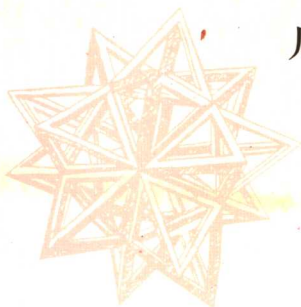


线性代数 分类题典

周云才 主编



4



科学出版社

www.sciencep.com

内 容 简 介

本书为线性代数课程的配套辅助教材,前七章内容分别为:行列式,矩阵代数运算,向量组与矩阵的秩,线性方程组,特征值理论与相似矩阵,二次型,线性空间.第八章为选择题,覆盖前面七章的内容.全书共精编了1000多道题,历时6年,是一线骨干教师教学实践的总结和教学研究的产物,题目及其解答均用 Mathematica 软件包作了验证,证明题历经多次锤炼.文前编制了分类表,是读者分类学习和检索的工具.

本书选题精典,结构合理,难易恰当,便于教学和学生自学,可供工科学生学习使用,也可供其他非理科学生和部分理科学生使用,对于广大线性代数课程的教研工作者来讲,本书无疑是一本极好的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数分类题典 / 周云才主编. - 北京:科学出版社, 2004.6
ISBN 7-03-013519-9

I. 线… II. 周… III. 线性代数 - 习题 IV. O151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 049573 号

责任编辑:冯贵层

责任印制:高 嵘 / 封面设计:黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

武汉大学出版社印刷总厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004年7月第一版 开本:850×1168 1/32

2004年7月第一次印刷 印张:13 3/4

印数:1—6000

字数:360 000

定价:19.80 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前言

线性代数高度的抽象性和极强的逻辑性注定其是一门教与学都具有挑战性的课程,同时它也是一门具有丰富内涵的课程,它的每一个概念、每一个结论甚至每一道习题无不包含数学的魅力.

如何教好、学好线性代数一直是大学教师不断思索的问题. 笔者认为,每一门学科都有自身的知识结构体系,构架结构体系的构件则是相关的基本概念和术语,而学科的基本结论则是其构件的黏合剂和装饰品. 只要掌握了一门学科的结构体系,就可以掌握这门学科,并将之应用于实践.

例如:已知 $E+AB$ 可逆,试证 $E+BA$ 也可逆,且 $(E+BA)^{-1} = E - B(E+AB)^{-1}A$.

刚学线性代数的学生对此题可能无从下手. 其实,只要掌握了其中的相关概念、符号或术语,余下的就是简单劳动. 这个题中的关键概念是“可逆”和“逆”. 回顾定义:

设 A 是 n 阶方阵, E 是 n 阶单位矩阵. 如果存在一个矩阵 B , 使得 $AB=BA=E$, 则称 B 是 A 的逆矩阵, 记作 $B=A^{-1}$, 矩阵 A 称为可逆矩阵.

首先要清楚题目中的矩阵哪个是定义中的 A , 哪个是定义中的 B . 比较等式 $B=A^{-1}$ (等价于 $A^{-1}=B$) 与 $(E+BA)^{-1} = E - B(E+AB)^{-1}A$, 不难发现题目的含义是: 在 $A=E+BA$ 的情况下, 证明 A 的逆 $B=E - B(E+AB)^{-1}A$, 即要证明:

$$\boxed{(E+BA)} \boxed{(E - B(E+AB)^{-1}A)} = \boxed{(E - B(E+AB)^{-1}A)} \boxed{(E+BA)} = E$$

到此,余下的事情就是简单矩阵运算:

$$\begin{aligned} & (E+BA)(E - B(E+AB)^{-1}A) \\ &= E - B(E+AB)^{-1}A + BA - BAB(E+AB)^{-1}A \end{aligned}$$

$$= E + BA - (B + BAB)(E + AB)^{-1}A$$

$$= E + BA - BA = E$$

又如： A 、 B 为方阵，证明 AB 与 BA 有相同的特征值。

这个题目中的关键问题是明确矩阵特征值的定义：

如果存在非零向量 x 使得： $Ax = \lambda x$ ，则称 λ 为 A 的特征值。

有了这个概念，我们设 λ 为 AB 的特征值，则有非零向量 x ，使得

$$(AB)x = \lambda x$$

为了使得左边出现 BA ，只需要对上等式两边左乘 B ，得

$$B(AB)x = \lambda Bx \quad (BA)(Bx) = \lambda (Bx)$$

这就出现了与 $(BA)\boxed{y} = \lambda \boxed{y}$ 类似的公式，下面的证明就显而易见了。

线性代数难学，但是当你掌握了它的知识构架和表述方式之后，它就会显露出它的魅力！它的每一个概念、每一个结论以及每一道习题都是一道美丽的风景！理解这些风景，并获取这些风景的内涵所需付出的代价就是进行不懈的观赏与揣摩。《线性代数分类题典》为读者提供了观赏与揣摩的入场券。

