



普通高等教育“十五”国家级规划教材

材料力学 (II)

第2版

单辉祖 编著



高等教育出版社

01
2(2)

4

普通高等教育“十五”国家级规划教材

材料力学(Ⅱ)

第2版

单辉祖 编著

高等教育出版社

内容简介

本教材是普通高等教育“十五”国家级规划教材。

本教材仍保持第一版模块式的特点,由《材料力学(I)》与《材料力学(II)》两部分组成。《材料力学(I)》包括材料力学的基本部分,涉及杆件变形的基本形式与组合形式,涵盖强度、刚度与稳定性问题。《材料力学(II)》包括材料力学的加深与扩展部分。

本书为《材料力学(II)》,包括非对称弯曲与特殊梁、能量法(一)、能量法(二)、静不定问题分析、杆与杆系分析的计算机方法、应力分析的实验方法、疲劳与断裂以及考虑材料塑性的强度计算等八章。各章均附有复习题与习题,个别章还安排了利用计算机解题的作业。

与第一版相同,本教材具有论述严谨、文字精炼、重视基础与应用、重视学生能力培养、专业面宽与教学适用性强等特点,而且,在选材与论述上,特别注意与近代力学的发展相适应。

本教材可作为高等学校工科本科多学时类材料力学课程教材,也可供高职高专、成人高校师生以及工程技术人员参考。

以本教材为主教材的相关教学资源,尚有《材料力学课堂教学多媒体课件与教学参考》、《材料力学学习指导书》、《材料力学网上作业与查询系统》与《材料力学网络课程》等。

图书在版编目(CIP)数据

材料力学(II)/单辉祖编著. —2版. —北京:高等教育出版社,2004.8

ISBN 7-04-014476-X

I. 材... II. 单... III. 材料力学 - 高等学校 - 教材 IV. TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 054745 号

策划编辑	黄毅	责任编辑	姜凤	封面设计	刘晓翔
责任绘图	朱静	版式设计	胡志萍	责任校对	俞声佳
责任印制	陈伟光				

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100011
总 机 010-82028899

购书热线 010-64054588
免费咨询 800-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>

经 销 新华书店北京发行所
印 刷 涿州市星河印刷有限公司

开 本 787×960 1/16
印 张 14
字 数 260 000

版 次 1999 年 9 月第 1 版
2004 年 8 月第 2 版
印 次 2004 年 8 月第 1 次印刷
定 价 16.50 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

作者简介



单辉祖,北京航空航天大学教授。1953年毕业于华东航空学院飞机结构专业,1954年在北京航空学院飞机结构专业研究生班学习。1992—1993年,在美国特拉华大学复合材料中心,从事合作研究。

历任教育部工科力学教材编审委员、国家教委工科力学课程指导委员会委员、中国力学学会教育工作委员会副主任委员、北京航空航天大学校务委员会委员、校学科评审组成员与校教学指导委员会委员等。

主要从事复合材料力学、计算力学与材料力学等方面的教学与科研工作。编著有《材料力学教程》(高等教育出版社)与《材料力学》(台湾,文京图书有限公司)等六种,发表科研论文60余篇。

1982年获国家教委优秀教材一等奖与航空工业部优秀教材一等奖,1990年获国家级教学优秀成果一等奖,2002年获国家级教学优秀成果二等奖。1992年被授予航空航天工业部有突出贡献专家称号,1992年起享受国务院颁发的政府特殊津贴。

目 录

第十一章 非对称弯曲与特殊梁	1
§ 11-1 非对称弯曲正应力	1
§ 11-2 薄壁梁的弯曲切应力	5
§ 11-3 截面剪心与组合变形的一般情况	9
§ 11-4 复合梁与夹层梁	14
* § 11-5 曲梁	20
复习题	28
习题	28
第十二章 能量法(一)	34
§ 12-1 外力功与应变能的一般表达式	34
§ 12-2 互等定理	39
§ 12-3 卡氏定理	42
§ 12-4 变形体虚功原理	47
§ 12-5 单位载荷法	49
* § 12-6 图乘法	58
复习题	62
习题	62
第十三章 能量法(二)	70
§ 13-1 梁的横向剪切效应	70
§ 13-2 冲击应力分析	73
* § 13-3 压杆的临界载荷	79
* § 13-4 纵横弯曲	82
复习题	87
习题	87
第十四章 静不定问题分析	91
§ 14-1 引言	91
§ 14-2 用力法分析静不定问题	92
§ 14-3 对称与反对称静不定问题分析	97
§ 14-4 静不定刚架空间受力分析	102
* § 14-5 连续梁与三弯矩方程	104
复习题	111
习题	112
* 第十五章 杆与杆系分析的计算机方法	118

