数学符号史话

孙兴运\编著

sinA

cosA

tgA

secA

cosA

ctgA

secA

$y=f(x)$

$\frac{c}{d}$ $\frac{a}{c}$ $\frac{a}{b}$

山东教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学符号史话/孙兴运编著.

济南：山东教育出版社，1998.9

ISBN 7－5328－2780－1

Ⅰ.数… Ⅱ.孙… Ⅲ.数学-符号-历史 Ⅳ.01-091

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 14810 号

数学符号史话

孙兴运 编著

出版发行： 山东教育出版社

地　　址： 济南市经八纬一路 321 号

出版日期： 1998 年 9 月第 1 版

1998 年 9 月第 1 次印刷

印　　数： 1—5000

用纸规格： 787 毫米×1092 毫米 32 开

4.625 印张　　97 千字

制版印刷： 山东新华印刷厂潍坊厂

书　　号： ISBN 7—5328—2780—1/G·2536

定　　价： 4.40 元

内容提要

数学符号是数学概念的代表。本书选取了中小学数学中常见的数学符号，对这些符号产生和发展的历史及其应用，作了简要的介绍。内容丰富，层次清楚，叙述通俗。本书可作为广大青少年的课外读物，用以开阔眼界，提高分析问题和解决问题的能力，增强对数学的爱好和兴趣。

写在前面

我们在学习和应用数学的时候，都会感到有一套得心应手的数学符号是多么重要。各种各样的数学符号错综复杂地交织在一起，构成了数学世界中一幅宏大而绚丽的图画。但是，你可知道这些形形色色的符号产生和发展的历史吗？

数学符号体系出现在16世纪，通行于18世纪。在此以前的各国数学家们，也都多少意识到数学需要一种新的表述方法，有的引用特殊的字眼、缩写，有的用数字符号来改革数学的书写方式，但那时没有引起人们的足够重视。直到15、16世纪，科学和数学自身的发展有了采用符号需要的时候，数学符号体系也就应运而生了。

纵观世界数学史，可以看出，数学符号的使用极大地推动了数学的发展。有人把17世纪叫做数学的天才时期，把18世纪叫做发展时期。这两个世纪数学之所以取得了较大的成就，原因之一就是大量创造和使用了数学符号。

严整的符号体系，独特的公式语言是数学区别于其他学科的一个重要特征。它不仅简化和丰富了数学理论的表达方式，尤其重要的是，只有在准确而严整的符号体系下，才能使运算成为可能。德国数学家克莱因曾说：“如果没有专门的符号和公式，简直就不可能有现代数学。”

数学符号的种类繁多，它包括数字符号、运算符号、关系符号、性质符号、象形符号等。到目前为止，数学中常见

的符号有两百多种，其中，中小学常用的符号有一百多种。这些符号有机地结合在一起，构成了内涵深刻、丰富、简明的数学语言，成为“数学王国”里统一规定的文字。

本书选取了中小学数学中常见的八十多个数学符号，对这些符号产生和发展的过程，作了简要的介绍。这对于帮助读者了解数学符号的演变过程，激发学习数学的兴趣，将是大有裨益的。

目　录

1, 2, …, 9, 0　阿拉伯数字号

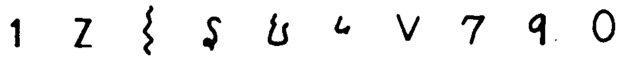
从遥远的古代起，人们为了表示物品的多少或相互之间的关系,就有了“数”的概念,并创造了表达数的符号。我国在三千多年前的商代遗留下来的甲骨文中，就有刻在甲骨和陶器上的数字,比如用“”代表 5,“”代表 8 等。

大约在一千五百年前，印度人已采用了一套特殊的符号表示数，而且非常简单，这些印度数字总共十个：

后来，由于东西方往来做生意的多了，印度数字由商人传入了西班牙。

到了公元 8 世纪时，阿拉伯帝国进入强盛时期，掌握了东西邻国的先进文化。阿拉伯人于巴格达建立伊斯兰教庭，首都巴格达越来越繁荣，科学文化得到了蓬勃的发展，被称为“世界文明的首都”。当时西班牙和阿拉伯发生了战争，伊斯兰教徒西征，侵占了埃及和西班牙等地。占领了西班牙的阿拉伯人，看到印度数字很简单，就把它们学了回去。后来有一个阿拉伯学者，名叫哈瓦尔扎米，他领会了印度数字的技巧，写了一本算术书，进一步介绍了印度数字的使用方法。由于当时东西方往来频繁，哈瓦尔扎米的数学著作被译成了拉丁文，慢慢地传到了欧洲各地。在公元 10 世纪时，

