数字系统逻辑设计

曲兆瑞 编著

山东大学出版社

数字系统逻辑设计

曲兆瑞　编著

山东大学出版社

1991. 9

鲁新登字09号

数字系统逻辑设计
曲兆瑞 编著
●
山东大学出版社出版
山东省新华书店发行
山东安丘一中印刷厂印刷
●
787×1092毫米 16开本 17.75印张 410千字
1991年9月第1版 1995年9月第3次印刷
印 数 4000—8000
ISBN7—5607—0548—0/O·35
定价：15.80元

前　言

在人们的生活及工作中离不开各种物理量，通常用信息表示物理量的数值特征，以便于信息的传递、加工和处理。可用两种量值表示信息：一是模拟量，它是用一种易于传递加工和处理的另一种物理量来模拟实际的物理量，如气温表，用汞柱高低表示气温的变化，它表示的是一种在时间上连续变化的量。对模拟量进行传递、加工和处理的系统，称为模拟系统，如自动化仪表控制，模拟电子计算机等都是模拟系统。二是数字量，它是用某些时刻的数字大小表示实际的物理量，如表示气温高低，用某些时刻的数值大小来表示，它是将连续变化的物理量用离散的、有限的数字量表示，它的精度取决于数字的位数和读数的间隔。对数字量进行传递、加工和处理的系统称为数字系统，如线切割机床、程控装置、数字电子计算机等，都是数字系统。

本课程就是研究数字系统逻辑设计的基础，简称数字逻辑。数字逻辑不但是计算机专业的重要基础课，也是自动控制、电子类专业等不可缺少的重要基础课，它也是数字系统自动化设计的重要组成部分。

本教材是经过几年的教学实践和实际需要反复修改、增删而编写的，它力求较全面地反映数字系统的经典设计方法和理论，反映现代数字设计的一些新的思想和方法，并力求理论与实践的紧密结合。在修改过程中得到了马绍汉教授的指导和帮助，在此表示感谢。由于编者水平有限，不当之处请指正。

曲兆瑞　　1991年5月

目　　录

前言
第一章　数据信息的表示……………………………………………………………………（1）
1·1　进位记数制 ……………………………………………………………………（1）
1·2　编码 ……………………………………………………………………………（12）
1·3　数的定点表示与浮点表示 ……………………………………………………（22）
1·4　带符号的二进制数表示 ………………………………………………………（26）
1·5　校验码 …………………………………………………………………………（37）
练习一 ………………………………………………………………………………（44）
第二章　逻辑代数和逻辑函数的化简方法………………………………………………（48）
2·1　逻辑代数及逻辑门 ……………………………………………………………（48）
2·2　逻辑代数基本公式、主要定理及规则 ………………………………………（53）
2·3　简化逻辑函数的代数法 ………………………………………………………（57）
2·4　卡诺图法 ………………………………………………………………………（58）
2·5　奎恩—麦克拉斯基法 …………………………………………………………（72）
*2·6　多输出函数的化简 ……………………………………………………………（76）
2·7　逻辑函数化简中的几个实际问题 ……………………………………………（80）
练习二…………………………………………………………………………………（84）
第三章　组合逻辑设计……………………………………………………………………（91）
3·1　逻辑赋值及组合逻辑网络分析 ………………………………………………（91）
3·2　编码器、译码器及代码转换电路 ……………………………………………（96）
3·3　组合逻辑设计的基本过程 ……………………………………………………（102）
3·4　二进制运算电路 ………………………………………………………………（104）
3·5　带符号的二进制数的加／减法器的设计 ……………………………………（110）
3·6　十进制加法器／减法器 ………………………………………………………（116）
3·7　组合逻辑电路中的冒险现象 …………………………………………………（120）
练习三…………………………………………………………………………………（125）
第四章　同步时序逻辑网络………………………………………………………………（129）
4·1　触发器及触发器转换 …………………………………………………………（129）
4·2　时序逻辑网络概述 ……………………………………………………………（138）
4·3　同步时序逻辑网络的分析方法 ………………………………………………（139）
4·4　同步时序逻辑网络的设计方法概述 …………………………………………（151）
4·5　原始状态表的建立 ……………………………………………………………（155）