§ 15-1 位移法概念	118
§ 15-2 刚度矩阵与等效节点载荷概念	119
§ 15-3 刚架单元的特性分析	125
§ 15-4 梁与桁架单元的特性分析	129
§ 15-5 杆与杆系的计算机分析	131
复习题	136
习题	136
计算机作业	136
第十六章 应力分析的实验方法	138
§ 16-1 概述	138
§ 16-2 电测法的基本原理	138
§ 16-3 电阻应变仪	142
§ 16-4 应变测量与应力计算	144
§ 16-5 光弹性仪与偏振光场	149
§ 16-6 光弹性法的基本原理	151
§ 16-7 应力光图的观测与边界应力计算	155
* § 16-8 切应力差法与计算机辅助光弹性法简介	156
复习题	158
习题	159
第十七章 疲劳与断裂	160
§ 17-1 引言	160
§ 17-2 循环应力及其类型	162
§ 17-3 S-N 曲线与材料的疲劳极限	163
§ 17-4 影响构件疲劳极限的主要因素	165
§ 17-5 对称循环应力下的疲劳强度计算	170
* § 17-6 非对称与弯扭组合循环应力下的疲劳强度计算	172
* § 17-7 变幅循环应力与累积损伤理论概念	176
* § 17-8 应力强度因子与断裂韧性概念	178
* § 17-9 裂纹扩展与构件疲劳寿命估算	181
复习题	185
习题	186
第十八章 考虑材料塑性的强度计算	189
§ 18-1 轴向拉压静不定问题的极限载荷	189
§ 18-2 圆轴的极限扭矩	192
§ 18-3 梁的极限弯矩	193
§ 18-4 梁的极限载荷	195
复习题	200
习题	200

参考文献	204
习题答案	205
索引	210
Synopsis	213
Contents	214

第十一章 非对称弯曲与特殊梁

第六章详细研究了匀质直梁对称弯曲时的应力,本章进一步研究一般非对称截面梁的弯曲正应力,一般薄壁截面梁的弯曲切应力,并在此基础上研究与剪切有关的问题,截面剪心问题。此外,本章还将研究复合梁、曲梁、夹层梁与钢筋混凝土梁等的弯曲应力。

§ 11-1 非对称弯曲正应力

前面所研究的梁,或属于对称弯曲,或属于互垂对称弯曲的组合。然而,如果梁不具有纵向对称面,或仅具有一个纵向对称面,而外力不作用在该对称面内,则均属于非对称弯曲。实际上,互垂对称弯曲的组合也属于非对称弯曲,一种最简单的非对称弯曲。本节研究非对称弯曲的一般情况。

一、平面弯曲正应力分析

一直梁,横截面如图 11-1a 所示,坐标轴 y 与 z 为截面主形心轴,弯矩 M_z 用矢量表示。试验表明,在非对称弯曲时,平面假设与单向受力假设仍然成立。所以,如果中性层的曲率半径用 ρ 表示,则由变形几何关系与胡克定律可知,横截面上距中性轴 η 处的弯曲正应力为