欧洲出现的阿拉伯数字是这样的：



这时已使用“0”的符号了。

从另一方面说，中世纪西欧经济开始繁荣，西方商人到东方经商的越来越多。意大利有个商人数学家斐波那契，幼年跟他的父亲在非洲北部蒲其亚地方，曾受过当地伊斯兰学校的教育。青年时又旅行到地中海各地，熟悉各种商业算术。他认为应用印度数字最为方便，于 1202 年写成了一本《算法书》，详细论述了应用“十进位记数法”的优越性。斐波那契的书不同于前一世纪的各个翻译本，他针对当时商业社会的迫切需要，介绍了合适的算法，引起了算术课程的革新运动。此后，印度数字便普及于意大利等城市。由于在使用中不断改进，到了 14 世纪时，欧洲通用的数字已演变得和现在差不多了：

现在通用的数字是：

1　2　3　4　5　6　7　8　9　0

这十个数字，叫做阿拉伯数字。因为它实际上是印度人创造的，数学史工作者叫做印度—阿拉伯数字。

用阿拉伯数字记数时，比 9 大 1 的数用“10”表示，以后是 11，12，…，19，比 19 大 1 的数用“20”表示，再以后是 21，22，…，29，比 29 大 1 的数用“30”表示……这

种记数法叫做十进位制记数法。一组包括零号在内的十个符号可以用来记录一切自然数，这是数学史上无与伦比的光辉成就。恩格斯非常推崇这种记数法，把它称为“现代的数字”。法国数学家拉普拉斯关于这件事也写道：“用很少的几个符号来表示一切的数目，使符号除了具有形状意义外，还具有数位的意义。这一思想如此自然，如此使人容易理解，简直无法估计它的奇妙程度。”

由于阿拉伯数字比中国数字，罗马数字等符号都简单易学，因此它很快地被传播开来，到今天已通行于全世界了。

0 零号

在阿拉伯数字中，没有哪一个数字比“0”更奇特了。然而，如此简单的零的诞生，却经历了十分漫长的过程。

0 的发现和十进位记数法有着密切关系。比如“五十加三”可记作“53”，但“五个一百加三”就不能记作“53”了，这时要在 5 和 3 之间留一个空位，记作“5　3”。当然这个空位可以不写什么，但容易发生混淆。人们自然想用一个符号填在这个空位上。

大约在 6 世纪的时候，印度人在《太阳手册》这本书里，就用符号“·”表示过空位。后来印度数字在漫长的旅行中，由“·”逐渐演变成为椭圆形的“0”。

我国古代数学家很早就认识到零的重要性，国际友人称誉中国是“0”的故乡，这种说法是有一定道理的。

为什么这样说呢？

我国古代把竹筹摆成不同的形状，表示一到九的数字：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
纵式：	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
横式：	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

记数的方法是个位用纵式，十位用横式，百位用纵式，千位用横式，依此类推。用上面九个数字纵横相间排列，能够表示出任意一个数。算筹是了解中国古代数学的一把钥匙。

例如“123”这个数可摆成：𝍠𝍪𝍢。但是，“206”这个数，就不能摆成：𝍡𝍥，这样就是“26”了。这时必须在中间空一位，摆成：𝍡　𝍥。这里的空位，就是产生0的萌芽。

公元前4世纪时，人们用在筹算盘上留下空位的办法来表示零。不过这仅仅是一个空位而已，并没有什么实在的符号，容易使人产生误解。后来人们就用“空”字代替空位，如把206摆成：𝍡空𝍥。然而用空字代表零，在数字运算中，和纵横相间的算筹交织在一起，很不协调，于是又用“□”表示零。例如南宋蔡沈著的《律吕新书》中，曾把104976记作“十□四千九百七十六”。用“□”表示零，标志着用符号表示零的新阶段。

为了书写方便，又把“□”顺笔改作“○”。例如金代

的《大明历》中，把405写成“四百〇五”。

用圆圈“〇”来表示零，它既好写，又很美观，反映古代人民的审美观念。当然，我国用圆圈代替零与阿拉伯数字中的0有不同之处。圆圈〇在意义上仅表示一个空位，并没有把它当作数字来使用，这是两者的区别。

0一经产生，就成为阿拉伯数字的十大成员之一，随着人类实践活动的发展，0比其它一切数都有更丰富的内容。比如说，0.95里没有0，就显示不出整数和小数的界限；5后面添上一个零就成为50，恰为原数的10倍；由汽车号码为00058，马上可以知道某市汽车的最高号码是五位数。

如果我们需要考虑精确度的话，小数末尾的零就不能随便去掉。例如工人师傅加工零件，要求一个零件的长度为16毫米，另一个零件的长度为16.0毫米。前者表示精确到1毫米，即加工后的实际长度在$15.5<l<16.5$（毫米）之间，都可以认为是合格的；后者表示精确到0.1毫米，即加工的实际长度在$15.95<l<16.05$（毫米）之间才认为是合格的。显然后者的加工精度要比前者高。你看，只是末尾一个0之差，就有两种不同的要求。