《线性代数分类题典》精编了 1000 多道题，历时近 6 年，是集体智慧的结晶。在这里特别要感谢陈忠博士、陈圣滔副教授、何先平副教授与范远泽老师，他们收集了部分习题，特别是陈博士，他从一开始就对本题典给予了关注，并审阅了全部习题；感谢杜友福教授的大力支持和推荐。

由于编者水平有限，尽管每道解答题都用 Mathematica 软件包作了验证，所有的证明题经过了多次锤炼，但是依然还会有许多意想不到的缺点和不足，希望广大读者多多指教。

周云才

2004 年 5 月 8 日

分 类 表

类 别		题目 编号	说 明
大类	小类		
行列式	逆序数	11***	逆序数的计算与证明题
	具体阶数字行列式	12***	行列式中的元素是具体数字,且阶数为具体数字的行列式
	具体阶符号行列式	13***	行列式中的元素有符号,但阶数为具体数字的行列式
	n 阶行列式	14***	阶数为 n 或 k (抽象阶)的任何行列式
	克拉默 (Cramer) 法则	15***	利用克拉默法则解方程组等
	其他	16***	
矩阵代数运算	简单代数运算问题	21***	具体阶以数字 (或符号) 为元素的矩阵的加、减、乘等运算
	n 次代数运算问题	22***	矩阵的 n (或 k) 次幂
	数字矩阵求逆	23***	具体阶以数字为元素的矩阵的逆
	抽象矩阵代数运算	24***	没有给出具体元素的矩阵的代数运算
	矩阵方程	25***	求满足一定条件 (或等式) 的矩阵
	其他	26***	
向量组与矩阵的秩	数字向量组的线性相关性	31***	给定一个以数字作为元素的向量组 (所含向量个数往往是具体的), 判断其线性相关性等
	带参数向量组的线性相关性	32***	给定一个带有符号作为元素的向量组, 判断其线性相关性等
	抽象向量组的线性相关性	33***	没有给出元素的向量组的线性相关性
	数字矩阵的秩	34***	具体阶以数字作为元素的矩阵的秩的求法
	带参数矩阵的秩	35***	具体阶带参数的矩阵的秩的求法
	抽象矩阵的秩	36***	没有给出元素的矩阵的有关秩的问题
	等价问题	37***	矩阵等价问题
	其他	38***	
线性方程组	数字齐次方程组	41***	所有元素均为数字的齐次方程组的解法
	带参数齐次方程组	42***	带有参数的齐次方程组的解法
	数字非齐次方程组	43***	所有元素均为数字的非齐次方程组的解法
	带参数非齐次方程组	44***	带有参数元素的非齐次方程组的解法
	抽象方程组	45***	没有给出元素的方程组的有关问题
	其他	46***	

类 别		题目 编号	说 明
大类	小类		
特征值 理论与 相似矩 阵	数字矩阵的特征	51***	元素为数字的具体阶矩阵的特征问题
	抽象矩阵的特征	52***	没有给出元素的矩阵的特征问题
	相似矩阵与对角化	53***	矩阵的相似性与对角化问题
	反问题	54***	已知特征值与特征向量求矩阵
	其他	55***	
二次型	配方法化标准型	61***	用配方法化具体二次型为标准型
	正交变换法化标准型	62***	用正交变换法化具体二次型为标准型
	正定性	63***	判断二次型的正定性等
	其他	64***	
线性空 间	线性空间的定义与性质	71***	线性空间的验证等
	基底与维数	72***	基底、维数、过渡矩阵、坐标等问题
	线性变换	73***	线性变换验证等
	其他	74***	
选择题	行列式	81***	关于行列式的选择题
	矩阵代数运算	82***	关于矩阵代数运算的选择题
	向量组与矩阵的秩	83***	关于向量组与矩阵秩的选择题
	线性方程组	84***	关于方程组的选择题
	特征值理论与相似矩阵	85***	关于特征值理论与相似矩阵的选择题
	二次型	86***	关于二次型的选择题
	线性空间	87***	关于线性空间的选择题

