新世纪高等院校精品教辅

大学物理一本通

张晓华 编著

浙江大学出版社

新世纪高等院校精品教辅

大学物理一本通

张晓华 编著

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学物理一本通 / 张晓华编著 .—杭州:浙江大学出版社,2005.5
ISBN 7-308-04157-3

Ⅰ.大... Ⅱ.张... Ⅲ.物理学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.04

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 019735 号

内容提要

本书共十六章,每章分"要点梳理"、"学法点拨"、"范例解读"、"习题排难"四部分。书中含主干内容框架图、概念疑义诠释、常见错误讨论、解题方法指导和期末模拟试题,渗透着作者多项教研成果,形成了教学互动结构。

本书适用工科大学物理课程的学习辅导、考研复习和教学参考。

出版发行 浙江大学出版社
(杭州浙大路 38 号 邮政编码 310027)
(E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址:http://www.zjupress.com)
责任编辑 徐素君
排　　版 浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷 浙江大学印刷厂
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 15.5
字　　数 340 千字
版 印 次 2005 年 5 月第 1 版 2005 年 5 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 7-308-04157-3/O·321
定　　价 20.00 元

前 言

物理学内容广泛，涵盖“力”、“热”、“电”、“光”诸领域；时空跨度大，从“经典”讲到“近代”，从“宏观”讲到“微观”和“宇观”；方法变化大，从中学的常量问题到应用矢量代数及微积分处理的复杂的变量问题，从决定论到概率论。而且，新版的大学物理教材(包括经典教材近年来的修订本)正朝着“精练经典、加强近代、广含现代”并适当涉足理论物理内容的方向改革。但工科的物理课时普遍偏紧，开课时段又正处在学生“中—大”过渡的大学教学初期，再加上无可讳言的学风和教风下滑因素，确实给近些年的大学物理教与学造成了不少困难，以至出现了一些足以令人关注的问题。其中最突出的问题就是教与学都有围绕“应试”转而忽视物理课在提高大学生科学素质方面独特作用的倾向。而目前到处泛滥的与教材配套的“习题解答”、“学习指导”和名目繁多的各种考试指南类书籍，也对大学课程教学中这种急功近利的实用主义取向起着不可低估的推波助澜作用。笔者编著此书旨在匡正这种不正确的教与学目标，帮助学生抓准基本内容和基本方法，重视概念的探索、规律的归纳、分析问题和解决问题能力的提高，积极锻炼学生的科学思维，让大学物理教学为开启其他科技之门真正起好基础的作用。

本书每章均包含要点梳理、学法点拨、范例解读和习题排难四块内容。要点梳理不是教材内容的简单缩写，而是在以整个物理学科为背景，对每个概念、每条规律更完整更严谨更通俗也更有延拓性的阐述，对每章内容清脉络、辨主从的系统化整理。既可引导学生阅读钻研教材，也有助学生课后小结、考前复习。学法点拨不作泛泛而论，而是细分为内容体系、学习重点、注意事项、常见错误四个方面。“内容体系”以框架图形式给出，主干清晰，关联直观，便于教师辅导，便于学生理解、掌握和记忆。“学习重点”以基本要求为基准，凸现重要概念和规律、基本思想和方法，有利于规范工科物理教与学。“注意事项”化解难点，诠释疑义；“常见错误”汇集以往学生学习和作业中易犯错误，为教师备课必考，可帮助学生尽量少走弯路。“范例解读”不搞简单的题型拼凑，以内容主干为纲，方法基本为度，题型综合为主，注意分析思路，力求量少题精，一题串一类，一类涉一法。其中不少题采用多种解法，意在引导知识掌握的融会贯通和创新意识的自我培养。鉴于程守洙等主编、胡盘新等修订的《普通物理学》第五版使用较广，“习题排难”选解了该教材中的一些较难习题，括号中的题号与原书中一致，可供采用该教材的教与学双方参考。由于选题的一定典型性，对使用其他教材的读者也有触类旁通的作用。