4·6 状态表的简化 ……………………………………………………………………(171)
4·7 状态分配 ……………………………………………………………………(182)
练习四……………………………………………………………………(187)
第五章 异步时序逻辑网络……………………………………………………………………(193)
5·1 脉冲型异步时序网络的分析 ……………………………………………………………………(193)
5·2 脉冲型异步时序网络的设计 ……………………………………………………………………(196)
5·3 电位型异步时序网络的分析 ……………………………………………………………………(208)
5·4 电位型异步时序网络的设计 ……………………………………………………………………(215)
5·5 关于消除险态的讨论 ……………………………………………………………………(225)
练习五 ……………………………………………………………………(233)
第六章 使用中大规模数字集成电路的数字系统设计……………………………………………………………………(239)
6·1 使用集成电路功能方框图进行数字系统逻辑设计 ……………………………………………………………………(240)
6·2 只读存贮器(ROM)阵列……………………………………………………………………(256)
6·3 可编程序逻辑阵列(PLA)……………………………………………………………………(260)
6·4 使用中大规模集成电路的RAM方法……………………………………………………………………(266)
练习六……………………………………………………………………(274)
参考资料……………………………………………………………………(277)

第一章　数据信息的表示

数字系统是对数字量进行传递、加工和处理的系统。任何信息在数字系统中都必须转化为数字化的信息才能被识别，进而进行传递、加工和处理。如数据、字母、各种文字符号及图形等在数字系统中都要表示成这种离散的、有限的数字化信息。数字化信息的每一位只允许选用有限的几个值，如采用十进制记数制表示，每位只允许选用0、1、2、3、4、5、6、7、8、9十个值表示，如采用二进制记数制表示，每位只允许选用0、1两个值表示。若要表示一个数据或一个字符，或其他约定含义的某种信息，就要用若干位数字量的组合予以表示。数字系统是由电子线路构成的，电子线路的开和关，导通和截止，低电平和高电平等两种离散的信号可与二进制记数制的0和1对应，即在物理上易于实现二进制记数制。另外，又由于二进制数具有运算简单，节省器材等优点。所以，在数字系统中广泛采用二进制记数系统。日常生活中，人们通常采用十进制记数，在计时系统中采用十二进制、二十四进制及六十进制记数等等，这就存在一个不同进位记数制的转换问题。数字、字母及各种文字符号在数字系统中也必须以二进制的形式出现，这又是编码问题。本章主要解决：进位记数制、不同数制的转换、字符表示、数的定点与浮点表示、带正负号数的表示以及校验码等。

1·1　进位记数制

1·1·1　进位记数制的基本概念

进位记数制指按进位的方式记数。如：十进制是按“逢十进一”记数，六十进制是按“逢六十进一”记数。进位记数制的基本要素是：该数制的元素或状态；该数制元素的个数，即该数制的基数；该数制数位的权；数制运算基本规则是：“逢基数进位”、“借一为基数”。

这里所涉及到的数字，一般采用位置表示法，数码（数制元素）处在不同位置（不同数位）时它所代表的数值不同，这种与位置有关的表示法称做位置表示法。某位所具有的位值即位权。位权是以基数的幂次来表示的，幂次为所在位的顺序号。例如十进制数232.25为其位置表示，各位的权依次（从高位始）为10^2、10^1、10^0、10^{-1}、10^{-2}，对上述十进制数采用按权展开式（多项式）为

$$232.25=2\times10^2+3\times10^1+2\times10^0+2\times10^{-1}+5\times10^{-2}$$

由此知，每位数码所表示的数值为该数码乘以本位的位值（位权），而基数为相邻两位的权之比值。

一般十进制数N可表示为

$$
\begin{aligned}
(N)_{10} &= (q_n q_{n-1} \cdots q_1 q_0 . q_{-1} \cdots q_{-m})_{10} \\
&= q_n 10^n + q_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + q_1 10^1 + q_0 10^0 + q_{-1} 10^{-1} \\
&\quad + q_{-2} 10^{-2} + \cdots + q_{-m} 10^{-m} \\
&= \sum_{i=-m}^{n} q_i 10^i
\end{aligned}
$$