$$\sigma = E\epsilon = \frac{E\eta}{\rho} \quad (a)$$

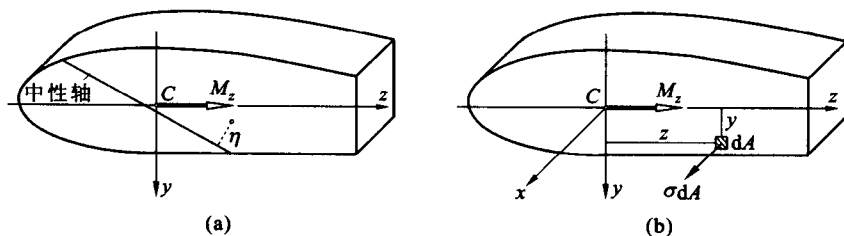


图 11-1

如图 11-1b 所示,横截面上各点处的法向微内力 σdA 构成一空间平行力系,而且,由于横截面上没有轴力,仅存在弯矩 M_z ,因此,

$$\int_A \sigma dA = 0 \quad (b)$$

$$\int_A z \sigma dA = 0 \quad (c)$$

$$\int_A y \sigma dA = -M_z \quad (d)$$

将式(a)代入式(b),得

$$\int_A \eta dA = 0$$

由此可见,在一般非对称弯曲时,中性轴仍通过截面形心。这样,如果中性轴的方位以其与坐标轴 y 的夹角 φ 表示,则由图 11-2 可以看出,

$$\eta = z \cos \varphi - y \sin \varphi$$

将上述关系代入式(a),得

$$\sigma = \frac{E}{\rho} (z \cos \varphi - y \sin \varphi) \quad (e)$$

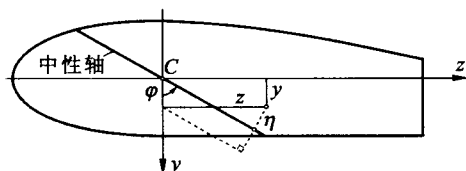


图 11-2

将式(e)代入式(c)与(d),并注意到截面对主形心轴的惯性积 I_{yz} 为零,分别得

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad (f)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z} \quad (11-1)$$

式中, I_z 代表截面对主形心轴 z 的惯性矩。最后,将式(f)与式(11-1)代入式(e),于是得

$$\sigma = - \frac{M_z y}{I_z} \quad (11-2)$$

以上分析表明,当弯矩作用面垂直于横截面的任一主形心轴时,中性轴沿该主形心轴,即中性轴垂直于弯矩作用面。中性轴垂直于弯矩作用面的变形形式,称为平面弯曲。对称弯曲时,中性轴垂直于弯矩作用面,所以,对称弯曲也是一种平面弯曲。

二、非对称弯曲正应力一般公式

在有些情况下,横截面上的弯矩矢量 M 并不平行于主形心轴,这时,可将该弯矩沿主形心轴分解为 M_y 与 M_z 两个分量(图 11-3a),并应用叠加原理,即得

横截面上任一点 (y, z) 处的弯曲正应力为

$$\sigma = \frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z} \quad (11-3)$$

在应用上式与式(11-2)时,以矢量沿坐标轴正向的弯矩分量为正。

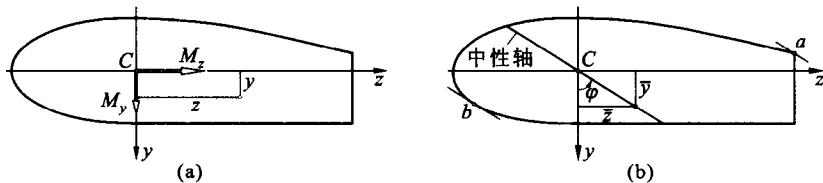


图 11-3

上式表明,弯曲正应力沿横截面线性分布,中性轴通过截面形心。由此可见,离中性轴愈远,弯曲正应力愈大,而横截面上的最大弯曲正应力,则发生在离中性轴最远的各点处。所以,为了计算最大弯曲正应力,首先应确定中性轴的方位。

如图 11-3b 所示,设中性轴上任一点的坐标为 $(\bar{y}, \bar{z})$,则根据正应力为零的条件,由式(11-3)得中性轴的方程为

$$\frac{M_y \bar{z}}{I_y} - \frac{M_z \bar{y}}{I_z} = 0$$

可见,中性轴通过截面形心,其斜率则为

$$\tan \varphi = \frac{\bar{z}}{\bar{y}} = \frac{I_y M_z}{I_z M_y} \quad (11-4)$$

