高等学校教材

随机数学基础

田 铮 肖华勇 等编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

随机数学基础

田　铮　肖华勇　等编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书是本科生的概率论与数理统计课程的入门教材，为不同层次的本科生提供适应性强且内容相对具有“弹性”的课程内容．本书分为八章和附录、附表，主要包括：概率与概率空间，随机变量及其概率分布，随机变量的数字特征与随机变量的特征函数，大数定律和中心极限定理，样本与统计量的分布，参数估计和假设检验，方差分析与回归分析，随机过程的概念与几类重要的随机过程等．

本书深度和广度适宜、论述清晰、深入浅出、循序渐进、便于教学．书中还配有一定数量的典型例题和习题，以及概率论中若干典型问题的计算机模拟计算和相应的C语言程序，书后附有习题答案，可供读者参考．

本书可作为理工科各专业、经济管理专业的本科生的教材和参考书，也可作为研究生和有关科技工作人员的参考书．

图书在版编目（CIP）数据

随机数学基础/田铮等编著．—北京：高等教育出版社，2005.7
ISBN 7-04 016631-3

Ⅰ.随…　Ⅱ.田…　Ⅲ.①随机过程—高等学校—教材②概率论—高等学校—教材　Ⅳ.0211

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 067629 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800－810－0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010－58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京原创阳光印业有限公司		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2005年7月第1版
印　　张	19.75	印　　次	2005年7月第1次印刷
字　　数	370 000	定　　价	20.90元

物料号　16631－00

前　言

概率论、数理统计和随机过程主要研究和探讨客观世界中随机现象的规律，已在包括控制、通信、生物、物理、力学、金融、社会科学以及其他工程技术等诸多领域中获得了广泛的应用，学习和掌握随机数学的基本理论和基本方法并将其应用于科学研究和工程实际中，是社会发展对高素质人才培养提出的必然要求.

本书是面对大学工科本科生所编写的教材，其内容包括概率论基础知识、数理统计的基本理论和方法，以及随机过程基本知识.编著者在30余年的教学实践和10余年指导硕士、博士研究生的教学经验基础上，发现随机数学系列课程的教学和科学研究中存在如下问题：

- 不少本科生初次接触概率论与数理统计这门课程不知如何下手，摸不清分析问题和思考问题的方法，以致于丧失了学习兴趣，对随机数学系列课程“望而却步”；
- 学生进入高年级、硕士或博士研究生阶段，认识到随机数学知识的重要性，欲“亡羊补牢”时却感到“力不从心”；
- 学生在进一步的科研工作中遇到随机数学问题，因前期基础的“先天不足”只好“绕道而行”，致使有一些有研究价值的原创性成果“半途夭折”.

这一切都令人扼腕叹息！

本书作为一本入门教材，旨在为不同层次的本科生提供适应性强且内容相对具有“弹性”的教科书.为此，在本书的内容编排处理和结合实用实例方面作了有益的尝试，在注重打好学生随机数学基础知识的同时，强调引导和培养学生如何发现问题、探索问题，以及研究问题的能力，从而激发学生的学习兴趣和求知欲.

本书具有如下特点：

• 以概率空间、事件域、定义在事件域上的随机变量及其全面的描述为基础，阐述概率论的基本概念与基本理论，主线清晰，使初学者易于入门，易于掌握概率论和数理统计的基本理论和方法.

• 注重介绍统计思想和统计方法，将数理统计的有关内容和概率论的有关内容有机结合，同时，还有利用 SAS 8.0 软件解决实际问题的实例，使初学者易于学习数理统计的基本思想、基本理论与基本方法，同时学会如何应用统计软件来解决实际问题.

• 将概率论中的一些抽象和较难理解的问题，利用计算机模拟给予直观的展示，把抽象的随机数学问题变为一类可以通过模拟试验来进行“触摸”和可“验证”的问题，提高学生对随机数学的基本概念、理论和方法的理解，进而学会如何学习，掌握本课程所要求的理论和方法.