目 录

第一章	行列式	1
1.1	逆序数	1
1.2	具体阶数字行列式	4
1.3	具体阶符号行列式	11
1.4	n 阶行列式	29
1.5	克拉默(Cramer)法则	57
1.6	其他	62
第二章	矩阵代数运算	64
2.1	简单代数运算	64
2.2	n 次代数运算	75
2.3	数字矩阵求逆	84
2.4	抽象矩阵代数运算	88
2.5	矩阵方程	104
2.6	其他	115
第三章	向量组与矩阵的秩	120
3.1	数字向量组的线性相关性	120
3.2	带参数向量组的线性相关性	135
3.3	抽象向量组的线性相关性	142
3.4	数字矩阵的秩	153
3.5	带参数矩阵的秩	160
3.6	抽象矩阵的秩	161
3.7	等价问题	168
3.8	其他	169
第四章	线性方程组	171
4.1	数字齐次方程组	171

4.2	带参数齐次方程组	178
4.3	数字非齐次方程组	181
4.4	带参数非齐次方程组	200
4.5	抽象方程组	225
4.6	其他	231
第五章	特征值理论与相似矩阵	232
5.1	数字矩阵的特征	232
5.2	抽象矩阵的特征	240
5.3	相似矩阵与对角化	251
5.4	已知特征值与特征向量求矩阵	271
5.5	其他	282
第六章	二次型	289
6.1	配方法化标准形	289
6.2	正交变换法化标准形	293
6.3	正定性	302
6.4	其他	312
第七章	线性空间	317
7.1	线性空间的定义与性质	317
7.2	基底与维数	322
7.3	线性变换	345
7.4	其他	368
第八章	选择题	370
8.1	行列式	370
8.2	矩阵代数运算	377
8.3	向量组与矩阵的秩	385
8.4	线性方程组	400
8.5	特征值理论与相似矩阵	404
8.6	二次型	413
8.7	线性空间	416
附录	用 Mathematica 软件解线性代数习题	419

第一章 行 列 式

1.1 逆序数

11001 计算排列 32514 的逆序数.

解 比 3 大排在 3 前面的数有 0 个, 比 2 大排在 2 前面的数有 1 个, 比 5 大排在 5 前面的数有 0 个, 比 1 大排在 1 前面的数有 3 个, 比 4 大排在 4 前面的数有 1 个, 故此排列的逆序数为:
 $0+1+0+3+1=5$.

11002 计算排列 45132 的逆序数.

解 此排列的逆序数为: $0+0+2+2+3=7$.

11003 计算排列 34521 的逆序数.

解 此排列的逆序数为: $0+0+0+3+4=7$.

11004 计算排列 24153 的逆序数.

解 此排列的逆序数为: $0+0+2+0+2=4$.

11005 计算排列 $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$ 的逆序数.

解 显然, 比 $1, 3, 5, \cdots, 2n-1$ 大且排在它们前面的数为 0 个, 比 2 大排在 2 前面的数有 $n-1$ 个, 比 4 大排在 4 前面的数有 $n-2$ 个, 比 6 大排在 6 前面的数有 $n-3$ 个, $\cdots$, 比 $2n-2$ 大排在 $2n-2$ 前面的数有 1 个, 比 $2n$ 大排在 $2n$ 前面的数有 0 个. 故此排列的逆序数为

$$(n-1)+(n-2)+(n-3)+\cdots+1+0=\frac{n(n-1)}{2}$$

11006 计算排列 $13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 42$ 的逆序数.

解 显然, 比 $1, 3, 5, \cdots, 2n-1$ 大且排在它们前面的数为 0 个, 比 $2n$ 大排在 $2n$ 前面的数有 0 个, 比 $2n-2$ 大排在 $2n-2$ 前面的数有 2 个, 比 $2n-4$ 大排在 $2n-4$ 前面的数有 4 个 ($2n, 2n-1, 2n-2,$

$2n-3$), $\dots$, 比 4 大排在 4 前面的数有 $2n-4$ 个, 比 2 大排在 2 前面的数有 $2n-2$ 个. 故此排列的逆序数为

$$(2n-2)+(2n-4)+\dots+4+2+0=\frac{n(2n-2)}{2}=n(n-1)$$

11007 设 $1, 2, \dots, n$ 的全排列 $p_1 p_2 \dots p_n$ 的逆序数为 τ , 则排列 $p_n p_{n-1} \dots p_1$ 的逆序数为 $\frac{n(n-1)}{2} - \tau$.