中性轴确定后,在中性轴两侧各作一条与其平行并与截面周边相切的直线(图 11-3b),所得切点 a 与 b 即为离中性轴最远的点,将其坐标分别代入式(11-3),即可求出横截面上的最大弯曲正应力。

例 11-1 图 11-4a 所示悬臂梁,横截面如图 11-4b 所示,并在自由端承

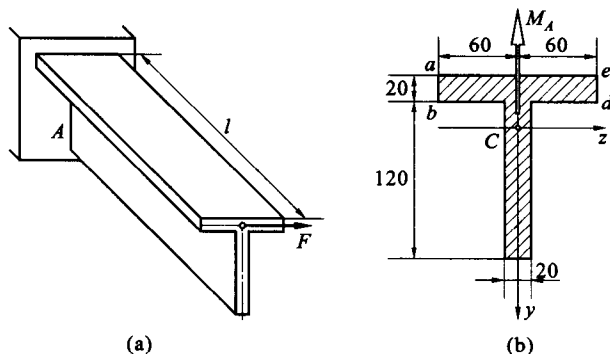


图 11-4

受沿水平方向的载荷 F 作用, 已知梁长 $l = 1.2 \text{ m}$, 载荷 $F = 6 \text{ kN}$, 许用应力 $[\sigma] = 160 \text{ MPa}$, 试校核梁的强度。

解: 固定端处的横截面 A 为危险截面, 该截面的弯矩为

$$M_A = Fl = (6 \times 10^3 \text{ N})(1.2 \text{ m}) = 7.2 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

由图 11-4b 可以看出, 坐标轴 y 为截面的对称轴, 即截面的主形心轴, 而弯矩 M_A 的矢量又与该轴重合, 所以, 中性轴沿坐标轴 y , 最大弯曲正应力则发生在横截面的边缘 ab 与 ed 的各点处, 其值为

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \frac{M_A z_{\max}}{I_y} = \frac{12(7.2 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m})(0.060 \text{ m})}{(0.020 \text{ m})(0.120 \text{ m})^3 + (0.120 \text{ m})(0.020 \text{ m})^3} \\ &= 1.46 \times 10^8 \text{ Pa} = 146 \text{ MPa} < [\sigma]\end{aligned}$$

可见, 梁的弯曲强度符合要求。

例 11-2 图 11-5a 所示悬臂梁, 承受铅垂载荷 F 作用。已知梁长 $l = 1 \text{ m}$, 载荷 $F = 5 \text{ kN}$, 横截面如图 11-5b 所示, 主形心轴 z 的方位角 $\alpha = -28^\circ 30'$, 主形心惯性矩 $I_y = 0.385 \times 10^{-6} \text{ m}^4$, $I_z = 3.60 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ 。试求梁内的最大弯曲正应力。

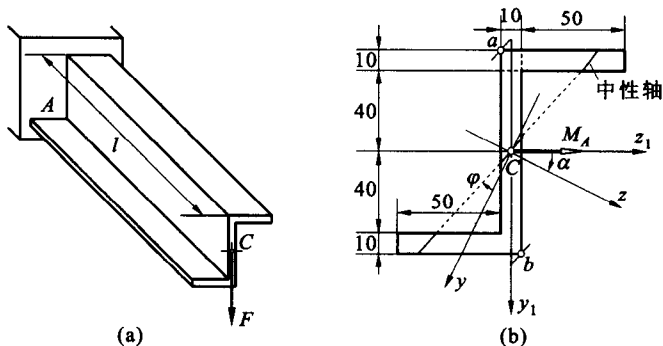


图 11-5

解: 1. 确定危险点的位置

固定端处的横截面 A 为危险截面, 该截面的弯矩为

$$M_A = Fl = (5 \times 10^3 \text{ N})(1 \text{ m}) = 5 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

而其沿主形心轴 y 与 z 的分量则分别为

$$M_y = -(5 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}) \sin 28^\circ 30' = -2.39 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_z = (5 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}) \cos 28^\circ 30' = 4.39 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

根据式(11-4), 得中性轴的方位角为

$$\varphi = \arctan \frac{I_y M_z}{I_z M_y} = \arctan \frac{(0.385 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(4.39 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m})}{(3.60 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(-2.39 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m})} = -11^\circ 3'$$