本书不设“练习题”、“自测题”，主张精做习题，拒绝题海战术。每解一题都应在弄清

题中涉及的概念、规律以及相关方法上下工夫，及时比较归类，力求举一反三。对学时不多的工科大学物理课程而言，每本教材中的习题已经足够。“过量练习，以熟取优”的应试对策是不宜提倡的。

考虑到“纳米”概念已在工程和生活中频繁出现，而纳米材料的研究正在兴起并有着广泛的应用前途，其理论基础又介于量子物理与经典物理之间，因此作为大学物理教材阅读内容的补充，本书加入了“纳米材料及其应用”专题。

另外，本书还编写了一套期末模拟试题，作为附录内容之一。A 卷为第一学期，B 卷为第二学期，并给出了参考答案和评分标准。其目的是告诉读者：本课程考试的常用题型；按学时安排考题考分，考面宜宽、难度要呈阶梯形；内容分布可与教材顺序错位，应有一定量综合题等等命题原则；一般的评分标准。这些可供教师命题和学生备考时参考。公开题型、命题原则和评分标准，既是教学上一种民主举措，也是督促学生平时踏实学习的一种预警。总之，本书是在校大学生学习物理的良师益友，也是大学物理教师案头的参谋助手。

浙江大学硕士生导师唐九耀博士仔细审阅了全书内容。周子贞、张科萌、陈威、胡戎斌、张岚、相永东等参加了本书的校对工作。还有，本书编著参考了不少同类教学指导书。在此一并表示感谢。

限于水平和时间，书中纰漏恐在所难免，敬请读者批评指正。

张晓华
2005 年 3 月于宁波

目 录

第一章　质点运动学

要点梳理

1．质点　如果物体的大小和形状对所研究问题的结果没有影响，那么可将物体看成一个具有质量的点，称为质点。质点是一种理想的模型。

2．参考系　为描述一个物体位置随时间的变化，必须选择另一个或几个彼此之间相对静止的物体作为参考，后者称为参考系。参考系的选取是任意的，一般以方便问题的讨论为前提。

为了对物体运动进行定量描述，在参考系上选一固定点为原点，建立坐标系。

3．位置矢量　从坐标系的原点 O 引向质点所在位置点 P 的有向线段 $\overrightarrow{OP}$，记为 $\boldsymbol{r}$。位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 简称位矢。

在直角坐标系中　$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

(1) **运动方程**　位矢随时刻 t 变化的函数式称为质点的运动方程，记为 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$。

(2) **轨道方程**　由运动方程中消去参量 t，得到的关系式称为质点的轨道方程。

(3) **位移**　若质点在 t 时刻位于 A 点，在 $t + \Delta t$ 时刻位于 B 点，则由 A 指向 B 的有向线段称为质点的位移，记为 $\Delta\boldsymbol{r}$。位移与坐标原点位置无关。一般

$$|\Delta\boldsymbol{r}| \neq \Delta r$$

位移的分量形式为　$$\Delta\boldsymbol{r} = \Delta x\boldsymbol{i} + \Delta y\boldsymbol{j} + \Delta z\boldsymbol{k}$$

(4) **路程**　路程是在一定时间内物体所经过路线的总长度，是标量，记为 Δs。

4．速度　速度是反映质点位置变化快慢及方向的物理量，是位置矢量对时间的一阶导数，即

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\quad \text{方向沿切线方向}$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}$$

平均速度　$$\bar{\boldsymbol{v}} = \Delta\boldsymbol{r}/\Delta t\quad \text{（方向沿割线方向）}$$

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\boldsymbol{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\boldsymbol{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\boldsymbol{k}$$

速率 $$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t}=|\boldsymbol{v}|$$

平均速率 $$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}\quad(\text{一般地 }\bar{v}\geqslant|\bar{\boldsymbol{v}}|)$$

