的经管数学教材和全国提高经管数学教学质量而不懈努力。

全国高等学校教学研究中心

2003 年 4 月

序　言

随着现代科学技术的发展,数学的重要地位显得日益突出。数学已不仅是一种工具,而且是一种理性思维模式;不仅是一种知识,也是一种科学素养。如何通过数学的学习,在加强各类学科中必要素养的同时,努力提高在相关学科中应用数学的能力?这是当前教学改革中的一个重要课题。西安交通大学以徐文雄教授为首的《高等教学》教材编写组,参与了教育科学"十五"国家规划课题"21世纪中国高等学校经济管理类数学课程教学内容和课程体系的创新与实践"项目的研究和实践,结合经济管理类学科人才培养总体要求和学科特点,在这方面作了积极的探索和教学实践。本书是他们改革结果的结晶,除了一般高等数学教学基本内容之外,增加了微积分在经济与管理科学中的应用,介绍了诸如需求函数、收入函数、成本与利润函数、损益平衡分析、盈利对比分析、边际与弹性、管理与经济中的差分方程等具有专业特点的数学概念、数学模型和应用实例。每章末配备有典型问题解析可供学生课外自学阅读参考,也可供教师上课选用,对读者复习巩固所学知识,提高综合应用能力颇有益处。练习题分(A)、(B)两个层次配备,可供不同程度的学生选作,有利于因材施教。相信该书的出版必能更加符合高等学校经济与管理类数学课程的教学需要,促进经济与管理类数学课程的教学与教学改革。

西安交通大学　马知恩

2004 年 4 月 2 日

前　言

本教材在西安交通大学徐文雄主编《高等数学(经济管理类)》讲义基础上,针对经济管理类学科人才培养总体要求和学科特点,参照教育部高等学校非数学专业数学课程教学指导委员会《经济管理类高等数学课程教学基本要求》编写而成,内容包括:一元函数微积分,多元函数微积分,无穷级数,常微分方程,差分方程初步.除一般高等数学教学基本内容之外,增加了微积分在经济与管理科学中的应用,介绍了诸如需求函数、收入函数、成本与利润函数、损益平衡分析、盈利对比分析、边际与弹性及管理与经济中的差分方程模型等具有专业特点的应用实例、数学概念和数学模型.可作为高等学校经济管理类专业学生的高等数学教材或教学参考书,也可供其他专业学生和报考硕士研究生的考生参考.

该书初稿曾经在校内有关专业使用两届,讲授基本内容所需课内学时大约在 140～150 学时左右.每章末配备的典型问题解析(含历届考研典型题),可供学生课外阅读参考,也可供教师上课选用,对提高实际教学质量很有益处,很受师生欢迎.练习题分(A)、(B)两个层次配备,习题(A)为基本题,习题(B)为综合提高题,可供不同程度的学生选做,有利于因材施教,分流培养.书末还附有全部习题的参考答案或提示,供师生在教学中参考.

参加本书编写的有徐文雄、赵仪娜、魏平、李换琴、李萍、刘晋平,全书由徐文雄统稿主编.书稿在编写过程中得到有关组织和专家的大力支持和悉心指点,深表谢意.编者首先要感谢张可村教授、常争鸣副教授、张娟博士、乔亚梅讲师,他们使用了该书的讲义,提出许多珍贵意见.非常感谢首届国家级教学名师、原全国高等学校工科数学课程教学指导委员会主任、西安交通大学博士生导师马知恩教授的关怀和教诲.我们要特别感谢本书的主审专家、陕西省大学数学教学委员会主任、西北工业大学博士生导师叶正麟教授,他花费了大量的时间,对书稿进行了非常认真细致的审查,提出了许多宝贵的意见和建议.

编　者

2003 年 12 月于西安交通大学

目　录

第一章　函数与极限

第二章　导数与微分

第三章　微分中值定理与导数的应用

第四章　不定积分

第五章 定积分及其应用

第六章 无穷级数

第一章

函数与极限

函数是高等数学最重要的基本概念之一,也是微积分学研究的主要对象.它反映了变量与变量之间的相互依赖关系,在现实世界中有着广泛的应用背景.极限是深入研究函数和解决各种理论与实际问题的一个重要工具,是微积分学的基本概念之一.与之紧密联系在一起的是函数的连续性.本章将介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念,以及它们的一些性质.

第一节 函 数

一、集合

1. 集合及其运算

所谓集合 S,是指具有某种确定性质的对象的全体,集合 S 中的每一个体 a 称为 S 的元素.如果 a 是 S 的一个元素,记为 $a\in S$,读作"a 属于 S";如果 a 不是 S 的元素,则记为 $a\notin S$,读作"a 不属于 S".

习惯上,用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合,用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素.含有有限个元素的集合称为有限集;不含任何元素的集合称为空集,记作 $\varnothing$;不是有限集的集合称为无限集.

例 1 由下列元素:

$$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$$

组成的集合,我们可以将其表示成

$$S=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}.$$

这种表示集合的方法,是将集合 S 中的所有元素都列举出来,称为**列举法**.

