

FRACTAL AND FITTING

# 分形与拟合

沙震 阮火军 编著



浙江大學出版社

0189.3

# 分形与拟合

FRACTAL AND FITTING

沙 震 阮火军 编著

浙江大學出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

分形与拟合 / 沙震, 阮火军编著. —杭州: 浙江大学出版社, 2005. 3

ISBN 7-308-04125-5

I. 分... I. ①沙... ②阮... III. 分形几何  
N. O189. 3

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 016282 号

责任编辑 徐素君

出版发行 浙江大学出版社

(杭州浙大路 38 号 邮政编码 310027)

(E-mail: zupress@mail. hz. zj. cn)

(网址: [http://www. zjupress. com](http://www.zjupress.com))

排 版 浙江大学出版社电脑排版中心

印 刷 浙江大学印刷厂

开 本 850mm×1168mm 1/32

印 张 6.75

字 数 170 千

版 印 次 2005 年 3 月第 1 版 2005 年 3 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 7-308-04125-5/O · 320

定 价 12.00 元

## 内 容 简 介

本书共分六章,前三章介绍了分形几何中最重要的基础知识,主要包括分形集概念、分形集的维数和迭代函数系的理论,后三章主要论述分形几何在图象压缩、曲线拟合应用中的理论和方法.

本书可作为数学系高年级本科生或相关专业研究生的教材或参考书,也可供对分形理论或应用感兴趣的读者学习参考.

## 前 言

分形几何是现代非线性科学中一个十分重要的研究领域，它的思想和方法已经渗透到自然科学中的各个领域。图象压缩和曲线拟合原来分别是属于信息科学和应用数学中的研究课题，但经Barnsley等人开创性的工作，将它们与分形几何联系了起来。他们发明了分形图象压缩技术，这是一种新的、十分有效的方法，取得了巨大成功，引起了各国研究者的浓厚兴趣。在1986年Barnsley又提出了分形插值函数概念，它也是一种新的插值方法，特别在非光滑曲线的拟合中显示其独特的优越性。这类分形插值函数，是定义在区间上的连续函数，但它不是用显式表达式来定义的，而是由一组映射所生成的吸引子来确定的。研究这类函数的一些性质（例如光滑性等）相当困难，目前只有在较简单的情况下有些结果。在研究方法上，传统的一些分析方法一般不能直接利用，因而必须开辟一些新的方法和理论。为此分形插值为函数论提供了一个崭新的研究领域。本书的目的之一就是为了抛砖引玉，希望能引起广大读者的注意并加入到这一研究领域中来。

作者多年来为函数逼近论方向的研究生及工科研究生开设了

《分形基础及应用》课程。本书是在该课程讲义的基础上，经多次修改和扩充而编写成的。本书可作为数学系高年级本科生或相关专业研究生的教材或参考书，也可供对分形理论或应用感兴趣的读者学习参考。

全书共分六章。第一章从一些典型的分形集开始，介绍分形的概念。第二章介绍 Hausdorff 维数及 Box 维数。第三章讲述迭代函数系的理论。第四章介绍拼贴定理及其应用。第五章介绍分形插值函数的定义、维数、光滑性以及它的微积分。第六章讨论分形插值拟合问题，介绍了分形插值的误差及拟合方法。

感谢浙江大学数学系尹永成教授和汪国昭教授对本书的大力支持和帮助。

感谢董斌博士和周洪岳博士为本书提供了有关的计算机程序。

感谢刘寅立硕士为本书的编辑排版提供了很大的帮助。

感谢我们的导师郭竹瑞教授的关心和支持。

感谢浙江大学出版社徐素君女士的鼓励和支持。

本书作者的研究工作得到了国家自然科学基金、浙江省自然科学基金的支持，在此表示深切的感谢。

由于作者学识浅薄，掌握资料有限，书中错误、不当之处在所难免，敬请读者批评指正。

沙震 阮火军

2005 年元月

# 目 录

|                                   |     |
|-----------------------------------|-----|
| 前 言.....                          | i   |
| 目 录 .....                         | iii |
| 第一章 分 形 集.....                    | 1   |
| § 1.1 引 论 .....                   | 1   |
| § 1.2 集合 .....                    | 8   |
| § 1.3 Cantor (康托) 三分集.....        | 11  |
| § 1.4 Sierpinski (谢尔宾斯基) 垫片 ..... | 16  |
| § 1.5 Koch (科克) 曲线 .....          | 18  |
| § 1.6 随机分形的例子 .....               | 23  |
| § 1.7 什么是分形.....                  | 25  |
| 第二章 维 数 .....                     | 27  |
| § 2.1 Lebesgue (勒贝格) 测度 .....     | 28  |