5. 加速度　反映质点速度随时间变化快慢的物理量，它是速度对时间的一阶导数或位置矢量对时间的二阶导数，即

$$\boldsymbol{a}=\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t=\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t^2\quad(\text{方向指向轨迹曲线的凹侧})$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$

在自然坐标系中 $$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_t+\boldsymbol{a}_n=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{t}+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}$$

切向加速度反映速度大小的变化，法向加速度反映速度方向的变化。切向及法向加速度的计算关键在于求速率 v。

(1) **匀变速运动** $$a_x=\text{常量}$$

$$v_x=v_{0x}+a_xt,\ x=x_0+v_{0x}t+\frac{1}{2}a_xt^2$$

(2) **抛体运动** $$a_x=0,\ a_y=-g$$

$$v_x=v_0\cos\theta,\ v_y=v_0\sin\theta-gt$$

$$x=v_0\cos\theta\cdot t,\ y=v_0\sin\theta\cdot t-\frac{1}{2}gt^2$$

(3) **圆周运动** $$a_n=v^2/R,\ a_t=\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$$

角量描述

角坐标 θ　位矢与 X 轴正方向之间的夹角

角位移 $\Delta\theta$　Δt 内位矢转过的角度

角速度 $$\omega=\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$$

角加速度 $$\alpha=\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t=\mathrm{d}^2\theta/\mathrm{d}t^2$$

角量与线量之间的关系

$$\Delta s=R\Delta\theta,\ v=R\omega,\ a_t=R\alpha,\ a_n=\omega^2R$$

6. 相对运动

相对位移 $$\Delta\boldsymbol{r}_{\text{人对车}}+\Delta\boldsymbol{r}_{\text{车对地}}=\Delta\boldsymbol{r}_{\text{人对地}}$$

相对速度 $$\boldsymbol{v}_{\text{人对车}}+\boldsymbol{v}_{\text{车对地}}=\boldsymbol{v}_{\text{人对地}}$$

学法点拨

1. 内容体系　运动学的主要任务是解决运动的描述问题，本章从一般运动问题出发，引出了描述运动的主要物理量：位置矢量、位移、速度和加速度，强调了这些物理量的

瞬时性、矢量性和相对性,并将一般曲线运动的研究方法应用于直线运动、抛体运动和圆周运动等特例中,以便读者能够更好地掌握相关的研究方法。本章的内容体系及研究问题的思路可用图 1-1 表示。