全书共分为 8 章、1 个附录和 6 个附表，其中第一章—第六章、第八章及附表由田铮和金子负责；第七章和附录由肖华勇负责；第一章—第七章的习题及答案由温显斌负责；全书由田铮统稿并负责校对.

本书是国家教育部高等工科院校工科数学课程教学指导委员会立项的教学改革项目“概率统计系列课程改革的实践”的内容之一，也是西北工业大学立项的教学改革项目“随机数学系列课程教学改革与实践”的内容之一. 本书的讲义自 2002 年以来，已在西北工业大学本硕博连读教改班和有关院系的本科生中使用了三届，受到学生和教师的普遍欢迎和好评，效果良好. 阅读和学习本书需要掌握高等数学和线性代数有关基础知识，讲授全书的内容（打“ * ”号的内容除外）大约需要48 - 60学时.

登陆高等理工教学资源网 http://www.hep - st.com.cn，可获得附录中的所有程序及相应的计算结果，以及与本书有关的扩展学习内容，包括两因素方差分析和多元统计分析初步，利用 SPSS 10.0 进行聚类分析，以及利用 SAS 8.0 软件进行主成分分析等内容.

本书的出版得到西北工业大学教务处和应用数学系的热情支持和帮助，高等教育出版社编辑徐可同志的大力支持和帮助，在此谨表示诚挚的感谢.

田　铮

2005 年 3 月于西北工业大学

E - mail:zhtian@nwpu.edu.cn

目　　录

第一章　概率与概率空间

§1.1　引　言

1.1.1　随机现象与随机数学

随机数学是研究和表述随机现象及其规律性的一门科学.考虑做两个试验,试验 E_A:一盒中有 10 个大小、颜色都相同的白球,搅匀后从中任意摸取一球;试验 E_B:一盒中有 10 个大小相同的球,其中 5 个是白球,另外 5 个是黑球,搅匀后从中任意摸取一球.对于试验 E_A,可以确定取得的球必定是白球,这类现象是自然界中所普遍存在的**确定性现象**,即在一定条件下必然发生(出现)某一结果的现象.对于试验 E_B,取得的球可能是白球也可能是黑球,这类现象在一组固定的条件下,可能发生也可能不发生,称为**随机现象**.考虑试验 E_B,如果从盒中反复多次取球(每次取出一球,记录球的颜色后仍将球放回盒中,并且搅匀),则当试验次数 n 相当大时,出现白球的次数 $n_{白}$ 和出现黑球的次数 $n_{黑}$ 是很接近的,比值 $n_{白}/n$(或 $n_{黑}/n$)逐渐稳定于 1/2.这是因为盒中白球数与黑球数相等,从中任意摸取一种颜色球的"机会"是"平等"的.随机现象出现的可能性大小可用概率这一数学术语来描述.

研究随机现象的规律性有其独特的思想方法,它不是寻求出现每一现象的一切物理因素,不能用研究确定性现象的方法来随机现象,而是承认在所研究的问题中存在有一些人们不能认识或者根本不知道的随机因素作用下,发生了随机现象.这样,人们可以通过试验来观察随机现象,揭示其规律性,作出决策;也可以根据实际问题的具体情况找出随机现象的规律,作出决策.

随机试验是指具有以下特点的试验,简称为**试验**:

1° 可以在相同条件下重复进行;

2° 每次试验的结果不止一个,并且在试验之前能明确试验的所有可能结果;

3° 进行一次试验之前不能预知上述哪一个结果会出现.

1.1.2　随机数学发展简史

概率论是随机数学的基础,它给出随机现象的数学模型,并用数学语言来描述它们,研究其基本规律,透过表面的偶然性,找出其内在规律性,以数学形式阐

述这些规律，建立随机现象与数学其它分支的桥梁，以使人们可以应用业已成熟的数学工具和方法来研究随机现象，进而也为数学其它分支和其它新兴学科提供了解决问题的新思路和新方法.