事实上,该集合 S 也可以用下面的方式表示:

$$S=\{n\mid n\text{ 是小于 10 的非负整数}\}.$$

在这里我们用一个命题:"n 是小于 10 的非负整数"来描述集合 S 中所有

元素 n 的属性，这种表示集合的方法，称为**描述法**.

描述法是一种很常用的方法.我们通常用$\{x \mid p(x)\}$表示所有满足命题$p(x)$的实数组成的集合.例如$\{x \mid x^2+1=2\}$表示所有满足等式 $x^2+1=2$ 的实数 x 构成的集合；$[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$表示所有满足不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的实数 x 构成的集合.

习惯上，全体非负整数即自然数的集合记作 $\mathbf{N}$，即

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\};$$

全体正整数的集合记作 $\mathbf{N}_+$，即

$$\mathbf{N}_+=\{1,2,\cdots,n,\cdots\};$$

全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$，即

$$\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\};$$

全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$，即

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\,\middle|\,p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N}_+\text{ 且 }p\text{ 与 }q\text{ 互质}\right\};$$

全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$，全体正实数的集合记作 $\mathbf{R}_+$.

一般地，如果集合 A 中的所有元素都属于集合 B，则称 A 包含于 B 或 B 包含 A，并且记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$.

当 $A\subseteq B$ 时，称 A 是 B 的一个**子集**.如果集合 A 与集合 B 互为子集，则称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$.若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则称集合 A 是集合 B 的**真子集**，记作 $A\subsetneqq B$.

对任何集合 A，规定 $\varnothing\subseteq A$.显然 $A\subseteq A$，$\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Z}\subseteq\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{R}$.

集合的基本运算有三种：并、交、差.

设 A，B 是两个集合，由这两个集合中的所有元素组成的集合称为 A 和 B 的并集，记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x \mid x\in A\text{ 或 }x\in B\};$$

由 A 和 B 的所有公共元素构成的集合称为 A 和 B 的交集，记作 $A\cap B$.即

$$A\cap B=\{x \mid x\in A\text{ 且 }x\in B\};$$

由属于 A 但不属于 B 的元素构成的集合，称为 A 与 B 的差集，记作 $A\setminus B$，即

$$A\setminus B=\{x \mid x\in A\text{ 但 }x\notin B\}.$$

例如，

$$\{1,2,3,4,5\}\cup\{1,3,5,7,9\}=\{1,2,3,4,5,7,9\};$$
$$\{1,2,3,4,5\}\cap\{1,3,5,7,9\}=\{1,3,5\};$$
$$\{1,2,3,4,5\}\setminus\{1,3,5,7,9\}=\{2,4\}.$$

两个集合的并、交、差可以用图形直观表示(图 1－1 中的阴影部分).

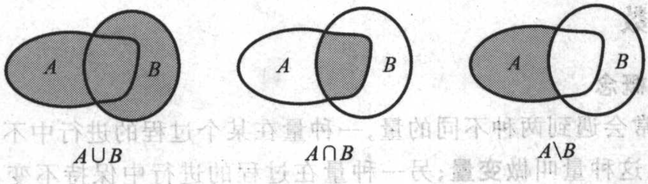

图 1－1

2. 区间和邻域

今后我们经常考虑实数集 **R** 的子集. 常见的区间有:

开区间 $(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$;

闭区间 $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$;

半开半闭区间 $[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$, $(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$;

无穷区间 $[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$, $(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$, $(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$.

这里需要说明的一点是, $+\infty$, $-\infty$ 以及 ∞ 只是一种符号, 而不是数, 因而不能参与实数的四则运算.

设 A 为一个非空集合, 如果存在正数 M, 使得对于所有的 $x\in A$, 都有 $|x|\leqslant M$, 则称 A 为**有界集**. 集合 A 中如果有最大的数 b, 则称 b 为 A 的**最大值**. A 的最大值记作 $\max A$. 集合 A 中如果有最小的数 c, 则称 c 为 A 的**最小值**. A 的最小值记作 $\min A$.

例如, 闭区间 $[0,1]$ 和开区间 $(0,1)$ 都是有界集. 闭区间 $[0,1]$ 的最小值和最大值分别是 0 和 1, 而开区间 $(0,1)$ 既无最大值, 也无最小值. 这说明, 有界数集未必有最大值和最小值.

今后经常提到"邻域"这样一个术语. 设 δ 是任意一个正数, 集合 $\{x\mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$ 称为点 x_0 的一个**邻域**, 记作 $U(x_0,\delta)$, 即

$$U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta).$$

如果在邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 中除去点 x_0, 则得到集合 $\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}$, 称这个集合为 x_0 的一空心邻域或称为**去心邻域**, 记作 $\mathring{U}(x_0,\delta)$. 即

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta).$$

为了方便, 有时把开区间 $(x_0-\delta,x_0)$ 称为 x_0 的左 δ 邻域, 把开区间 $(x_0,x_0+\delta)$ 称为 x_0 的右 δ 邻域.