可见, 截面 A 的角点 a 与 b 为危险点(图 11-5b), 其上分别作用有最大弯曲拉应

力与最大弯曲压应力。

2. 计算最大弯曲正应力

在 Cy_1z_1 坐标系内, a 点的坐标为

$$y_{1A} = -0.050 \text{ m}$$

$$z_{1A} = -0.005 \text{ m}$$

根据坐标变换公式(§ A-6), 得该点在 Cyz 坐标系内的坐标为

$$\begin{aligned} y_A &= y_{1A} \cos \alpha + z_{1A} \sin \alpha \\ &= (-0.050 \text{ m}) \cos(-28^\circ 30') + (-0.005 \text{ m}) \sin(-28^\circ 30') \\ &= -0.0416 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_A &= z_{1A} \cos \alpha - y_{1A} \sin \alpha \\ &= (-0.005 \text{ m}) \cos(-28^\circ 30') - (-0.050 \text{ m}) \sin(-28^\circ 30') \\ &= -0.0283 \text{ m} \end{aligned}$$

于是, 由式(11-3), 得 a 点处的正应力即最大弯曲拉应力为

$$\begin{aligned} \sigma_{t, \max} &= \frac{(-2.39 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m})(-0.0283 \text{ m})}{0.385 \times 10^{-6} \text{ m}^4} - \frac{(4.39 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m})(-0.0416 \text{ m})}{3.60 \times 10^{-6} \text{ m}^4} \\ &= 2.26 \times 10^8 \text{ Pa} = 226 \text{ MPa} \end{aligned}$$

同理, 可求出 b 点处的正应力即最大弯曲压应力为

$$\sigma_{c, \max} = 226 \text{ MPa}$$

§ 11-2 薄壁梁的弯曲切应力

在工程结构中, 广泛采用薄壁截面梁, 它们或为开口的, 或为闭口的, 本节研究薄壁截面梁的弯曲切应力。

对于薄壁梁的弯曲切应力(图 11-6), 可作如下假设: 横截面上各点处的弯曲切应力, 平行于该点处的周边或截面中心线的切线, 并沿壁厚均匀分布。现在, 利用上述假设, 研究弯曲切应力沿截面中心线的变化规律。

图 11-7a 所示为一任意形状的开口薄壁梁, 坐标轴 y 与 z 为截面的主形心轴。在平行于坐标轴 y 的载荷作用下^①, 梁发生平面弯曲。

为了研究弯曲切应力, 首先在横截面 x 与 $x + dx$ 处, 用两个横截面从梁中切取一微段, 然后在距

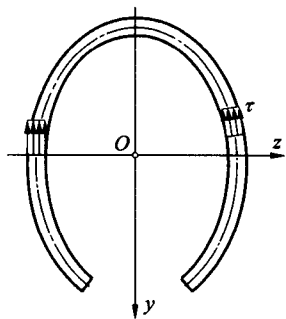


图 11-6

① 关于载荷的作用位置将在 § 11-3 中讨论。

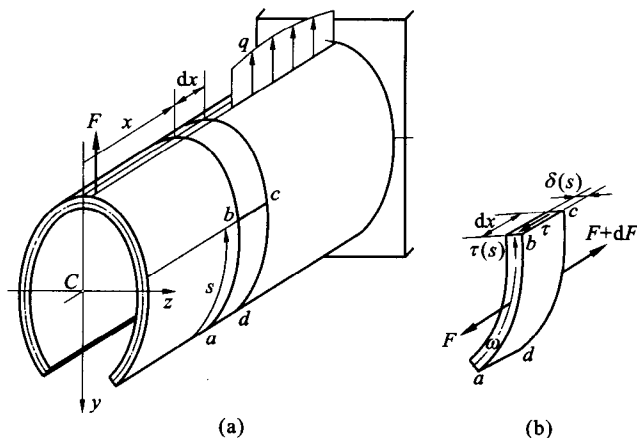


图 11-7

开口端 s 处,再用一个沿壁厚方向的纵截面将该微段的下部切出(图 11-7b)。由切应力互等定理可知,纵截面 bc 上的切应力 τ 数值上等于横截面上 s 处的切应力 $\tau(s)$ 。