数学中的“0”和“无”并不完全是一回事。在小学里用0表示“没有”是对现实的反映。随着人类社会实践活动的不断发展，对0的认识也在不断地加深。在学习了正负数以后，0有了更为丰富的内容，它不仅可以表示“没有”，而且可以表示一种确定的量。例如北京高出水准面52.3米，吐鲁番最低处低于水准面154米，而水准面的高度规定为0米，它表示了水准面高程这个确定的量。

0 在数学里具有非常独特的性质：

(1) 在加数中，任何一个数与 0 相加，仍等于这个数，即 $a+0=a$。

(2) 在减法中，一个数减去 0，仍等于这个数，即 $a-0=0$。

(3) 在乘法中，因数只要有一个为 0，则其积为 0，即 $a\times 0=0$。

(4) 在除法中，0 除以不等于零的数，其商为 0，即 $\frac{0}{a}=0 \quad (a\neq 0)$，并且规定 0 不能做除数。

今天，我们无论在什么样的计算中，几乎都要遇到零，0 在整个数学中，扮演了十分重要的角色。

$a, b, c, \cdots, x, y, z, \cdots$ 表示数的字母号

在人类历史上，先是有具体的数量，如两只羊，三头牛等，再经过漫长的发展阶段，才离开了具体的量，抽象出一般的数，如 1，2，$\frac{1}{2}$ 等。这一次抽象意义重大，产生了算术的理论。

然而，算术研究的对象是具体的数，因而不便于表示数量关系的一般规律，不便于对带有一般性的数学问题进行研究。生产的发展，人的认识能力的发展，必然要引起数学史上的再一次抽象——用字母表示数。

16 世纪末，法国的数学家韦达，在前人积累下来的经验基础上，有意识地、系统地使用字母表示数。他用母音字母 a，e，i，…代表未知量，子音字母 b，d，g，…代表

已知量。韦达相信使用字母代替数的方法，会使运算过程变得简明得多。1591 年，在他的著作《美妙的代数》一书中，把算术和代数加以区别，从而使后者不仅用数，也用字母计算，推进了代数问题一般性的讨论。

17 世纪，法国数学家笛卡儿采用字母 a，b，c，…代表已知量，用字母 x，y，z，…代表未知量。用 a^2，b^2，…的形式表示幂，初步建立了代数的符号系统，发展成为今天的习惯写法。

不过韦达和笛卡儿都是在正数的情况下用字母表示数。虽然他们毫不迟疑地进行文字系数项的加减，但还没有意识到用字母表示负数。

1657 年，数学家约翰·哈德提出用字母既可以表示正数，又可以表示负数。从此以后，用字母表示数的方法，贯穿于全部数学之中。数学在表达方式、解题思想和研究方法方面都发生了深刻的变化，数学大大地前进了一步。

首先，含有字母符号的方程出现了，列方程解题比算术方法优越得多。方程用几乎机械化的动作代替了一部分推理。

其次，公式出现了，数学中很多定理、定律、法则、运算律，都能用公式简洁地表达出来。比如用 $a^2+b^2=c^2$ 表示勾股定理，比用 $3^2+4^2=5^2$ 表达这个定理，更具有普遍意义。

可以说，用字母表示数的方法，使得整个数学的面貌为之一新。比如说所有的数，除了表示不同的量以外，就数与数之间的关系来说，在一定范围内都有某种共同的性质。例如两个数相加，交换两个数的位置，它们的和不变。如果用

字母 a、b 分别表示两个数，这个性质可以简明地表示为：

$$a+b=b+a。$$

这就是加法的交换律。同样，用字母也可以表示其他的定律：

加法结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$；

乘法交换律：$a\cdot b=b\cdot a$；

乘法结合律：$(ab)\cdot c=a\cdot(bc)$；

加乘分配律：$(a+b)c=ac+bc$。

采用字母表示数的方法，还有助于认识事物间的内在联系和规律。

比如，任取一个三位数 $M=825$，颠倒其数字的位置，得到另一个三位数 $N=528$，求出这两个三位数的差：

$$M-N=825-528=297。$$

在这个结果中，我们没有看到什么令人注意的东西。但是，如果用字母表示数位上的数字以后，就会发现意想不到的情况：

用 a、b、c 分别表示任意一个三位数的百位、十位、个位上的数字，于是

$$M=100a+10b+c,$$

$$N=100c+10b+a。$$

求其差：

$$\begin{aligned}M-N&=(100a+10b+c)-(100c+10b+a)\\&=99a-99c=99(a-c)。\end{aligned}$$

这表明任何一个三位数，将其数字的位置颠倒后，所得的三位数之差一定为 99 的倍数。这个规律在没有采用字母表示数以前，是不容易被人们注意到的。采用字母表示数的