中学数学问题解决

1

ZHONGXUE SHUXUE
WENTI JIEJUE

上海教育出版社
SHANGHAI
JIAOYU
CHUBANSHE

中学数学问题解决

1

上海教育学院数学系　编著

上海教育出版社

责任编辑　冯　贤
封面设计　姜品珠

中学数学问题解决

1

上海教育教院数学系 编著
上海教育出版社出版发行
（上海永福路123号）
各地新华书店经销　　上海市印刷十二厂印刷
开本 787×1092　1/32　印张 4.25　插页 2　字数 91,000
1996 年 7 月第 1 版　　1996 年 7 月第 1 次印刷
印数 1—2150 本

ISBN 7-5320-3956-0/G·3866　　定价：4.30 元

序　言

在现代科技与经济的发展中，各门学科都经历着从定性向定量的演化过程，因此，数学正在发挥越来越多的作用，并具有一些新的特点：数学与各种应用相互渗透，数学与计算机技术相互结合．相应地，在现代人才的培养中，数学教学是一个重要的组成部分，而中学数学教学则是不可缺少的基础．

有志于成才的中学生青年朋友们，付出你们的努力去学好中学数学吧！遵照循序渐进的原则，只要你肯努力，认真听课，坚持复习做题，你一定能掌握初等数学的基本知识，学会数学计算与公式演算，并学会一些逻辑推理的能力．如果你学有余力，你不妨对中学数学多付出一些努力，你会发现数学是饶有兴趣的，也是应用广泛的，你会增强自己的思考能力，你甚至会发现学习其他课程和学习计算机的水平也随之提高了．

《中学数学问题解决》这套书，作为中学数学课外阅读的一种材料，是很有特色的．

特色之一，本书以数学问题为线索，从提出每一个问题到解决这个问题，将数学知识穿插其中，使数学的应用在这些问题上得以实现．这些数学问题都具有实际应用的背景，也具有现代应用数学的背景．这样，本书表明，数学是生动活泼的，是应用广泛的．因此，本书可使读者对中学数学的有关应用问题增加许多有益的知识．

特色之二，本书以问题解决为重点，在给出数学问题及其

解答的同时，把重点放在解决问题的分析过程．这个分析过程常常包括：理解题意，特例探讨，联想类比，合情推理，猜想试探，失败更正，改进扩充等等．这样，本书表明，数学是富于思考性的．因此，本书可使读者对中学数学的解题能力有明显的提高．

本书还有其他特色，它们体现了作者们的教学经验与学术造诣．

由于上述特色，本书可推荐作为上海市"金桥杯"中学生数学应用知识竞赛的辅导材料之一．该竞赛自 1992 年起每年举行一次，许多高中学生与数学教师积极参与了和竞赛有关的活动，取得了很好的社会效益．因此，可以相信，本书将会拥有众多的读者，并对中学数学教学的改革发挥积极的作用．

俞文魮

1994 年 6 月 8 日

编辑附注：俞文魮为华东理工大学教授，任上海工业与应用数学学会副理事长与上海中学生数学应用知识竞赛委员会主任．

前　言

数学来源于实践，并在不断地解决数学自身矛盾和外部实际问题的过程中得到发展，它的重要意义就在于能应用于现实世界，解决多种多样的实际问题．因而学习数学的目的不仅是训练学生掌握常规的论证或计算过程，而且在于培养学生分析问题和解决问题的能力，其中包括创造能力．如何来培养这些能力呢？可以通过日常生活实践或数学内部所提出的一些值得讨论的问题来进行培养．本书将侧重于从现代应用数学中，例如，从数字逻辑电路，存贮论，排队论，数学模型，编码，图论，管理数学(包括运筹、规划、统筹和经济数学等)和计算机算法等学科中，抓住一些可以用初等数学解决的简单而有意义的实际问题，以它们为背景，构造情景，设置问题．面对这些问题，让学生自己动手，观察思考，分析研究，逐步解决．

为了培养学生有目的地进行思考，在第0章，我们介绍了问题解决的一般过程和策略．我们可以看到，在问题解决的过程中，要观察，要探索，从中发现规律，得到好的想法和思路，再实施、证实，得到结果后，须进一步考虑是否可以改进所用的方法，或者有新的解法，所用的方法能否推广到新问题中去，并猜测更一般的结果．问题解决所以能引起当前国内、外教育界的重视，就是因为这种思维方法是科学研究中的一种方法，它不仅在现代数学、自然科学的研究中，而且在社会实践中都有广泛的应用．本书各章的许多例题和习题都是按

照上述要求编写的，这将有利于学生了解和掌握问题解决的一般过程和各种策略.