证明 对于 $1, 2, \dots, n$ 中任意一对数 (p, q) , 不是在 $p_1 p_2 \dots p_n$ 中构成逆序, 就是在 $p_n p_{n-1} \dots p_1$ 中构成逆序. 故 $p_1 p_2 \dots p_n$ 和 $p_n p_{n-1} \dots p_1$ 的逆序数的和刚好是 $1, 2, \dots, n$ 中所有有序数对 (p, q) 的个数 $\frac{n(n-1)}{2}$, 故

$$p_n p_{n-1} \dots p_1 \text{ 的逆序数} = \frac{n(n-1)}{2} - (p_1 p_2 \dots p_n \text{ 的逆序数}) = \frac{n(n-1)}{2} - \tau$$

11008 求出 j, k , 使得 $274j56k8$ 为偶排列.

解 当 $j=3, k=1$ 时,

$$\tau(274\underline{3}56\underline{1}8)=0+0+1+2+1+1+6+0=11$$

当 $j=1, k=3$ 时,

$$\tau(274\underline{1}56\underline{3}8)=0+0+1+3+1+1+4+0=10$$

故 $j=1, k=3$ 时 $274j56k8$ 为偶排列.

11009 选择 i 与 j , 使得 $1245i6j97$ 为奇排列.

解 当 $i=3, j=8$ 时,

$$\tau(1245\underline{3}6\underline{8}97)=0+0+0+0+2+0+0+2=4$$

当 $i=8, j=3$ 时,

$$\tau(1245\underline{8}6\underline{3}97)=0+0+0+0+0+1+4+0+2=7$$

所以 $i=8, j=3$.

11010 选择 i 与 j , 使得 $3972i15j4$ 为奇排列.

解 当 $i=6, j=8$ 时,

$$\tau(3972\underline{6}15\underline{8}4)=0+0+1+3+2+5+3+1+5=20$$

当 $i=8, j=6$ 时,

$$\tau(397281564) = 0+0+1+3+1+5+3+3+5=21$$

所以 $i=8, j=6$.

11011 选择 i 与 j , 使得 1245*i*6*j*97 为偶排列.

解 当 $i=3, j=8$ 时,

$$\tau(124536897) = 0+0+0+0+2+0+0+0+2=4$$

当 $i=8, j=3$ 时,

$$\tau(124586397) = 0+0+0+0+0+1+4+0+2=7$$

所以 $i=3, j=8$.

11012 选择 i 与 j , 使得 3972*i*15*j*4 为偶排列.

解 当 $i=6, j=8$ 时,

$$\tau(397261584) = 0+0+1+3+2+5+3+1+5=20$$

当 $i=8, j=6$ 时,

$$\tau(397281564) = 0+0+1+3+1+5+3+3+5=21$$

所以 $i=6, j=8$.

11013 设 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 为 $1, 2, \cdots, n$ 的全排列, 讨论排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 与 $p_n p_{n-1} \cdots p_1$ 的奇偶关系.

解 设 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 逆序数为 τ , 则 $p_n p_{n-1} \cdots p_1$ 的逆序数为 $\frac{n(n-1)}{2} - \tau$. 所以两个排列的逆序数的差为 $\frac{n(n-1)}{2} - 2\tau$, 此数的奇偶性取决于 $\frac{n(n-1)}{2}$ 的奇偶性. 故当 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ 时,

$p_1 p_2 \cdots p_n$ 与 $p_n p_{n-1} \cdots p_1$ 的奇偶相同; 当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ 时, 奇偶相反.

11014 设 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 为 $1, 2, \cdots, n$ 的全排列, $p_1 p_2 \cdots p_n$ 与 $p_n p_{n-1} \cdots p_1$ 的奇偶相同, 确定 n 应满足的条件.

解 设 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 逆序数为 τ , 则 $p_n p_{n-1} \cdots p_1$ 的逆序数为 $\frac{n(n-1)}{2} - \tau$. 所以两个排列的逆序数的差为 $\frac{n(n-1)}{2} - 2\tau$, 因为 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 与 $p_n p_{n-1} \cdots p_1$ 的奇偶相同, 此数应为偶数, 即 $\frac{n(n-1)}{2}$

为偶数,从而 $n=4k$ 或 $n=4k-1$.

11015 设 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 为 $1, 2, \cdots, n$ 的全排列, $p_1 p_2 \cdots p_n$ 与 $p_n p_{n-1} \cdots p_1$ 的奇偶相反, 确定 n 应满足的条件.

解 设 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 逆序数为 τ , 则 $p_n p_{n-1} \cdots p_1$ 的逆序数为 $\frac{n(n-1)}{2} - \tau$. 所以两个排列的逆序数的差为 $\frac{n(n-1)}{2} - 2\tau$, 因为 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 与 $p_n p_{n-1} \cdots p_1$ 的奇偶相反, 此数应为奇数, 即 $\frac{n(n-1)}{2}$

为奇数, 故 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ ($k=0, 1, 2, \cdots$).