式中：$q_i = 0, 1, 2, \cdots, 9$

由十进制记数系统可以推出一般的以r为基数的R进制数N

$$
\begin{aligned}
(N)_r &= (q_n q_{n-1} \cdots q_1 q_0 . q_{-1} \cdots q_{-m})_r \\
&= q_n r^n + q_{n-1} r^{n-1} + \cdots + q_1 r^1 + q_0 r^0 + q_{-1} r^{-1} + \cdots + q_{-m} r^{-m} \\
&= \sum_{i=-m}^{n} q_i r^i \qquad (1 \cdot 1-1)
\end{aligned}
$$

式中：$q_i = 0, 1, \cdots, r-1$。

R进制的运算规则为“逢R进一，借一当R”。

1·1·2 数字系统中常用的进位记数制

数字系统中，一般都采用二进制记数系统，其它进位记数制也都是以二进制记数系统为基础的。

1．二进制记数系统

二进制数的每一位只能是0、1两个数中的一个，即二进制记数系统的元素只有0和1；该数制的基数为2(在二进制中表示为10)；该数制的位权为2的幂次。例如二进制数

$$
\begin{aligned}
11101000.01 &= 1\times2^7 + 1\times2^6 + 1\times2^5 + 0\times2^4 + 1\times2^3 + 0\times2^2 \\
&\quad + 0\times2^1 + 0\times2^0 + 0\times2^{-1} + 1\times2^{-2}
\end{aligned}
$$

一般二进制数N可表示为

$$
\begin{aligned}
(N)_2 &= (q_n q_{n-1} \cdots q_1 q_0 . q_{-1} \cdots q_{-m})_2 \\
&= q_n\times2^n + q_{n-1}\times2^{n-1} + \cdots + q_1\times2^1 + q_0\times2^0 + q_{-1}\times2^{-1} \\
&\quad + \cdots + q_{-m}\times2^{-m}
\end{aligned}
$$

式中，$q_i = 0$、1。

n位无符号的二进制整数表示的范围是$0\sim(2^n-1)$，n位二进制代码所能表示的状态组合是2^n种。

二进制数的运算规则是“逢二进一，借一当二”，例如，10101111＋00111001与10101111－00111001运算过程是

进位	0 1 1 1 1 1 1	借位	1 1 1 0 0 0 0
被加数	1 0 1 0 1 1 1 1	被减数	1 0 1 0 1 1 1 1
+) 加数	0 0 1 1 1 0 0 1	−) 减数	0 0 1 1 1 0 0 1
和	1 1 1 0 1 0 0 0	差	0 1 1 1 0 1 1 0

故　10101111＋00111001＝11101000

10101111－00111001＝01110110

二进制数的乘法、除法运算与十进制数的类似，不同之处为基数不同，故进位、借

位不同。

2．八进制记数系统

八进制数的每一位只能是0、1、2、3、4、5、6、7八个数中的一个，即八进制记数系统的元素只有0～7，该数制的基数为8（在八进制中表示为10）；该数制的位权为8的幂次。例如八进制数

$$350.2=3\times8^2+5\times8^1+0\times8^0+2\times8^{-1}$$

一般八进制数N可表示为

$$\begin{aligned}(N)_8&=(q_n q_{n-1}\cdots q_1 q_0\cdot q_{-1}\cdots q_{-m})_8\\&=q_n\times8^n+q_{n-1}\times8^{n-1}+\cdots+q_1\times8^1+q_0\times8^0\\&\quad+q_{-1}\times8^{-1}+\cdots+q_{-m}\times8^{-m}\end{aligned}$$