设截面 ab 与 cd 的面积均为 ω , s 处的壁厚为 $\delta(s)$,在该二截面上由弯曲正应力构成的轴向合力分别为 F 与 $F + dF$,则根据微段下部 $abcd$ 的轴向平衡条件,显然有

$$\tau(s) = \frac{1}{\delta(s)} \frac{dF}{dx} \quad (a)$$

由图 11-7b 可以看出,

$$F = \int_{\omega} \sigma dA = \int_{\omega} \frac{My}{I_z} dA = \frac{MS_z(\omega)}{I_z} \quad (b)$$

式中, $S_z(\omega)$ 代表从开口端至 s 处的部分截面 ω 对坐标轴 z 的静矩。

将式(b)代入式(a),并设横截面 x 上的剪力为 F_s ,于是得截面 x 上 s 处的弯曲切应力为

$$\tau(s) = \frac{F_s S_z(\omega)}{I_z \delta(s)} \quad (11-5)$$

而该处的弯曲剪流则为

$$q(s) = \tau(s) \delta(s) = \frac{F_s S_z(\omega)}{I_z} \quad (11-6)$$

由式(11-5)与(11-6)可知,切应力 $\tau(s)$ 与剪流 $q(s)$ 分别随 $S_z(\omega)/\delta(s)$ 与 $S_z(\omega)$ 变化,即弯曲切应力与剪流的分布规律均取决于截面几何性质。

例 11-3 图 11-8a 所示工字形薄壁梁,剪力 F_s 位于对称轴 y ,且方向向

上,试确定横截面上的剪流分布规律。

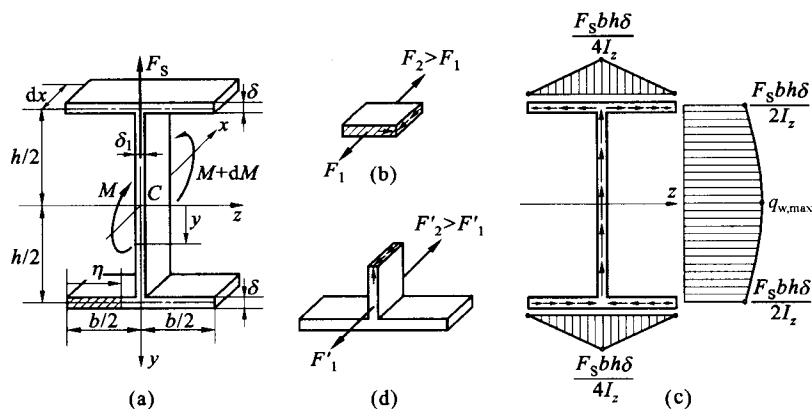


图 11-8

解: 1. 翼缘的剪流分布

根据式(11-6)可知,下翼缘左部 η 处的剪流为

$$q_f(\eta) = \frac{F_s S_z(\eta)}{I_z} = \frac{F_s}{I_z} \cdot \eta \delta \cdot \frac{h}{2} = \frac{F_s h \delta}{2 I_z} \eta$$

即剪流沿翼缘中心线线性变化,在 $\eta = b/2$ 处最大,其值为

$$q_f\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{F_s b h \delta}{4 I_z} \quad (a)$$

如图 11-8a 与 b 所示,由于剪力 F_s 为正值, $dM = F_s dx > 0$, 因而 $F_2 > F_1$ 。所以,下翼缘左部的剪流方向指向腹板。

至于翼缘其他部分的剪流,同样可采用上述方法进行分析,其分布规律与方向如图 11-8c 所示。

2. 腹板的剪流分布

腹板中心线上各点的位置用坐标 y 表示,该处的剪流为

$$q_w(y) = \frac{F_s}{I_z} \left[\frac{b \delta h}{2} + \frac{\delta_1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \right]$$