|              |                                |           |
|--------------|--------------------------------|-----------|
| § 2.2        | Hausdorff (豪斯道夫) 测度 .....      | 32        |
| § 2.3        | Hausdorff 维数 .....             | 36        |
| § 2.4        | Box 维数 (盒维数) .....             | 40        |
| § 2.5        | 函数图象的维数 .....                  | 46        |
| <b>第 三 章</b> | <b>迭代函数系 .....</b>             | <b>50</b> |
| § 3.1        | 度量空间 .....                     | 50        |
| § 3.2        | 空间 $(\mathcal{H}(X), h)$ ..... | 54        |
| § 3.3        | 迭代函数系 (IFS) .....              | 60        |
| § 3.4        | 仿射变换和相似变换 .....                | 70        |
| 3.4.1        | 仿射变换 .....                     | 70        |
| 3.4.2        | 相似变换 .....                     | 73        |
| § 3.5        | 带概率的迭代函数系 .....                | 77        |
| § 3.6        | Hutchinson 度量 .....            | 82        |
| § 3.7        | 随机算法 .....                     | 90        |
| <b>第 四 章</b> | <b>拼贴定理及其应用 .....</b>          | <b>97</b> |
| § 4.1        | 拼贴 (Collage) 定理 .....          | 98        |
| § 4.2        | 局部迭代函数系 .....                  | 104       |
| § 4.3        | LIFS 拼贴方法 .....                | 107       |
| § 4.4        | 离散局部迭代函数系 .....                | 111       |
| § 4.5        | 实例 .....                       | 117       |



|                 |                         |                |
|-----------------|-------------------------|----------------|
| <b>第五章</b>      | <b>分形插值</b> .....       | <b>121</b>     |
| § 5.1           | 分形插值函数 .....            | 123            |
| § 5.2           | 自仿射分形插值函数的盒维数 .....     | 131            |
| § 5.3           | 分形插值函数的光滑性 .....        | 139            |
| § 5.4           | 分形插值函数的微积分 .....        | 150            |
| § 5.5           | 递归分形插值函数 .....          | 158            |
| <br><b>第六章</b>  | <br><b>分形插值拟合</b> ..... | <br><b>170</b> |
| § 6.1           | 一类函数方程 .....            | 171            |
| § 6.2           | 分形插值误差 .....            | 178            |
| § 6.3           | 分形插值拟合(一) .....         | 183            |
| § 6.4           | 分形插值拟合(二) .....         | 188            |
| <br><b>参考文献</b> | <br>.....               | <br><b>195</b> |
| <br><b>索引</b>   | <br>.....               | <br><b>201</b> |

# 第一章 分形集

## § 1.1 引 论

在经典的欧几里得几何中，人们可以用直尺与圆规去画线段、矩形、三角形和圆等规则的图形，又用这些图形去描述一些常见的物体，例如墙壁、车轮、桌子等。这是很自然的，因为这些对象本身就是由这些规则图形拼装而成的。然而自然界是很复杂的，还存在着许多极其复杂、不规则的物体，譬如海岸线、山峰的边缘、人的血管系统等。同时在科学研究中也常会遇到一些振荡曲线，如地震波、脑电波之类的图形。所有这些很难用欧氏几何来描述。下面再举两个有趣的例子。

给定一个映射  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ，取  $p_0 \in \mathbb{R}^2$  为初始点，作迭代序列：

$$p_0, f(p_0), f(f(p_0)), f(f(f(p_0))), \dots$$

为了方便，用  $f^k$  表示  $f$  的  $k$  重复合  $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ 个}}$ ，并规定  $f^0(p_0) =$

$p_0$ , 则上述序列可改写成:

$$f^0(p_0), f^1(p_0), f^2(p_0), f^3(p_0), \dots \quad (*)$$

现在观察这个迭代序列最终会有什么结果?