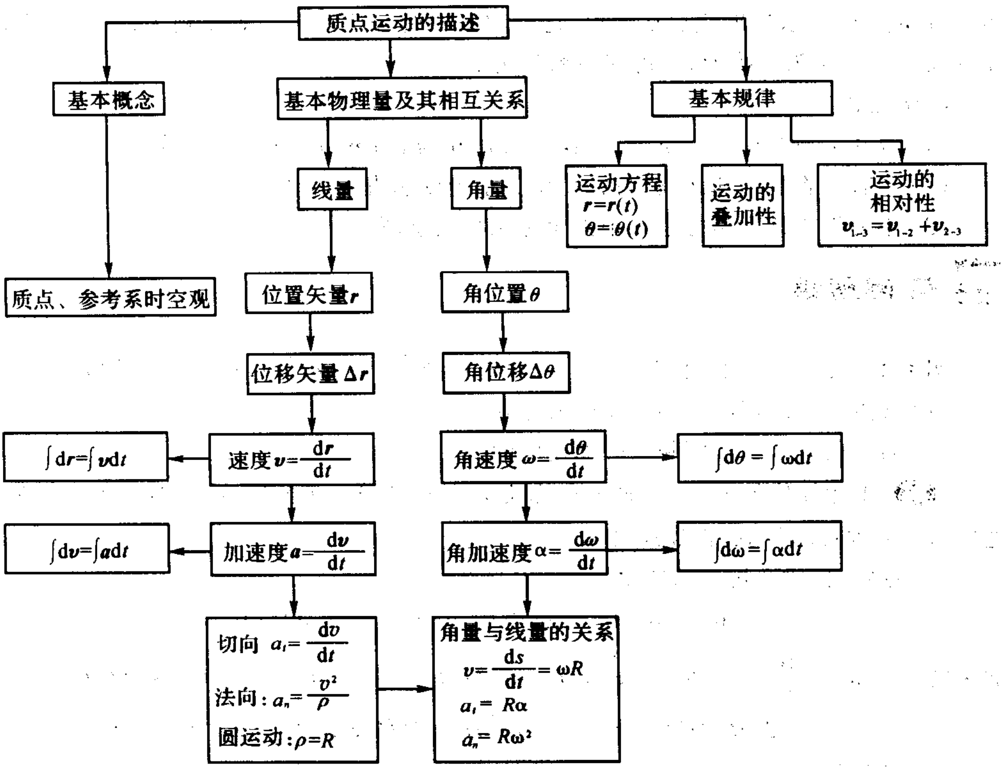

图 1-1

2. 学习重点　掌握位置矢量、位移、速度、加速度、切向加速度和法向加速度的概念,能借助于直角坐标系求解质点在平面内的运动,能运用角量与线量的关系,计算质点作圆周运动时的角速度、角加速度以及切向和法向加速度。

3. 注意事项

(1) 对参考系的理解应包含以下三个方面:参考系即为描述物体运动而选的标准物;运动的描述是相对的;时间和空间不因参考系的选择而改变——经典力学中的绝对时空观。

(2) 对矢量及其运算的表述通常有两种方法,一是图示法,二是坐标(解析)法。但不管用哪种方法,都应与相应的图形配合。图形不仅能给人以形象、直观的认识,更重要的

是还可清楚地表示某些量之间的几何关系。切忌懒于动笔，若无图形，则会使有些问题（特别是有几何关系的问题）的求解思路受阻，甚至无法求解。

(3) 运动学中的两类问题——第一类：已知运动方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，求速度 $\boldsymbol{v}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}$。对这类问题，只需按运动方程对时间 t 求导数即可；第二类：已知 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t)$ 及初始 t_0 时刻条件 $\boldsymbol{v}_0$ 和 $\boldsymbol{r}_0$，求速度或运动方程。这类问题的解决比前一类难度稍大，可应用坐标分量式将问题简化为一维形式，再利用积分法求解。

4. 常见错误

(1) 混淆矢量与标量　$\boldsymbol{r}$ 与 r，$\Delta\boldsymbol{r}$ 与 Δr，$\boldsymbol{v}$ 与 v，$\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$ 与 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ 等。

(2) 不管是否匀变速运动，盲目使用关于匀变速直线运动的三个公式。

(3) 不习惯于建立坐标系并根据坐标系列式求解。

范例解读

例 1-1　已知质点的运动学方程 $\boldsymbol{r}=R(\cos kt^2\boldsymbol{i}+\sin kt^2\boldsymbol{j})$，式中 R、k 均为常量，求：

(1) 质点运动的速度及加速度的表达式；

(2) 质点的切向加速度和法向加速度的大小。

解　本题知位矢求速度、加速度，属运动学中的第一类问题，应先对位矢求导数（得速度），再对速度求导数（得加速度）。

(1) 据定义，质点运动的速度

$$\boldsymbol{v}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t=2ktR(-\sin kt^2\boldsymbol{i}+\cos kt^2\boldsymbol{j})$$

加速度
$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=2kR(-\sin kt^2\boldsymbol{i}+\cos kt^2\boldsymbol{j})-4k^2t^2R(\cos kt^2\boldsymbol{i}+\sin kt^2\boldsymbol{j})$$
$$=-2kR(2kt^2\cos kt^2+\sin kt^2)\boldsymbol{i}+2kR(\cos kt^2-2kt^2\sin kt^2)\boldsymbol{j}$$