即剪流沿腹板中心线按抛物线规律变化(图 11-8c),在中性轴处最大,其值为

$$q_{w, \max} = \frac{F_s h (4 b \delta + h \delta_1)}{8 I_z}$$

在腹板两端($y = \pm h/2$),剪流则均为

$$q_w\left(\pm \frac{h}{2}\right) = \frac{F_s b h \delta}{2 I_z} \quad (b)$$

由图 11-8d 可以看出,腹板剪流的方向向上,即与剪力的方向相同。

3. 讨论

比较式(a)与式(b)可知,腹板末端处的剪流,数值上等于左、右翼缘末端处的剪流之和。如果再考虑到剪流的方向,则可形象地说,腹板上的剪流是由一个翼缘的左、右两边“流来”,然后再“流往”另一翼缘的左、右两边。

实际上,由于腹板剪流的方向可根据剪力方向确定,再进一步利用剪流“流动”的上述特性,即可判断翼缘各点处的剪流方向。

例 11-4 一圆形薄壁梁,横截面如图 11-9a 所示,剪力 F_s 位于对称轴 y ,且方向向上,试画横截面上的弯曲切应力分布图,并计算最大弯曲切应力。已知截面的平均半径为 R_0 ,壁厚为 δ 。

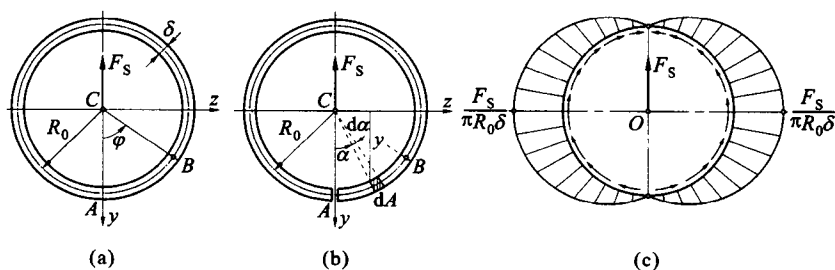


图 11-9

解: 1. 问题分析

对称弯曲时,横截面上的弯曲切应力分布对称于截面的纵向对称轴 y ,因此,在该对称轴上各点处,不存在垂直于该轴方向的切应力。由此可见,圆环形闭口薄壁梁纵向对称轴上 A 点处的弯曲切应力为零,其切应力分布与 A 处开口的圆环形薄壁梁相同(图 11-9b)。于是,问题转化为分析圆环形开口薄壁梁的弯曲切应力。

2. 建立弯曲切应力方程

如图 11-9a 所示,设中心线上任一点 B 的位置用极角 φ 表示,则根据式(11-5)可知,该点处的弯曲切应力为

$$\tau(\varphi) = \frac{F_s S_z(\varphi)}{I_z \delta} \quad (\text{a})$$

式中, $S_z(\varphi)$ 代表圆弧形截面 AB 对中性轴 z 的静矩。

由图 11-9b 可以看出,

$$S_z(\varphi) = \int_{\omega} y dA = \int_0^{\varphi} R_0 \cos \alpha \cdot \delta R_0 d\alpha = R_0^2 \delta \sin \varphi \quad (\text{b})$$

由本书上卷的式(A-10)与式(A-12)可知,薄壁圆截面的惯性矩为

$$I_z = \pi R_0^3 \delta \quad (\text{11-7})$$

将式(b)与上式代入式(a),于是得

$$\tau(\varphi) = \frac{F_s \sin \varphi}{\pi R_0 \delta} \quad (11-8)$$

3. 计算最大弯曲切应力

根据式(11-8),得圆环形薄壁梁的弯曲切应力分布如图 11-9c 所示,中性轴上各点处的弯曲切应力最大,其值为

$$\tau_{\max} = \frac{F_s}{\pi R_0 \delta} \quad (11-9)$$

§ 11-3 截面剪心与组合变形的一般情况

一、截面剪心

对称弯曲时,剪力 F_{sy} 的作用线与横截面的对称轴重合。但是,在图 11-10a 所示一般平面弯曲的情况下,剪力 F_{sy} 的作用线究竟位于何处则尚待确定(图 11-10b)。应该注意到,当梁承受横向载荷时,如果外力作用线与上述剪力 F_{sy} 的作用线不在同一个平行于 x 轴的平面内(图 11-10c),则将外力平移到该平面时,将产生一个矩为 M_a 的附加扭力偶,这时,梁不仅发生弯曲变形,同时发生扭转变形。因此,有必要确定剪力作用线的位置。