数理统计是随机数学的重要分支，它是基于观测数据来研究随机现象，研究如何有效地收集、整理和分析带有随机性的数据，以对所观察的问题作出推断和预测，直至为采取一定的决策和行动提供依据和建议，数理统计是以概率论为基础的.

随机过程是应用十分广泛的概率论分支.由于实际问题的需要，人们要接连不断地观察随机现象的演变过程，研究其规律性，作出决策和预报等，这种需要促进了随机过程论的诞生，它所研究的是随机现象演变过程的概率规律性.

概率论的起源与赌博有关.17 世纪中叶，法国数学家 Pascale、Fermat 及荷兰数学家 Huygens 基于排列组合方法，研究利用古典概型解决赌博中提出的一些问题，为“分赌注问题”、“赌徒输光问题” 等.到了 18、19 世纪，随着科学的发展，人们注意到社会科学和自然科学中许多随机现象与机会游戏之间十分相似，如人口统计、误差理论、产品检验和质量控制等，从而由机会游戏起源的概率论被应用于这些领域中，同时也大大促进了概率论本身的发展，瑞士数学家 Bernoulli 作为使概率论成为数学的一个分支的奠基人之一，建立了概率论中第一个极限定理(即 Bernoulli 大数定律)，阐明了事件发生的频率稳定于它的概率.随后，De Moivre 和 Laplace 又导出第二个基本极限定理(即中心极限定理)的原始形式，Laplace 在其《分析的概率理论》一书中，明确给出了概率的古典定义，并在概率论中引入了更有力的分析工具，将概率论推向一个新的发展阶段.19 世纪末，俄国数学家 Chebyshev，Markov，Liapunov 等人用分析的方法建立了大数定律及中心极限定理的一般形式，科学地解释了为什么在实际中遇到的许多随机变量都近似地服从于正态分布.20 世纪初，由于大量实际问题的需要，特别是受物理学的刺激，人们开始研究随机过程.Einstein，Wiener 和 levi 等人对生物学家 Brown 在显微镜下观测到的花粉微粒的无规则运动进行了开创性的理论分析，提出了 Brown 运动数学模型，并进行了系统的研究，而 Erlang 等人则在电话流呼唤中研究了 Poisson 过程，成为排队论的开创者.Feller 等在生物群体生长模型中提出了生灭过程，Cramer、Wiener、Khintchine 等人系统研究了平稳过程，Kolmogorov、Feller 和 Doob 则开创了更一般的 Markov 过程和鞅论的系统研究.至今，对于随机过程的研究以及与其它新兴学科的交叉而形成的边缘学科的研究仍在继续.

如何定义概率，如何把概率论建立在严格的逻辑基础上，对这一个问题的探索一直持续了三个世纪.20 世纪初，Lebesgue 完成的测度与积分理论，为概率公理化体系的建立奠定了基础.特别是苏联数学家 Kolmogorov 于 1933 年在其著作

《概率论基础》一书中首次给出了概率的测度论式的严格定义,归纳总结了事件及事件的概率的基本性质和关系,建立了概率论的公理化体系,Kolmogorov公理化方法成为近代概率论的基础,使概率论成为严谨的数学分支,对近代概率论的发展起到了积极的作用.

数理统计是随着概率论的发展而发展起来的.只有当人们认识到必须把数据视为来自具有一定概率分布的总体,所研究的对象是这个总体而不能局限于数据本身的时候,数理统计才诞生了.早在19世纪中期之前,数理统计已出现若干重要的工作,特别是C.F.Gauss与A.M.Legendre关于观测数据的误差分析和最小二乘估计方法的研究成果.但是直到20世纪初期,数理统计才发展成为一门成熟的学科,其中K.Pearson与R.A.Fisher作出重大贡献.1946年,H.Cramer发表的《统计学的数学方法》是第一部严谨且比较系统的数理统计著作.