式中，$q_i=0$、1、2、3、4、5、6、7。

n位无符号的八进制整数表示的范围是$0\sim(8^n-1)$，n位八进制代码所能表示的状态组合是8^n种。

八进制数的运算规则是“逢八进一，借一当八”，例如，257＋071与257－071运算过程是：

进　位	1 1		借　位	1 0
被加数	2 5 7		被减数	2 5 7
+）加　数	0 7 1		-）减　数	0 7 1
和	3 5 0		差	1 6 6

故　$257+071=350$

$257-071=166$

八进制的乘法、除法运算与上类似，请自己验证。

3．十六进制记数系统

十六进制记数系统的元素有十六个：0、1、2、3、4、5、6、7、8、9、A、B、C、D、E、F，其中A、B、C、D、E、F为10、11、12、13、14、15的表示；该数制的基数为16(在十六进制中仍表示为10)；该数制的位权为16的幂次。例如十六进制数

$$\begin{aligned}E8.4&=E\times16^1+8\times16^0+4\times16^{-1}\\&=14\times16^1+8\times16^0+4\times16^{-1}\end{aligned}$$

一般十六进制数N可表示为

$$\begin{aligned}(N)_{16}&=(q_n q_{n-1}\cdots q_1 q_0\cdot q_{-1}\cdots q_{-m})_{16}\\&=q_n16^n+q_{n-1}16^{n-1}+\cdots+q_1 16^1+q_0 16^0+\\&\quad+q_{-1}16^{-1}+\cdots q_{-m}16^{-m}\end{aligned}$$

式中，$q_i=0$、1、2、3、4、5、6、7、8、9、A、B、C、D、E、F。

十六进制数的运算规则是“逢十六进一，借一当十六”，例如$A9+3F$与$A9+3F$运算过程是：

进　位	1		借　位	1
被加数	A 9		被减数	A 9
+）加　数	3 F		-）减　数	3 F
和	E 8		差	6 A

故　$A9+3F=E8$　　　　　　$A9-3F=6A$

习惯上用进位记数制的英文缩写B、Q、D、H分别缀在数字的后面以表示该数字为二进制数、八进制数、十进制数、十六进制数的表示。例如

$$(11101000.01)_2=11101000.01B$$

$$(350.2)_8=350.2Q$$

$$(232.25)_{10}=232.25D$$

$$(E8.4)_{16}=E8.4H$$

1·1·3　各种进位记数制间的相互转换

在数字系统中采用二进制数表示，在书写时往往采用八进制数或十六进制数表示，而人们习惯上仍采用十进制数表示，这就存在不同数制表示的数之间相互转换的问题。

1．任意进制数转换成十进制数

进位记数制都是有权表示，都可以表示成按权展开的多项式，即任意R进制数N可表示为式(1·1—1)。

将q_i，r表示成十进制记数系统中的数表示后，有：

（1）按权相加法

将式（1·1—1）中的数表示成在十进制记数系统中的数表示后，按十进制的运算法则直接按权相加后即可实现转换。例如

$$(11101000.01)_2=(1\times2^7+1\times2^6+1\times2^5+1\times2^3+1\times2^{-2})_{10}$$
$$=(232.25)_{10}$$

$$(350.2)_8=(3\times8^2+5\times8^1+2\times8^{-1})_{10}$$
$$=(232.25)_{10}$$

$$(E8.4)_{16}=(14\times16^1+8\times16^0+4\times16^{-1})_{10}$$
$$=(232.25)_{10}$$

（2）逐次被基数乘除法

将式（1·1—1）变换为

$$(N)_r=(N_1+N_2)_r$$
$$=[(q_nq_{n-1}\cdots q_1q_0)+(q_{-1}\cdots q_{-m})r^{-m}]_r$$