本书还注意各种数学概念和方法之间，数学与其他学科以及实践之间的相互联系. 了解和掌握这些联系是十分重要的. 有了这种了解和掌握，在解决问题时，思路更加宽广，更加灵活. 许多重大的科学发现也都是从学科之间的相互交叉、相互渗透中逐渐产生的. 本书的第一章至第七章分别介绍了集合与逻辑代数、不等式与排队问题、函数与数学模型、矩阵与编码、图论、管理数学和向量与力学等最为浅近的内容，使学生了解数学在计算机科学、排队论、控制论、信息论、组合数学和管理科学等领域中的某些应用，从而加深学生对数学本质的认识，并且通过问题解决使他们逐步领悟各种现代数学的思想和方法.

虽然本书的许多内容都是现代的，但是我们写得通俗易懂，可供高中一、二年级数学选修课使用，也可作为高中学生的课外读物.

本书由邱森、鲍修德、郁克敏、沈云霞、颜梅珍、华俊、章淳立和沈竞华等同志参加编写，全书由邱森修改统稿. 本书得到上海市教育局教学研究室的有关领导的关心和支持，在此表示衷心地感谢. 对书中的缺点和不当之处，恳请读者批评、指正.

上海教育学院数学系

1994.3.

目　录

第0章 问题解决

数学是从实践中产生的，然后它又回到实践中去. 它能应用于现实世界，解决多种多样的实际问题. 我们知道，学习数学，不仅是锻炼人的思维，更重要的是培养解决实际问题的能力. 本章将通过一些实例来了解问题解决的一般过程，并领悟问题解决的一些策略.

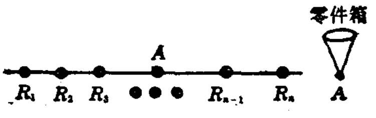
一 问题解决的过程和策略

0.1 问题解决的一般过程

考察下面的问题：

零件箱问题

n 个机器人排成一行做流水作业(图 0-1). 它们都要不断地从一个固定的零件箱中拿零件. 问零件箱放在哪个位置最好(使它到各机器人的距离总和最小)?



R_i 表示第 i 个机器人

图 0-1

为了求解，我们首先必须理解题意. 如果用直线上的点 R_i 表示第 i 个机器人的位置，点 A 表示零件箱的位置，那么我们的问题就是要在该直线上确定 A 点的位置使

$$R_1A+R_2A+\cdots+R_nA$$

最小.

如何解题呢?我们一下子无法着手.于是，先设计一个解题计划.我们设想先考察一些个别、特殊情况，再从中发现其一般规律.

现在考察一些特例:

(1) 如果只有2个机器人，则易知线段 R_1R_2 上任何一点都是零件箱安放的最好位置(图 0-2).

图 0-2

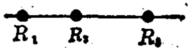


图 0-3

(2) 如果有3个机器人，则也易知:零件箱应放在中间的机器人 R_2 的位置(图 0-3).

(3) 如果有4个机器人，则对两端的机器人 R_1 和 R_4 来说，线段 R_1R_4 上任何一点都是最好位置;对中间的2个机器人 R_2 和 R_3 来说，线段 R_2R_3 上任何一点都是最好位置.所以对4个机器人来说，$R_2R_3(=R_1R_4\cap R_2R_3)$上的任何一点都是最好位置(图 0-4).

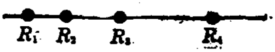


图 0-4

对于5个或6个机器人，问题都容易解决.我们容易证明:一般地，如果机器人的个数是奇数，则最中间那个机器人的位置就是零件箱的最好位置;如果个数是偶数，则处在最中间的两个机器人之间的任何一点都是最好位置.

注意，在上述问题中，我们必须假定这 n 个机器人的工作效率是相同的.如果工作效率不同，怎么办?例如，在 $n=3$ 的

情况下（见图 0-3），如果机器人 R_1 的工作效率是机器人 R_2 的 3 倍，机器人 R_3 的工作效率是机器人 R_2 的 2 倍，那么零件箱又应放在何处呢？

我们可以把 R_1 看作由 3 个与 R_2 工作效率相同的机器人站在同一点 R_1 上工作，把 R_3 看作由 2 个与 R_2 工作效率相同的机器人站在同一点 R_3 上工作，而机器人 R_2 仍作为 1 个机器人，这样，就把问题转化为 6 个工作效率相同的机器人的问题．用上述方法，可以解得，处在 R_1 和 R_2 之间的任何一点都是最好位置．因此，只要将原方法加以改进，把工作效率高数倍的机器人看作由数个工作效率相同的机器人站在同一点上工作，就可以把机器人工作效率不同的情况转化为相同的情况，使得上述方法可以推广到机器人工作效率不同的新问题中去．