### 一、Martin 过程

取映射  $f$ :

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - \operatorname{sgn}(x)\sqrt{|bx - c|} \\ a - x \end{pmatrix},$$

其中

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

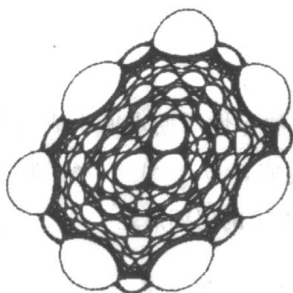
由该  $f$  产生的迭代过程  $(*)$ , 是由 Barry Martin 提出的, 所以称为 Martin 过程.

Martin 过程是从一个初始点出发来生成图形的. 一般令  $p_0 = (0, 0)$ . 经过计算后生成一个新点, 在屏幕上打上该点. 然后以这个新点的坐标作为  $(x, y)$ , 进行下一次迭代, 得到又一个新点, 再在屏幕上打上这点. 如此不断进行下去, 最终将在屏幕上出现一幅奇妙的图案. 参数  $a, b, c$  完全决定了 Martin 图的形态, 图 1.1 是不同参数时的图形, 它们都迭代了 50 万次.

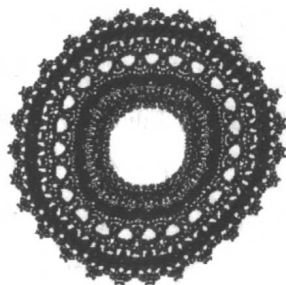
### 二、Julia 集

取  $f$  是复平面  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  的  $n$  阶多项式, 即

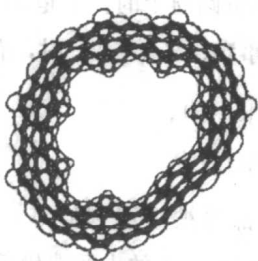
$$f(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i \quad (n \geq 2).$$



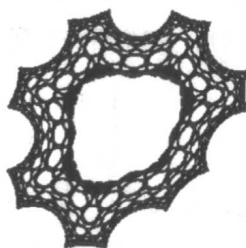
$$a = 68, b = 75, c = 83$$



$$a = -200, b = -4, c = -80$$



$$a = -137, b = 17, c = 4$$



$$a = -536, b = 102, c = 67$$

图 1.1 不同参数下的 Martin 图

设  $w \in \mathbb{C}$ , 若  $f(w) = w$ , 则称  $w$  为  $f$  的不动点. 又如果存在某个正整数  $p$ , 有  $f^p(w) = w$ , 则称  $w$  是  $f$  的周期点. 而使  $f^p(w) = w$  成立的最小的  $p$ , 称为  $w$  的周期.  $\{w, f(w), \dots, f^{p-1}(w)\}$  称为它的周期轨道. 设  $w$  是周期  $p$  的周期点, 记  $\lambda = (f^p)'(w)$ .

1° 若  $\lambda = 0$ , 则称  $w$  是超吸引的;

2° 若  $0 \leq |\lambda| < 1$ , 则称  $w$  是吸引的;

3° 若  $|\lambda| = 1$ , 则称  $w$  是中性的;

4° 若  $|\lambda| > 1$ , 则称  $w$  是斥性的.

所谓  $f$  的 Julia 集  $J(f)$  就是由  $f$  的斥性周期点所组成的集合的闭包\*. 先举一个简单的例子来说明, 设  $f(z) = z^2$ , 此时有  $f^k(z) = z^{2^k}$ . 由方程  $f^p(w) = w$  可解得  $f$  的周期点是

$$w_q = e^{\frac{2\pi i}{2^p-1} \cdot q}, \quad q = 0, 1, \dots, 2^p - 2.$$

容易验证  $|(f^p)'(w_q)| = 2^p \geq 2$ , 因此这些  $w_q$  都是斥性周期点. 可见所有的斥性周期点是稠密地分布在单位圆周上的, 于是  $J(f)$  就是单位圆周. 我们再注意到下面的简单事实: 当  $k \rightarrow \infty$  时, 有

$$\begin{cases} f^k(z) \rightarrow 0, & \text{如果 } |z| < 1, \\ f^k(z) \rightarrow \infty, & \text{如果 } |z| > 1. \end{cases}$$

就是说, 对  $|z| < 1$  的点, 经迭代后都将被吸引到原点; 而当  $|z| > 1$  时, 经迭代后将趋于无穷. 只有  $|z| = 1$  的点经迭代后仍停留在单位圆周上. 这样平面被分成两个区域, 而它们的边界就是  $f(z) = z^2$  的 Julia 集  $J(f)$ .