有时也用 $U(x_0)$ 和 $\mathring{U}(x_0)$ 分别表示 x_0 的邻域和去心邻域.

二、函数

1. 函数概念

我们经常会遇到两种不同的量，一种量在某个过程的进行中不断变化，可取不同的数值，这种量叫做**变量**；另一种量在过程的进行中保持不变，或相对保持不变，从而可以看作是一个固定的值，这种量叫做**常量**.

在一个具体的变化过程中，变量总有它的取值范围，称为变域，而且在同一变化过程中，所涉及的各个变量之间总是相互联系、相互依赖的. 例如，在真空中自由下落的物体，经过的路程 s 随时间 t 不断变化，它们之间有如下依赖关系：

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 是重力加速度，变量 t 的变域是从开始时刻（设 $t=0$）到运动结束时刻（设 $t=t_1$）的一个区间 $[0,t_1]$. 对于变域 $[0,t_1]$ 上的任一个值 t_0，根据上述关系，就有相应的路程

$$s_0=\frac{1}{2}gt_0^2$$

与其对应. 函数概念就是这种变量间对应关系的抽象和概括.

函数定义 设有两个变量 x 和 y，如果对于 x 在其变域内取得的每一个值，y 按照确定的法则有惟一确定的值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x),$$

其中 x 叫做**自变量**，y 叫做**因变量**，自变量 x 的这个变域叫做函数 f 的**定义域**，函数 f 的定义域用 $D(f)$ 表示，当变域是一个区间时叫做**定义区间**. 对于定义域中自变量 x 的每个值，因变量 y 的对应值的全体叫做函数的**值域**，f 的值域记作 $R(f)$，y 与 x 之间的这种对应关系就叫做**函数关系**.

函数定义包含两个独立要素：一是函数的定义域，二是因变量与自变量的对应法则.

在实际问题中，函数的定义域是根据函数的实际意义来确定的. 例如，从上述自由落体运动的规律 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 来看，并不是对任意的 t，都可以确定 s 的值，只有在物体开始下落（设 $t=0$）到运动结束（设 $t=t_1$）这段时间时，上述式子才有意义，也就是说 s 作为 t 的函数，只有当 t 在区间 $[0,t_1]$ 上取值时才有意义. 可见，定义域是函数定义中的一个重要因素. 当我们提到一个函数时，一般应该指明它的定义域. 当我们讨论仅由数学式子表示的函数而不考虑它的实际意义时，它的定义域是指：使这个数学式子有意义的自变量的取值范围. 例如，如果我们不考虑函数

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

的实际意义,那么这个函数定义域应为无穷区间$(-\infty,+\infty)$.

例 2 求函数 $y=\frac{2}{\sqrt{x^2-3x-10}}$的定义域.

解 要使函数有意义,x 应满足

$$x^2-3x-10=(x-5)(x+2)>0,$$

解此不等式,得 $x>5$ 或 $x<-2$,这就是函数的定义域,写成区间的形式是开区间$(-\infty,-2)\cup(5,+\infty)$.

我们经常用三种形式表示函数的对应法则.一种是用数学公式表示,叫**公式法**,如 $s=\frac{1}{2}gt^2$,$y=\sqrt{x}$等,这种数学公式被称为解析表达式;一种是用图形表示,叫做**图形法**,如自动记录的温度曲线等;再一种是用表格表示,叫做**列表法**,如三角函数表、对数表等.无论它们的表示方法如何不同,其共同的本质是刻画因变量与自变量之间的对应关系.

对于函数 $y=f(x)$,当自变量 x 在定义域内取定一值 x_0时,根据对应法则 $y=f(x)$所求得的因变量 y 的值 $y_0=f(x_0)$,就叫做当 $x=x_0$时(或在 $x=x_0$ 处)的**函数值**,记作

$$y_0=y|_{x=x_0}=f(x)|_{x=x_0}.$$

例 3 求函数 $y=x^2-3x+5$ 在 $x=2,x=x_0+1,x=x_0+h$ 各点处的函数值.

解 $$y|_{x=2}=2^2-3\times2+5=3.$$

如果用 $y=f(x)$表示函数 $y=x^2-3x+5$,那么

$$f(x)=x^2-3x+5,$$

于是在 $x=2$ 处的函数值为 $f(2)$,即

$$f(2)=2^2-3\times2+5=3.$$

同样 $$f(x_0+1)=(x_0+1)^2-3(x_0+1)+5=x_0^2-x_0+3,$$

$$f(x_0+h)=(x_0+h)^2-3(x_0+h)+5=x_0^2+(2h-3)x_0+(h^2-3h+5).$$

例 4 求函数 $q(\tau)=\begin{cases}0.5\tau+5, & -10\leqslant\tau<0,\\ \tau+85, & 0\leqslant\tau\leqslant10\end{cases}$ 在 $\tau=-4,\tau=5$ 处的函数值.

解 这是一个所谓的分段函数.其函数值

$$q(-4)=0.5\times(-4)+5=3,$$

$$q(5)=5+85=90.$$

如果一个函数的定义域及对应法则已经确定,那么函数在各点处的函数值