至今,概率论与数理统计的理论与方法已广泛应用于自然科学、社会科学及人文科学等各个领域中,并且随着计算机的普及,概率论与数理统计已成为处理信息、制定决策的重要理论和方法.它们不仅是许多新兴学科,如信息论、控制论、排队论、可靠性理论及人工智能的数学理论基础,而且与其它领域的新兴学科的相互交叉而产生了许多新的分支和边缘学科,如生物统计、统计物理、数理金融、神经网络统计分析、统计计算等.总之,概率论、数理统计与随机过程作为理论严谨、应用广泛、发展迅速的数学分支正越来越引起广泛的重视.

1.1.3 概率论与数理统计研究问题的方法

本书前四章介绍概率论的基本内容,后续的三章介绍数理统计的基本思想、内容与方法,数理统计以概率论为基础、研究如何有效地收集、整理和分析受随机因素影响的数据,对所观测的随机现象作出推断、预测,直至为未来的决策与行动提供依据和建议的一门学科.

数理统计的研究内容主要包括试验设计和统计推断.试验设计研究如何对随机现象进行观测和试验,以有效获取试验数据和收集数据,主要是对抽样方法与试验设计方法的研究;统计推断研究如何对所获得的数据进行整理、分析和处理,以对所研究的随机现象的性质与特点作出推断.

概率论应用随机变量(多维随机变量)与随机变量的概率分布、数字特征及特征函数为数学工具对随机现象进行描述、分析与研究,其前提条件是假设随机变量的概率分布是已知的.而数理统计中作为研究对象的随机变量的概率分布是完全未知的,或者分布类型已知,但其中某些参数或某些数字特征是未知的;概率论研究问题的方法是从假设、命题、已知的随机现象的事实出发,按一定的逻辑推理得到结论的,因此概率论的方法本质上是演绎式的;而统计学的方法是归纳式的,从所研究对象的全体中随机抽取一部分进行试验或观测,以获得试验

数据,依据试验数据所获取的信息,对整体作出推断,是“归纳”而得到结论的.例如,统计学家通过大量观测得到的试验数据,按照一定的统计方法得出结论:吸烟与患肺癌有关;吸烟与患支气管炎有关.此结论不是用数学逻辑推理方法证明得到的.因此,掌握统计学的思想与方法对于初学者无疑是很重要的.

§1.2　样本空间与随机事件

1.2.1　样本空间与随机事件

随机试验应具备三个特征,记为 E.称试验 E 的每个可能结果为**样本点**,用字母 ω 表示.称全体样本点的集合为试验的**样本空间**,用字母 Ω 表示.显然有 $\Omega=\{\omega_i : i\in T\}$,其中 T 为某一指标集.

例 1.2.1　E_1— 一枚硬币连续掷两次,观察其正、反面出现情况.令

$$\omega_i=\{第\ i\ 次正面向上\},\bar{\omega}_i=\{第\ i\ 次反面向上\},i=1,2,$$

则

$$\Omega=\{(\omega_1,\omega_2),(\omega_1,\bar{\omega}_2)(\bar{\omega}_1,\omega_2)(\bar{\omega}_1,\bar{\omega}_2)\}.$$

E_2— 某电话交换台在单位时间内收到的呼唤次数.令

$$\omega_i=\{该交换台在此单位时间内收到的呼唤次数为\ i\},i=0,1,2,\cdots,$$

则

$$\Omega=\{\omega_0,\omega_1,\cdots\}.$$

E_3— 观测并记录某市每日中午 12 时的气温.由记录可查其最高温度为 40 ℃,最低温度为 -8 ℃,所以

$$\Omega=\{\omega:\omega\in[-8,40]\}.$$

E_4— 一袋中装有 3 个可分辨白球和 2 个可分辨黑球,从中依次任取两球,观测并记录所取得的球.若对球进行编号,3 个白球的编号分别为 1,2,3 号,2 个黑球的编号分别为 4,5 号.令

$$(i,j)=\{第一次抽得球的编号为\ i,第二次抽得球的编号为\ j\}$$

则

$$\begin{aligned}\Omega=\{&(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(3,1),\\&(3,2),(3,4),(3,5),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(5,1),(5,2),\\&(5,3),(5,4),(5,5)\}.\end{aligned}$$

一般地,**随机事件**(简称为事件)定义为样本点的某个集合.称某事件 A 发生当且仅当事件 A 所包含的某一个样本点出现,即 $\omega\in A$,习惯上用大写字母 A、B、C 等表示事件.