式中

$(N_1)_r=(q_nq_{n-1}\cdots q_1q_0)_r$为整数部分。

$(N_2)_r=(q_{-1}\cdots q_{-m})_r\cdot r^{m}$为小数部分。

对整数部分$(N_1)_r$有

$$(N_1)_r=[(\cdots(q_nr+q_{n-1})r+\cdots+q_2)r+q_1]r+q_0 \qquad (1\cdot1—2)$$

将式（1·1—2）表示为

$$\begin{aligned}&q_n=S_n\\&S_nr+q_{n-1}=S_{n-1}\\&\quad\vdots\\&S_2r+q_1=S_1\end{aligned} \qquad (1\cdot1—3)$$

$$S_1 r + q_0 = S_0 = (N_1)_r = (N_1)_{10}$$

对式(1·1—3)中q_i、r用十进制数表示，按十进制的运算规则计算，可求出R进制整数$(N_1)_r$转换成十进制数的整数部分$(N_1)_{10}$。例如

求$(11101000)_2 = (?)_{10}$

$1\times2+1=3$

$3\times2+1=7$

$7\times2+0=14$

$14\times2+1=29$

$29\times2+0=58$

$58\times2+0=116$

$116\times2+0=232$

即 $(11101000)_2=(232)_{10}$

求 $(350)_8=(?)_{10}$

$3\times8+5=29$

$29\times8+0=232$

即 $(350)_8=(232)_{10}$

任意进制整数转换成十进制整数的过程是：把待转换数的每一位先表示为十进制数表示，然后最高位乘基数加相邻低位，部分结果再乘基数加相邻低位，逐次进行下去，直到出现加最低位为止。

对小数部分$(N_2)_r$有

$$(N_2)_r = [(\cdots(q_{-m}r^{-1}+q_{-(m-1)})r^{-1}+\cdots+q_{-2}]r^{-1} + q_{-1}]r^{-1} \quad (1\cdot1—4)$$

将式(1·1—4)表示为

$$\begin{aligned} &0 = S_{m+1} \\ &(S_{m+1}+q_{-m})r^{-1}=S_m \\ &(S_m+q_{-(m-1)})r^{-1}=S_{m-1} \\ &\quad\vdots \\ &(S_3+q_{-2})r^{-1}=S_2 \\ &(S_2+q_{-1})r^{-1}=S_1=(N_2)_r=(N_2)_{10} \end{aligned} \quad (1\cdot1—5)$$

对式(1·1—5)中q_i、r用十进制数表示，按十进制的运算规则计算，S_i是十进制小数，可求出$(N_2)_{10}$，即转换成十进制的小数部分。例如

求 $(0.01)_2=(?)_{10}$

$1\times2^{-1}=2^{-1}$

$(2^{-1}+0)2^{-1}=2^{-2}=(0.25)_{10}$

即 $(0.01)_2=(0.25)_{10}$

求 $(0.2)_8=(?)_{10}$

$2\times8^{-1}=2^{-2}=(0.25)_{10}$

即 $(0.2)_8=(0.25)_{10}$

即任意进制小数转换成十进制小数的过程是：把待转换数（小数）的每一位先表示为十进制数表示，然后从最低位开始被基数除，部分结果再加相邻高位，被基数除，逐次进行下去，直到被基数除m次（待转换小数位数）为止。

综合以上分析，任意进制数转换成十进制数，可对整数部分采用逐次乘基数相加法、对小数部分采用逐次除基数相加法，可转换成十进制数。例如

求 $(11101000.01)_2 = (?)_{10}$

$(11101000)_2 = (232)_{10}$

$(0.01)_2 = (0.25)_{10}$

$(11101000.01)_2 = (232.25)_{10}$

求 $(350.2)_8 = (?)_{10}$

$(350)_8 = (232)_{10}$

$(0.2)_8 = (0.25)_{10}$

$(350.2)_8 = (232.25)_{10}$

2．十进制数转换成任意进制数

（1）乘（除）基数取整（余）法

十进制整数和十进制小数转换为R进制数，可分别利用式(1·1—3)和式(1·1—5)反向除2取余数和乘2取整数而逐次完成。

①整数部分转换采用除基数取余法。

对式(1·1—3)中S_0可视为十进制整数，等式两边同除转换数基数R的十进制表示数，并按十进制运算方法，显然，S_1为商，q_0为余数，故q_0为待转换成数的最末位。依次对S_i等式两边除以基数r，可得相应的q_i，直到商为0转换完成。