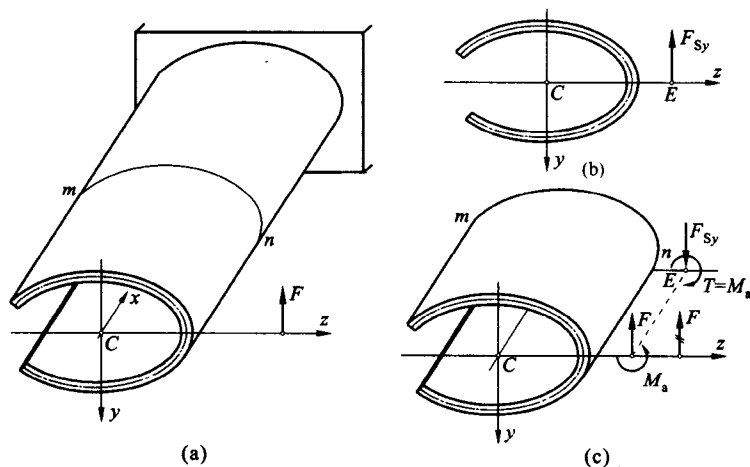


图 11-10

如图 11-11a 所示,当梁在垂直于主形心轴 z 的平面内发生平面弯曲时,弯曲剪流为

$$q_y = \frac{F_{sy} S_z}{I_z} \quad (a)$$

式中, F_{Sy} 代表剪力, 实际上, 即由弯曲剪流 q_y 所构成的合力。现在, 研究合力 F_{Sy} 的作用位置。

如图所示, 若以坐标原点 O 为矩心, 并设剪力 F_{Sy} 的力臂为 e_z , 微剪力 $q_y ds$ 的力臂为 ρ , 则根据合力矩定理可知,

$$F_{Sy} e_z = \int_l \rho q_y ds$$

式中, l 代表截面中心线的总长。将式(a)代入上式, 于是得

$$e_z = \frac{\int_l S_z \rho ds}{I_z} \quad (11-10)$$

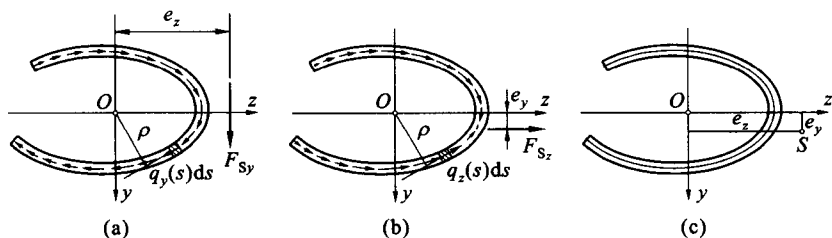


图 11-11

同理, 当梁在垂直于主形心轴 y 的平面内发生平面弯曲时 (图 11-11b), 由于弯曲剪流为

$$q_z = \frac{F_{Sz} S_y}{I_y}$$

则其合力 F_{Sz} 的作用位置为

$$e_y = \frac{\int_l S_y \rho ds}{I_y} \quad (11-11)$$

在横截面所在平面内, 坐标为 (e_y, e_z) 的点 (图 11-11c), 即弯曲剪力 F_{Sy} 与 F_{Sz} 作用线的交点, 称为横截面的剪心或弯心。由此可见, 只有当横向外力 (集中力或分布力) 的作用线通过截面剪心时, 梁才仅弯不扭。因此, 为了避免使抗扭性能差的梁 (例如开口薄壁梁) 发生扭转变形, 应尽量避免外力偏离剪心。

二、对称与 L 形等截面的剪心

式(11-10)与(11-11)表明, 剪心位置 (e_y, e_z) 仅取决于截面的形状与尺寸, 而与外力无关。

由上述分析还可以看出, 当截面具有一个对称轴时, 剪心必位于该对称轴上 (图 11-12a); 而对于双对称截面, 则剪心必与形心重合 (图 11-12b)。