(2) 由题意知

$$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{R^2(\cos^2kt^2+\sin^2kt^2)}=R$$

即质点作圆周运动，其速率　$v=2kRt$

故质点的切向加速度的大小　$a_t=\mathrm{d}v/\mathrm{d}t=2kR$

法向加速度的大小　$a_n=\dfrac{v^2}{R}=4k^2Rt^2$

注意　当质点作一般曲线运动时，用公式 $a_n=v^2/\rho$ 求法向速度是比较麻烦的，因为曲率半径不容易计算。但是先求出质点的切向加速度和总加速度再利用公式 $a_n=\sqrt{a^2-a_t^2}$ 求法向加速度却很方便。

例 1-2　（未蜕化的直线运动）已知一质点在参考系 XOY 中由静止状态从原点开始运动，其加速度 $\boldsymbol{a}=6\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$，试求：质点的运动速度、运动方程及轨迹方程。

解 本题属于运动学中的第二类问题，应用积分方法来解决。由已知条件可知

$$a_x = \mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t = 6, a_y = \mathrm{d}v_y/\mathrm{d}t = 4$$

所以
$$v_x = \int_0^t 6\mathrm{d}t = 6t, v_y = \int_0^t 4\mathrm{d}t = 4t$$

所以，速度矢量为
$$\boldsymbol{v} = 6t\boldsymbol{i} + 4t\boldsymbol{j}$$

又因为
$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 6t, v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 4t$$

所以
$$x = \int_0^t 6t \cdot \mathrm{d}t = 3t^2 \quad ①$$

$$y = \int_0^t 4t \cdot \mathrm{d}t = 2t^2 \quad ②$$

这样求得运动方程(矢量形式) $\boldsymbol{r} = 3t^2\boldsymbol{i} + 2t^2\boldsymbol{j}$

由式 ①，② 消去 t，即得轨迹方程 $y = 2x/3$，可见其轨迹方程为过原点，斜率为 2/3 的直线。

例 1-3 路灯距地面的高度为 H，一个身高为 h 的人以速度 v_0 离电杆而去，如图 1-2 所示。求：

(1) 人影中头顶的移动速度；

(2) 影子长度增长的速率；

(3) 若人的运动速率不是恒定的，结果又如何？

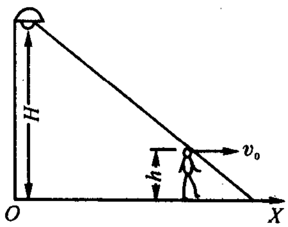

图 1-2

解 (1) 以灯到地面的垂足为坐标原点，沿人运动的方向为 X 轴正方向，人头影的位置用坐标 x 表示。人脚在 t 时刻的坐标为 $v_0 t$，由直角三角形的相似有

$$\frac{x}{H} = \frac{x - v_0 t}{h} \quad ①$$

将 ① 式对 t 求导，得
$$\frac{1}{H}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{h}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - v_0\right) \quad ②$$

式中 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 即为头影运动速度，由 ② 式解得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{Hv_0}{H - h} \quad ③$$

(2) 影子长度增长速度为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - v_0 = \frac{hv_0}{H - h} \quad ④$$

(3) 若人的运动速率不是恒定的，则 ① 式变为

$$\frac{x}{H} = \frac{x - \int_0^t v(t)\mathrm{d}t}{h}$$

作为变上限的定积分,对 t 的导数即得被积函数 $v(t)$。也就是说,头影速度只依赖于该时刻人运动的速度,而与历史情况及人现在所处的位置无关。

讨论　一个物理结果的正确性,在无实验对照的条件下(比如在考试中解题),往往可以通过如下两个途径检查是否有错:一是看其量纲是否正确,二是看其极端情况是否合理。在 ③ 式中,右端量纲正确。极端情况是:

当 $h \to 0$ 时,　　　　$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t \to v_0$

当 $h \to H$ 时,　　　　$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t \to \infty$

这当然是合理的。

这两种方法只能检查出大的错误,但对于

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{H^2}{H^2 - h^2}v_0$$

这样的错误结果就无法查出。

例 1-4　一人骑自行车在风中向东行。当车速为 $10\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ 时,觉得有南风;当车速为 $15\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ 时,觉得有东南风,求风速。

解　本题为相对运动问题。设风速为绝对速度 $\boldsymbol{v}_风$,车速为牵连速度 $\boldsymbol{v}_牵$,感觉到的风速为相对速度 $\boldsymbol{v}_相$。由题意可得速度矢量如图 1-3 所示。由图 1-3 可知,感觉到的南风大小为 $5\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$,故

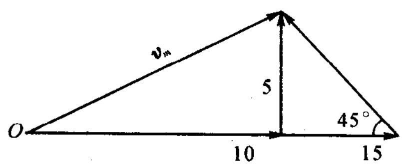

图 1-3

$$|\boldsymbol{v}_风| = \sqrt{10^2 + 5^2} = 11.2(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})$$

风速与车的运行方向的夹角

$$\alpha = \arctan\frac{5}{10} = 27°$$

习题精解

1-1(1-4)　在图 1-4 中,直线 1 与圆弧 2 分别表示两质点 A、B 从同一地点出发,沿同一方向作直线运动的 v-t 图。已知 B 的初速度 $v_0 = b\mathrm{m/s}$,它的速率由 v_0 变为 0 所花时间为 $t_1 = 2b\mathrm{s}$。(1) 试求 B 在任意时刻 t 的加速度;(2) 设在 B 停止时,A 恰好追上 B,求 A 的加速度;(3) 在什么时候,A、B 的速度相同?

解　本题需注意题中之圆弧的含义及图中圆弧与 v 轴相交处的垂直符号。

(1) 圆弧的圆心应在 v 轴且在 0 以下,设值为 c。因圆心到 v_0 与到 t_1 两半径相等,即

$$v_0 + c = (c^2 + t_1^2)^{1/2}$$

代入 $v_0 = b$, $t_1 = 2b$,解之可得

$$c = \frac{3}{2}b$$

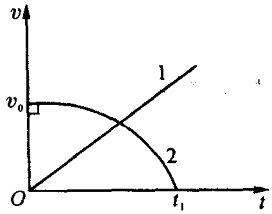

图 1-4

对圆弧上任一点(v,t)，有

$$(v+c)^2 + t^2 = (v_0 + c)^2$$

所以
$$v = \frac{1}{2}\sqrt{25b^2 - 4t^2} - \frac{3}{2}b$$

从而
$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{2t}{\sqrt{25b^2 - 4t^2}}$$

(2) 由图可知
$$v_A = c_1 t, a_A = \mathrm{d}v_A/\mathrm{d}t = c_1$$

据题意，当 $t = t_1 = 2b$ 时，$x_A = x_B$

而
$$x_A = \int_0^{t_1} v_A \mathrm{d}t = 2c_1 b^2$$

$$x_B = \int_0^{t_1} v_B \mathrm{d}t = \int_0^{2b}\left[\sqrt{\left(\frac{5}{2}b\right)^2 - t^2} - \frac{3}{2}b\right]\mathrm{d}t$$

$$= \left[\frac{t}{2}\sqrt{\left(\frac{5}{2}b\right)^2 - t^2} + \frac{\left(\frac{5}{2}b\right)^2}{2}\arcsin\frac{t}{\frac{5}{2}b} - \frac{3}{2}bt\right]\Bigg|_0^{2b}$$