例如，求 $(232)_{10} = (?)_2$

$(232)_{10} = (?)_8$

$(232)_{10} = (?)_{16}$

先计算 $(232)_{10} = (?)_2$

$232 \div 2 = 116 + 0/2 \quad \therefore q_0 = 0$

$116 \div 2 = 58 + 0/2 \quad \therefore q_1 = 0$

$58 \div 2 = 29 + 0/2 \quad \therefore q_2 = 0$

$29 \div 2 = 14 + 1/2 \quad \therefore q_3 = 1$

$14 \div 2 = 7 + 0/2 \quad \therefore q_4 = 0$

$7 \div 2 = 3 + 1/2 \quad \therefore q_5 = 1$

$3 \div 2 = 1 + 1/2 \quad \therefore q_6 = 1$

$1 \div 2 = 0 + 1/2 \quad \therefore q_7 = 1$

上式可简化为

2|2 3 2　余数
2|1 1 6 … 0
　2|5 8 … 0
　2|2 9 … 0
　2|1 4 … 1
　　2|7 … 0
　　2|3 … 1
　　2|1 … 1
　　　0 … 1

$\therefore (232)_{10}=(11101000)_2$

求 $(232)_{10}=(?\ )_8$

8|2 3 2
　8|2 9 … 0
　　8|3 … 5
　　　0 … 3

$\therefore (232)_{10}=(350)_8$

求 $(232)_{10}=(?\ )_{16}$

16|2 3 2
　16|1 4 … 8
　　　0 … E

$\therefore (232)_{10}=(E8)_{16}$

②小数部分转换采用乘基数取整法

对式（1·1—5）中S_1可视为十进制小数，等式两边同乘以待转换成数基数R的十进制表示，并按十进制运算方法，结果中整数为q_{-1}，小数部分为S_2，依次对S_i乘基数r取整数q_i，直到取整后为0或达到转换位数为止，这样依次求得待转换成数 $q_{-1}, q_{-2} \cdots q_{-m}$。

例如，求 $(0.25)_{10}=(?\ )_2$

$(0.25)_{10}=(?\ )_8$

$(0.25)_{10}=(?\ )_{16}$

先求 $(0.25)_{10}=(?\ )_2$

$0.25\times 2=0+0.5 \qquad \therefore q_{-1}=0$

$0.5\times 2=1+0.0 \qquad \therefore q_{-2}=1$

上式可写为

整数	小数
	0.25
	× 2
0	0.50
	× 2
1	0.00

$\therefore (0.25)_{10}=(0.01)_2$

求 $(0.25)_{10}=(?\ )_8$

整数	小数
	0.25
	× 8
2	0.00

$\therefore$ $(0.25)_{10}=(0.2)_8$

求 $(0.25)_{10}=(?\ )_{16}$

整数	小数
	0.2 5
	× 1 6
	1 5 0
	2 5
4	0.0 0

$\therefore$ $(0.25)_{10}=(0.4)_{16}$

综合①、②，可完成十进制数转换为任意R进制数的转换过程。

（2）减权定位法

由于二进制数各位仅取0或1，所以在十进制数转换成二进制数时还可以采用其它简便的方法。对十进制整数N转换成二进制整数后，可表示为

$$(N)_{10}=(q_nq_{n-1}\cdots q_1q_0)_2$$
$$=q_n2^n+q_{n-1}2^{n-1}+\cdots+q_12^1+q_02^0$$