由于样本空间 Ω 包含了全体样本点，而在每次试验中必然出现 Ω 中的某个样本点，即 Ω 必然会发生，所以常称 Ω 为**必然事件**，将试验中不可能出现的结果称作**不可能事件**，记作 $\varnothing$，显然不可能事件不含有任何样本点.

1.2.2 事件的运算

由于事件是 Ω 的子集，所以可以用集合的运算与包含关系来表达更复杂的事件及其关系，以使这些事件的概率比较容易求得.

设给定样本空间 Ω 及 Ω 中的一些事件，如 $A,B,A_i(i=1,2,\cdots)$ 等等.

1. 事件的包含 如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含了事件 A，或称事件 A 包含于事件 B，记作 $A\subset B$. 显然对任何事件 A，必有 $\Omega\supset A\supset\varnothing$.

2. 事件相等 如果 $A\supset B$ 且 $B\subset A$ 同时成立，则称事件 A 与事件 B 相等，记作 $A=B$. 易知相等的两个事件 A 与 B，总是同时发生或者同时不发生.

3. 事件的并(和) $A\cup B$ 表示是由 A 或 B 中所有样本点所组成的事件，称为事件 A 与 B 的和事件. “在某次试验中事件 $A\cup B$ 发生”，这表示在此次试验中，事件 A 与 B 至少有一个发生. 类似地，“在某次试验中事件 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 发生”是表示在该次试验中，事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生. 如果在某次试验中，有可列多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，则“在某次试验中，事件 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 发生”是指可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中至少有一个发生.

4. 事件的交 $A\cap B$ 表示是由既属于事件 A 又属于事件 B 的所有样本点组成的事件，称为事件 A 与 B 的交事件. “在某次试验中事件 $A\cap B$ 发生”，这表示在此次试验中，事件 A 与事件 B 同时发生. 类似地，“在某次试验中事件 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 发生”是表示在该次试验中，事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n\cdots$ 都发生.

5. 对立事件(逆事件) $\bar{A}$ 表示 Ω 中不属于事件 A 的所有样本点的全体所组成的事件，称为事件 A 的对立事件. $\bar{A}$ 发生当且仅当 A 不发生.

6. 事件的差 $A-B$ 表示是由属于 A 但不属于 B 的所有样本点组成的事件，称为事件 A 与 B 的差事件. “在某次试验中，事件 $A-B$ 发生”，这表示在此次试验中，事件 A 发生而事件 B 不发生.

7. 互不相容事件 如果两个事件 A 与 B 满足 $A\cap B=\varnothing$，即事件 A 和 B 没有共同的样本点，因而，在一次试验中事件 A 与 B 不可能都发生，称事件 A 与 B 互不相容. 此时，将它们的和事件 $A\cup B$ 记为 $A+B$.

注 两个事件 A 与 B 是对立事件，则事件 A 与 B 互不相容，反之不成立.

例 1.2.2 设 A,B,C 是样本空间 Ω 中的随机事件，则

事件“A 与 B 发生，C 不发生”可以表示成 $AB\bar{C}$，

事件“A、B、C 中至少有两个发生”可以表示成 $AB \cup AC \cup BC$，
事件“A、B、C 中恰好发生两个”可以表示成 $AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC$，
事件“A、B、C 中有不多于一个事件发生”可以表示成

$$\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C} \cup A\bar{B}\,\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\,\bar{B}C.$$

与集合的运算律相同，事件的运算满足如下运算律（读者自行证明之）：

(1) 交换律 $A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A.$ (1.2.1)

(2) 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$ (1.2.2)

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$ (1.2.3)

(3) 分配律 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$ (1.2.4)