现在若稍微变动一下, 令  $f(z) = z^2 + C$ , 当  $C$  为非零值时, 情况就很不一样. 例如  $C = -0.12375 + 0.56508i$  时, 经迭代后, 虽仍出现上面三种情况, 但内部吸引子不再是零点, 而且边界 (即  $f$  的 Julia 集) 变得不光滑了 (见图 1.2 的边界), 这边界与海岸线很相似, Mandelbrot 称它有分形结构.

在计算机上画映射  $f(z) = z^2 + C$  的 Julia 集并不困难, 可采用逃逸时间算法 (escape time algorithm), 它的原理是这样的:

\* 闭包概念可参考本书第三章.

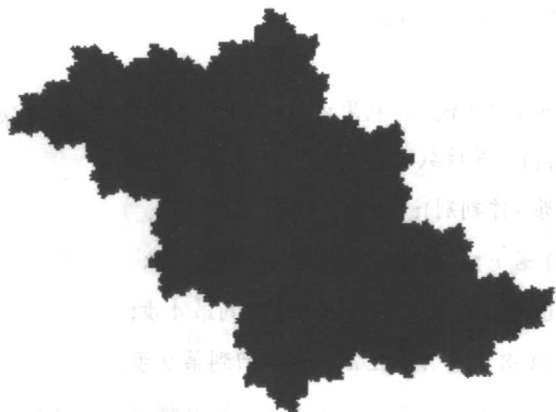


图 1.2 Julia 集

令  $z = x + iy$ ,  $C = p + iq$ . 由映射  $f(z) = z^2 + C$  可得迭代过程

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k^2 - y_k^2 + p, \\ y_{k+1} = 2x_k y_k + q. \end{cases} \quad (**)$$

设显示器的分辨率为  $M \times N$ , 用  $K + 1$  种颜色显示 Julia 集合 (例如, 可取  $K = 200$ ), 编号从  $0 \sim K$ ,  $0$  为黑色.

第 0 步: 选定参数  $C = p + iq$ , 取  $x_{\min} = y_{\min} = a$  (例如  $-1.5$ ),  $x_{\max} = y_{\max} = b$  (例如  $1.5$ ), 取  $R$  充分大 (例如  $100$ ). 定义发散区域  $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 > R^2\}$ , 当某轨道进入区域  $V$  时, 就认为该轨道是发散的.

设  $\Delta x = (x_{\max} - x_{\min}) / (M - 1)$ ,  $\Delta y = (y_{\max} - y_{\min}) / (N - 1)$ . 对所有象素点  $(n_x, n_y)$ ,  $n_x = 0, 1, \dots, M - 1$ ,  $n_y = 0, 1, \dots, N - 1$ , 完成下面的过程.

第 1 步: 设  $x_0 = x_{\min} + n_x \cdot \Delta x$ ,  $y_0 = y_{\min} + n_y \cdot \Delta y$ ,  $k = 0$ .

第 2 步 (作迭代): 利用迭代方程 (\*\*) 作迭代, 由  $(x_k, y_k)$  计算  $(x_{k+1}, y_{k+1})$ , 并计数  $k = k + 1$ .

第 3 步 (作判别): 计算  $r = x^2 + y^2$ ,

(i) 若  $r > R$ , 取颜色  $k$ , 转到第 4 步;

(ii) 若  $k = K$ , 取颜色 0, 转到第 4 步;

(iii) 若  $r \leq R$ , 且  $k < K$ , 回到第 2 步.

第 4 步: 在象素点  $(n_x, n_y)$  上着第  $k$  种颜色, 转到下一个点, 并从第 1 步开始.

图 1.3 中四幅图都是用逃逸时间算法画的.