我们再考察一个问题：

格点正方形问题

在直角坐标平面内，横坐标和纵坐标都是整数的点叫做格点（图 0-5）．我们把以格点为顶点的正方形叫做格点正方形．对每个格点正方形，我们都能计算它的面积．现在问有哪些数可以是格点正方形的面积？

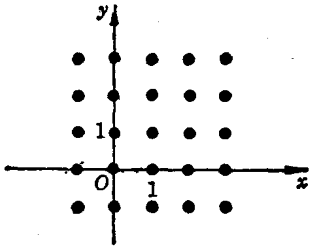


图 0-5

理解问题 我们必须找出所有的各种形状的格点正方形，计算它们的面积，以求得所有的可以是格点正方形的面积的数的全体．

解题计划 我们容易找到各种每边与坐标轴之一平行的格点正方形，并把它们叫做“平行”的格点正方形．此外，是否

还存在"斜"的(即"非平行"的)格点正方形呢?如果存在的话,找出它们的面积公式. 最后,根据面积公式,得到我们所需的各种面积数.

实施计划　在图 0-6 中,容易看到,正方形 $A_1B_1C_1D_1$,正方形 $A_1B_2C_2D_2$ 和正方形 $A_1B_3C_3D_3$ 都是格点正方形,它们的面积分别是 1, 2^2, 3^2(平方单位),由此容易发现,"平行"的格点正方形的面积都是完全平方数.

下面寻找"斜"的格点正方形及其面积公式.

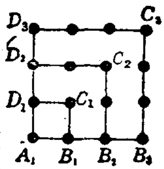


图　0-6

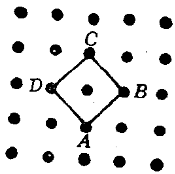
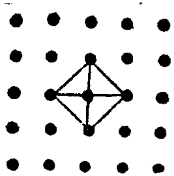
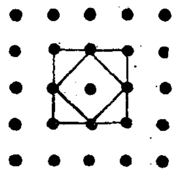


图　0-7

容易看到,图 0-7 中的四边形 $ABCD$ 是一个"斜"的格点正方形. 我们可以用割补法来计算它的面积. 按图 0-8(1)所示,把它分成 4 个三角形,其中每个三角形的面积是 1/2(平方单位),因此它的面积为 2. 我们也可以按图 0-8(2)所示,把它看作由一个面积为 4 的正方形移去 4 个面积为 1/2 的三角形而得到的,因此它的面积为 2. 这样,我们找到了一

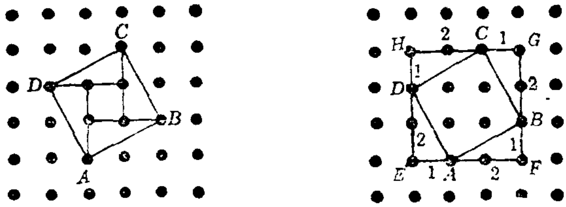


(1)



(2)

图　0-8



(1)　　　　　　　　(2)

图 0-9

个"斜"的格点正方形，它的面积为 2. 它不是一个完全平方数.

为了寻找"斜"的格点正方形的特征与面积公式，我们再作一个"斜"的格点正方形[图 0-9(1)]，进行考察. 格点正方形 $ABCD$ 可以看作由一个面积为 1 的正方形和周围 4 个面积为 1 的三角形组成[图 0-9(1)]，因此它的面积是 5. 格点正方形 $ABCD$ 也可以看作由一个面积为 9 的正方形移去 4 个面积为 1 的三角形而得到的，因此它的面积是 5.

我们可以把图 0-9(2) 的情况加以推广. 给定一个"斜"的格点正方形 $ABCD$，我们总能把它嵌入一个"平行"的格点正方形(设为正方形 $EFGH$)之中(图 0-10)使得 $AF=BG=CH=DE$ 和 $EA=FB=GC=HD$. 设 $AF=a$ 和 $EA=b$，那么 a，b 均是自然数且正方形 $ABCD$ 的面积 $=(a+b)^2-4\cdot\dfrac{1}{2}ab=a^2+b^2$. 于是，"斜"的格点正方形的面积是两个自然数的平方和.

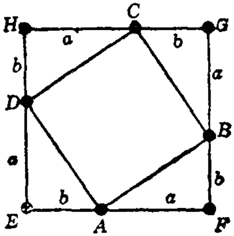


图 0-10

由以上讨论，我们知道，一个格点正方形的面积总是完全

平方数或两个自然数的平方和.

现在我们需要反过来验证，对任意一个完全平方数或两个自然数的平方和，我们都能作出一个以它为面积的格点正方形.