当$q_i=0$时，则第i项的值为0，当$q_i=1$时，该项值为2^i，即该项值为该位的权。减权定位法是，通过被转换的十进制整数N与小于等于其值的最大的位权（2的幂次）比较，确定该位二进制数是否取1，然后将参与比较的十进制数（首次为数N）减去该位取1值的权，重复上述过程。直到求出所有位的二进制数值。

例如，求$(232)_{10}=(?\ )_2$

$\because$ 小于等于232的最大的位权为$2^7(128)$，故

$q_7=1$，

减权，即$232-2^7=104$

$\because$ 小于等于104的最大的位权为$2^6(64)$，故

$q_6=1$，

减权，即$104-2^6=40$

$\because$ 小于等于40的最大的位权为$2^5(32)$，故

$q_5=1$，

减权，即$40-2^5=8$

$\because$ 小于等于8的最大的位权为2^3，故

$q_3=1$，

减权，即$8-2^3=0$，

从而确定q_7、q_6、q_5、q_3取1值，其余各位取0值。

$\therefore$ $(232)_{10}=(11101000)_2$

综合上面算法，列式为

$$\begin{array}{rl}
232 & \text{值定为1的位} \\
-128 & \cdots\cdots q_7 \\ \hline
104 & \\
-\ \ 64 & \cdots\cdots q_6 \\ \hline
40 & \\
-\ \ 32 & \cdots\cdots q_5 \\ \hline
8 & \\
-\ \ \ 8 & \cdots\cdots q_3 \\ \hline
0 &
\end{array}$$

例如，求 $(1000)_{10}=(?\ )_2$

$$\begin{array}{rl}
1000 & \text{值定为1的位} \\
-512 & \cdots\cdots q_9 \\ \hline
488 & \\
-256 & \cdots\cdots q_8 \\ \hline
232 & \\
-128 & \cdots\cdots q_7 \\ \hline
104 & \\
-\ \ 64 & \cdots\cdots q_6 \\ \hline
40 & \\
-\ \ 32 & \cdots\cdots q_5 \\ \hline
8 & \\
-\ \ \ 8 & \cdots\cdots q_3 \\ \hline
0 &
\end{array}$$

$\therefore\ (1000)_{10}=(1111101000)_2$

对于十进制小数转换为二进制小数也可采用减权定位的方法；对于十进制数转换成八进制数、十六进制数也可参照此种转换方法。

上面具体叙述了数制转换的基本方法，归纳起来实际有两种，即按权相加法和乘（除）基数取整（余）法。对于任意记数制的数相互转换皆可以采取上述方法。

3．二进制数与八进制数、十六进制数的相互转换

我们以二进制整数 $(N)_2$ 转换为八进制整数 $(Q)_8$ 为例加以说明。

设 $(N)_2=a_n2^n+a_{n-1}2^{n-1}+\cdots+a_32^3+a_22^2+a_12^1+a_02^0$

$(Q)_8=b_m8^m+b_{m-1}8^{m-1}+\cdots+b_18^1+b_08^0$

且 $(N)_2=(Q)_8$

采用除基数 8 取余法。等式两边同除以 8，得

$$a_n2^{n-3}+a_{n-1}2^{n-4}+\cdots+a_3+(a_22^2+a_12^1+a_02^0)/8$$
$$=b_m8^{m-1}+b_{m-1}8^{m-2}+\cdots+b_1+b_0/8$$

则 $a_n2^{n-3}+a_{n-1}2^{n-4}+\cdots+a_3=b_m8^{n-1}+\cdots+b_1$

$$a_22^2+a_12^1+a_02^0=b_0$$

$$(a_2a_1a_0)_2=(b_0)_8$$

同样，对除 8 后的整数部分再除 8 取余，得

$$(b_1)_8=(a_5a_4a_3)_2$$
$$\vdots$$

通过上述证明，二进制整数转换成八进制整数，只要将二进制整数从小数点向左，每三位为一组，…（最高位不足三位时，高位可以补0）；然后表示成八进制数即可。八进制数的元素与三位二进制的对应关系与十进制数中0～7与三位二进制的对应关系一致，如表1·1—1表示。