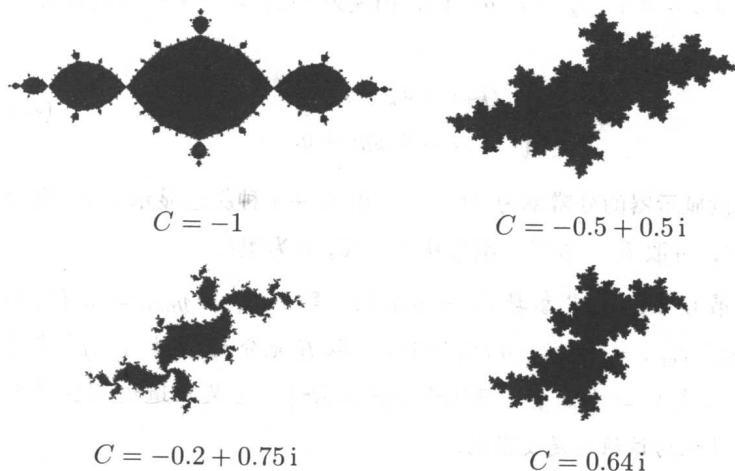


图 1.3 Julia 集

我们看到, 由 Martin 过程产生的图以及 Julia 集一般都是极其

复杂的, 用欧氏几何去描述它们是不可能的, 而这些都是分形几何的研究对象, 当然对这类问题的研究是很困难的. 作为分形几何完整理论的建立可能还需要长时间的艰苦努力, 但分形这个词语已不陌生, 它已为许多理论及实践工作者所熟悉.

分形 (Fractal) 这个新的术语是美籍法国数学家 B.B.Mandelbrot 于 1975 年创造的. *Fractal* 出自拉丁语 *fractus* (碎片, 支离破碎)、英文 *fractured* (断裂) 和 *fractional* (碎片, 分数), 说明分形是用来描述和处理粗糙、不规则的对象. 1982 年他的名著 *The Fractal Geometry of Nature* 出版, 分形这个概念被广泛传播, 成为当时全球科学家们议论最为热烈、最感兴趣的热门话题之一. 除了物理学家、数学家、化学家、地震学家、材料学家之外, 经济学家、音乐家乃至画家、电影制作者都参加到这一行列中. 因此, 当时一位美国物理学家 J.A.Wheeler 说: 可以相信, 明天谁不熟悉分形, 谁就不能被认为是科学上的文化人.

现在分形几何已成为非线性科学中的一个重要分支, 它的思想和理论已经渗透到自然科学中的各个领域. 在数学、材料科学、地质勘探、疾病诊断、计算机及信息科学领域中都得到了广泛的应用, 尤其在下面三个方向上取得了十分可观的成就.

- 1° 图象、数据压缩方面的研究;
- 2° 自然景物的模拟;
- 3° 分形生长模型.

那么, 什么是分形呢? 遗憾的是, 要给出确切的严格定义似乎还为时尚早. 为此, 我们暂且不管如何去定义分形这个概念, 而是去观察一些大家熟悉的分形集, 它们有哪些共同的特点和性质.



## § 1.2 集合

集合是分形理论中一个基本的数学概念. 一个分形集实际上就是由某些特殊的点所组成的集合.

所谓集合 (或简称集), 乃是具有某种性质、可以互相区别的事物的全体, 通常用大写字母  $A, B, \dots, X, \dots$  表示. 以后我们总是在  $n$  维欧氏空间  $\mathbb{R}^n$  中讨论分形问题, 为此, 遇到的集合都是  $\mathbb{R}^n$  中的点集.

设  $A$  是一个集合, 当  $a$  是  $A$  中的一个元素时, 称  $a$  属于  $A$ , 记为  $a \in A$ . 若  $a$  不是  $A$  中的一个元素, 记作  $a \notin A$  或  $a \notin A$ . 不含任何元素的集合称为空集, 记作  $\emptyset$ .

当集合  $A$  的元素都属于集合  $B$  时, 称集合  $A$  是集合  $B$  的子集, 或者说集合  $A$  包含于集合  $B$ , 记作  $A \subset B$  或  $B \supset A$ .

当且仅当  $A \subset B$  又  $B \subset A$  时, 称集合  $A$  与集合  $B$  相等, 记作  $A = B$ .

由集合  $A$  与集合  $B$  的一切元素组成的集合, 叫做集合  $A$  与集合  $B$  的并集, 记作  $A \cup B$ , 即

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

由集合  $A$  与集合  $B$  的公共元素组成的集合, 叫做集合  $A$  与集合  $B$  的交集, 记作  $A \cap B$ , 即

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$