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$ (1.2.5)

(4) 对偶律（De Morgan 律）

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}. \tag{1.2.6}$$

对可列个事件 $A_i(i = 1,2,\cdots,n,\cdots)$ 有对偶律

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i},$$

及

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}.$$

§1.3 随机事件的概率

1.3.1 概率的统计定义

引例 1.3.1 考虑 E_1— 掷一枚硬币一次，则样本空间 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$，其中 $\omega_1 = \{$正面向上$\}$，$\omega_2 = \{$反面向上$\}$ 为样本点，现考虑在一次试验中发生 ω_1（或 ω_2）的可能性是多少？由于硬币是均匀的，可以判断在一次试验中，出现 ω_1（或 ω_2）的可能性是 1/2. 历史上曾有许多人做过掷硬币试验，以验证这一结果的正确性. 表 1.3.1 是试验结果：

表 1.3.1 掷一枚硬币的试验结果

试验者	投掷次数 n	正面向上的次数 n_A	频率 $f_n(A)$
Buffon	4040	2048	0.5069
K. Pearson	12 000	6019	0.5016
K. Pearson	24 000	12 012	0.5005

由表 1.3.1 可知，虽然事件 $A = \{$正面向上$\}$ 在一次试验中可能出现，也可能

不出现，具有随机性，但是在相同条件下重复试验次数 n 充分大时，事件 A 出现的频率 $f_n(A)=n_A/n$ 在一固定数值 1/2 附近摆动并呈现出一定的稳定性.

引例 1.3.2　考虑 E_2—医院中诞生的男婴. 法国数学家 Laplace 在《概率的哲学探讨》(1795) 一书中给出他对柏林，全法兰西及彼得堡等众多统计资料的研究结论是：上述不同地区在十年内男婴出生数与全体婴儿出生数之比总摆动在 22/43 这个数附近.

人们逐步认识到频率的稳定性揭示了随机事件发生的可能性有一定的大小，若频率稳定于一较大的数值，则表明相应事件发生的可能性较大；反之则较小. 因此就用这一数值表征事件发生可能性大小的一个客观的定量度量，称其为相应事件的概率. 概率的这种定义称为**概率的统计定义**，记为 $f_n(A)=\dfrac{n_A}{n}$，其中 n_A 表示在相同条件下所做 n 次试验中事件 A 发生的频数，比值 $\dfrac{n_A}{n}$ 为事件 A 发生的频率.

易知概率的统计定义具有如下性质：

1° 非负性　对任何事件 A，$f_n(A)\geqslant 0$；

2° 规范性　$f_n(\Omega)=1$；

3° 有限可加性　对有限个两两互不相容事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，即若 $A_i\cap A_j=\varnothing\ (1\leqslant i,j\leqslant m,i\neq j)$，则

$$f_n\left(\sum_{i=1}^{m}A_i\right)=\sum_{i=1}^{m}f_n(A_i).$$

1.3.2　古典概型

考察具有如下特征的一类最简单的随机试验 E：

(1) 试验 E 的所有可能的结果只有有限个，即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$；

(2) 每个样本点 ω_i 出现的可能性相同，

称此类随机现象的数学模型为古典概型. 对古典概型的研究在概率论中占有一定的位置. 一方面是因为古典概型比较简单，对于它的讨论使得概率论中的一些基本概念的理解变得直观明了；另一方面，古典概型在产品质量抽样检查问题及理论物理中某些问题的研究中都发挥着重要作用.

定义 1.3.1(古典概率)　对于古典概型，设样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，如果事件 A 由 k 个样本点组成，设 $A=\{\omega_{i_1},\cdots,\omega_{i_k}\}$，则定义事件 A 的概率

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{\text{组成事件 }A\text{ 的样本点数}}{\text{样本空间中样本点的总数}}\triangleq\frac{N(A)}{N(\Omega)}.\qquad(1.3.1)$$

可以用古典概型计算的概率称为**古典概率**.

对古典概率的研究，不难验证古典概率具有如下基本性质：