表1·1—1

八进制	0	1	2	3	4	5	6	7
二进制	000	001	010	011	100	101	110	111

同样，二进制小数转换成八进制小数，采用乘基数8取整数。可以证明：只要将二进制小数从小数点向右，每三位为一组，…（最低位不足三位时，低位可以补0），然后将其表示成八进制数即可。

例如，求$(11101000.01)_2=(?)_8$

把二进制数从小数点向左、向右每三位一组，有

$$(011\ \ 101\ \ 000.010)_2=(350.2)_8$$

同理，可以证明，二进制数转换成十六进制数是将二进制数整数从小数点向左、小数从小数点向右每四位为一组（不足四位可补0），然后表示成在十六进制数中表示即可。四位二进制与十六进制的对应关系和十进制数中0～15与四位二进制数的对应关系一致，如表1·1—2所示。

表1·1—2

十六进制	0	1	2	3	4	5	6	7
二进制	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
十六进制	8	9	A	B	C	D	E	F
二进制	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

例如，求$(11101000.01)_2=(?)_{16}$

有

$$(1110\ \ 1000.0100)_2=(E8.4)_{16}$$

那么，八进制数或十六进制数转换成二进制数必然是上述转换的逆过程，即将八进制数或十六进制数，每位一分为三位或四位二进制数即可。

二进制数数位长，书写或读出不甚方便，而二进制数可以很方便的表示成八进制数或十六进制数的形式，一般把八进制或十六进制作为二进制的简记形式。

1·1·4 进位记数制的讨论

1. 数制转换时小数位数的确定

在十进制小数转换成二进制小数时，会出现转换后的位数很长或无限的情况。例如

$$(0.3)_{10}=(0.\dot{0}\dot{1}00\dot{1})_2$$

一般，是根据转换精度要求来确定转换后的位数的。例如，十进制小数取三位，显然其精度为千分之一，即 $(0.1)^3_{10}$，转换为二进制小数取i位即$(1/2)^i$，保持原来的精度不变，有

$$(0.1)^3_{10}=(0.1)^i_2$$

求出i，转换后的位数就确定了。

一般地，K位α进制小数转换成β进制的小数后，保持转换前的精度，设转换后的位数为j位，应有

$$(0.1)^k_\alpha=(0.1)^j_\beta$$

用十进制的形式描述为：

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^k=\left(\frac{1}{\beta}\right)^j$$

两边取基数α的对数

$$K\log_\alpha\frac{1}{\alpha}=j\log_\alpha\frac{1}{\beta}$$

$$K(-\log_\alpha \alpha)=j(-\log_\alpha\beta)$$

$$K=j\log_\alpha\beta$$

$$=j\frac{\log_{10}\beta}{\log_{10}\alpha}$$

$$j=K\frac{\log_{10}\alpha}{\log_{10}\beta}$$

例如，在保持精度下求$(0.3)_{10}=(?)_2$

首先确定二进制数的位数。

由于$K=1$，$\alpha=10$，$\beta=2$，则

$$j=\frac{1}{0.301}=3.3，取 j=4$$

$\therefore$ $(0.3)_{10}=(0.0100)_2$或

$(0.0101)_2$

为计算方便，列出部分常用对数表1·1—3。

表1·1—3

R	$\log_{10}R$	$\frac{1}{\log_{10}R}$
2	0.301	3.322
3	0.477	2.096
8	0.904	1.107
10	1.000	1.000
12	1.079	0.927
16	1.204	0.830

2. 基　数

数字系统一般都采用二进制记数制表示，不仅因为表示方便、易于实现，还因为采用二进制记数系统比较节省设备。下面给出定量的讨论。

设备量，指采用n位的R进制数所需的存贮设备量x，R进制数有R个状态，一位R进