如果给定一个完全平方数 a^2，我们容易找到一个边长为 a 的"平行"的格点正方形，它的面积为 a^2. 如果给定某两个自然数的平方和 a^2+b^2，那么可以按图 0-10，先作一个边长为 $a+b$ 的"平行"的格点正方形 $EFGH$，然后作面积为 a^2+b^2 的"斜"的格点正方形 $ABCD$.

现在我们可以回答格点正方形问题了. 可以是格点正方形的面积的数的全体恰好是完全平方数和两个自然数的平方和的全体，它们都可以写成以下形式:

a^2+b^2，其中 a 和 b 是不全为零的非负整数.

对这个问题是否还有别的解法？我们知道，正方形的面积是由它的边长决定的，而边长又是由它的两个端点的位置决定的. 给定一个格点正方形 $ABCD$，因为平移不改变它的面积，我们可以把 A 点移到原点，设平移后 B 点的坐标为 (a, b)，那么 a, b 是不全为零的整数且

$$\text{正方形 } ABCD \text{ 的面积} = AB^2 = a^2+b^2.$$

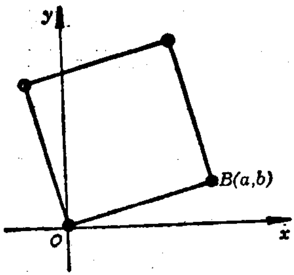


图 0-11

因此，格点正方形的面积或者是完全平方数或者是两个自然数的平方和. 反过来，给定一个完全平方数或两个自然数的平方和，设它为 a^2+b^2，其中 a 和 b 是不全为零的自然数. 在平面直角坐标系内，设 B 点的坐标为 (a, b)，以 OB 为边作一个正方

形(图 0-11)，它就是一个面积为 a^2+b^2 的格点正方形．因此，可以是格点正方形的面积的数的全体恰好是完全平方数和两个自然数的平方和的全体．

在解决以上问题的过程中，我们可以看到问题解决的过程一般有四个步骤：

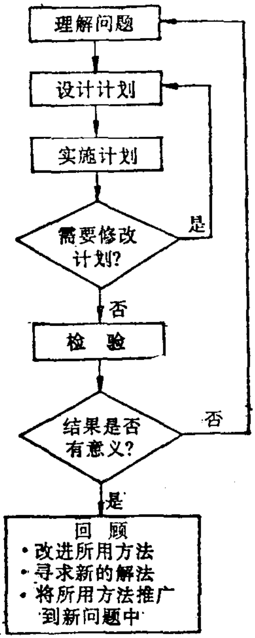
(1) 理解问题：了解问题的条件、结论．对解决问题，条件是否足够？是否有多余的或矛盾的条件？有时还可以画示意图或列表帮助理解题意．

(2) 设计计划：寻找解题思路，列出解题计划．

(3) 实施计划：按计划进行解题．若出现前面未注意到的问题，必须修改计划．对所做的实施过程和结果进行检验．

(4) 回顾：对所用的方法是否再能改进？能否寻找一个新的解法？能否将所用的方法推广到新问题中去？

问题解决的一般过程可以图示如右．

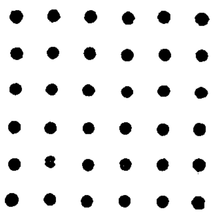


在问题解决的过程中，要观察，要探索，从中发现规律，得到好的想法和思路，再实施、证实，得到结果后，加以推广，并猜想更一般的结果．这种科学研究的方法不仅在现代数学的研究中，在物理、化学的研究中，而且在社会实践的课题中，都能适用．于是问题解决的教学得到了国内、外中小学数学教育界的普遍重视．

上述问题解决的四步过程是由美国数学教育家波利亚(G. Polya, 1887～1985)首先提出的. 他出生于匈牙利，迁居美国后，在斯坦福大学任教. 他认为数学教学的目的，首先教会学生如何去"想"，会"思考"；教学不只是传授知识，要尽量发展学生使用知识的能力；要着重教实用知识和有用的本领，使学生会"有目的思考"或"富有成果的思考". 他注重研究解题策略，于1945年，写下世界名著"怎样解题"，现已翻译成15种语言，书中研究和概括了问题解决中所用的各种策略和技巧.

习 题 0.1

1. 在 6×6 的格点图上，你能找到多少个格点正方形？



(第1题)

2. 在 2×2, 3×3, 4×4, 5×5, 6×6, 7×7 的格点图上，各有多少个"平行"的格点正方形？你能猜测 $n\times n$ 的格点图上有多少个"平行"的格点正方形吗？

0.2 问题解决的策略

在问题解决的过程中，特别是设计计划时，经常用到各种解题策略. 例如，在零件箱问题中，我们先观察2个、3个、4个机器人的特殊情况，从中发现一般规律，运用"从特殊到一