11016 写出全部 4 元奇排列与 4 元偶排列.

解 4 元奇排列共有 12 个, 它们是: 1243, 1324, 1432, 2134, 2341, 2413, 3142, 3214, 3421, 4123, 4231, 4312; 4 元偶排列也有 12 个, 它们是: 1234, 1342, 1423, 2143, 2314, 2431, 3124, 3241, 3412, 4132, 4213, 4321.

1.2 具体阶数字行列式

12001 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$ 的值.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad D &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 45 \\ 0 & 0 & 17 & 115 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 17 & 115 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 17 & 115 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

12002 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$ 的值.

解 $D = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -7 & -5 \\ 0 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & -10 & -9 & -8 \end{vmatrix}$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -7 & -5 \\ 0 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

12003 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

的值.

解 $D = \begin{vmatrix} 0 & 16 & -10 & 11 \\ 0 & -24 & 18 & -19 \\ 0 & 10 & -5 & 5 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 16 & -10 & 11 \\ -24 & 18 & -19 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$$= 5 \begin{vmatrix} -6 & 1 & 0 \\ 14 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 40$$

12004 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ 的值.

$$\text{解 } D = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \times 2^3 = 48$$

$$12005 \text{ 计算行列式 } D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \text{ 的值.}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } D &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 10 \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 40 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 160 \end{aligned}$$

$$12006 \text{ 计算行列式 } D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \text{ 的值.}$$

$$\text{解 } D = \begin{vmatrix} 0 & -7 & -3 \\ 0 & -17 & -13 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & -3 \\ -17 & -13 \end{vmatrix} = 40$$

$$12007 \text{ 计算行列式 } D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} \text{ 的值.}$$

$$\text{解 } D = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 11 & 7 \\ 0 & 13 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 7 \\ 13 & 8 \end{vmatrix} = -3$$

12008 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$ 的值.

解 $D = \begin{vmatrix} 0 & 25 & 25 \\ 0 & 19 & 23 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 25 & 25 \\ 19 & 23 \end{vmatrix} = 100$

12009 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ 的值.

解 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -10 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -13 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & -10 \\ 7 & -13 \end{vmatrix} = -5$

12010 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$ 的值.

解 $D = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -13 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -13 \\ 0 & -33 & 102 \\ 0 & -11 & 34 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -33 & 102 \\ -11 & 34 \end{vmatrix} = 0$

12011 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ 的值.

解 $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1$

12012 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ 的值.

$$\text{解 } D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

12013 写出 5 阶行列式中包含 $a_{13}a_{25}$, 并带正号的所有项.

解 $a_{13}a_{25}a_{31}a_{44}a_{52}$; $a_{13}a_{25}a_{32}a_{41}a_{54}$; $a_{13}a_{25}a_{34}a_{42}a_{51}$

$$\text{12014 计算行列式 } D = \begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix} \text{ 的值.}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } D &= \begin{vmatrix} 246 & 100 & 327 \\ 1014 & 100 & 443 \\ -342 & 100 & 621 \end{vmatrix} = 600 \begin{vmatrix} 41 & 1 & 327 \\ 169 & 1 & 443 \\ -57 & 1 & 621 \end{vmatrix} \\ &= 600 \begin{vmatrix} 41 & 1 & 327 \\ 128 & 0 & 116 \\ -98 & 0 & 294 \end{vmatrix} = 600 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 128 & 0 & 500 \\ -98 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -29\,400\,000 \end{aligned}$$

$$\text{12015 计算行列式 } D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \text{ 的值.}$$

$$\text{解 } D = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 160$$

$$\text{12016 计算行列式 } D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} \text{ 的值.}$$

$$\text{解 } D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$12017 \text{ 设 } D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}, \text{求 } D_1 D_2.$$

$$\text{解 } D_1 D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -9 & 3 \\ 2 & -10 & 4 \\ 4 & -10 & 2 \end{vmatrix} = 12$$

$$12018 \text{ 计算行列式 } D = \begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 10 \\ -8 & 2 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} \text{ 的值.}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } D &= \begin{vmatrix} 0 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & 10 & 15 & 20 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -1 & -6 & 0 \\ 10 & 15 & 20 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -1 & -6 & 0 \\ 0 & -45 & 20 \\ 0 & -27 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -1800 \end{aligned}$$

$$12019 \text{ 计算行列式 } D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \text{ 的值.}$$

$$\text{解 } D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8$$