$$= -\frac{3}{2}b^2 + \frac{25}{8}b^2 \arcsin\frac{4}{5}$$

解之得
$$c_1 = 0.70\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

所以
$$a_A = 0.70\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

(3) 因为
$$v_A = c_1 t = 0.70t$$

$$v_B = \frac{1}{2}\sqrt{25b^2 - 4t^2} - \frac{3}{2}b$$

所以令 $v_A = v_B$，可解得
$$t = 1.08b\mathrm{s}$$

1-2(1-7)　在离水面高度为 h 的岸边，有人用绳子拉船靠岸，船在离岸边 s 距离处。当人以 v_0 的速率收绳时，试求船的速率与加速度各有多大。

解 本题中船受到约束，不能离开水面。根据约束几何关系可以很方便地求解。

设人与船之间的绳长为 l，有

$$l^2 = h^2 + s^2$$

上式对时间求导，得

$$2l\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = 2s\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

因为 $\mathrm{d}l/\mathrm{d}t < 0, \mathrm{d}s/\mathrm{d}t < 0$，所以收绳速率 $v_0 = -\mathrm{d}l/\mathrm{d}t$，船的速率大小为

$$v=-\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-\frac{l}{s}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=\frac{l}{s}v_0=\frac{(h^2+s^2)^{1/2}}{s}v_0$$

船的加速度大小为

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{s\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}-l\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}{s^2}v_0=\frac{-sv_0+lv}{s^2}v_0=\frac{h^2v_0^2}{s^3}$$

1-3(1-11)　一质点沿光滑的抛物线轨道，从起始位置(2,2)无初速地滑下，如图1-5。问质点将在何处离开抛物线？抛物线方程为 $y^2=2x$，式中 x、y 以 m 为单位。

解 本题需注意变量变换和质点离开抛物线的条件。

设质点所在处抛物线切线与 x 轴夹角为 θ，则有

$$a_t=\mathrm{d}v/\mathrm{d}t=g\sin\theta$$

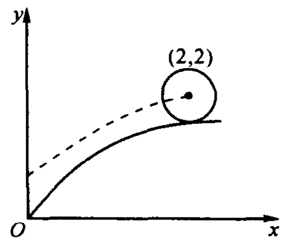

图 1-5

因为
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s},$$
$$\mathrm{d}s\cdot\sin\theta=-\mathrm{d}y$$

所以
$$v\mathrm{d}v=-g\mathrm{d}y$$

两边积分，得
$$\frac{1}{2}v^2=-gy+C$$

当 $y=y_0=2$ 时 $v=0$，有 $C=y_0$，即
$$v^2=2(y_0-y)g$$

由质点受力分析可知：当质点法向加速度等于重力加速度在法向上的分量时，质点在该处将离开抛物线。也即

$$g\cos\theta=\frac{v^2}{\rho}$$

由曲线在直角坐标时曲率半径的公式

$$\rho=\left|\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}\right|$$

并代入
$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{2x})=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$y''=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{x^{3/2}}$$

得
$$\rho=\frac{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{3/2}}{\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot x^{-3/2}}=2\sqrt{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^{3/2}=(1+y^2)^{3/2}$$

又因为
$$\tan\theta=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{y},\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$$

所以有
$$g\cdot\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}=\frac{2(y_0-y)g}{(1+y^2)^{3/2}}$$
整理可得
$$y(1+y^2)=2(y_0-y)$$
$$y^3+3y=4$$
即得
$$y=1\text{m}$$
$$x=y^2/2=0.5\text{m}$$

1-4(1-13) 如图1-6所示，杆 AB 以匀角速度 ω 绕 A 点转动，并带动水平杆 OC 上的质点 M 运动。设起始时刻杆在竖直位置，$OA=h$。

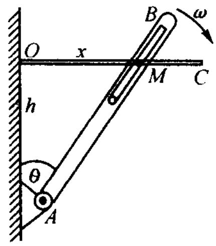

图 1-6

(1) 列出质点 M 沿水平杆 OC 的运动方程；

(2) 求质点 M 沿杆 OC 滑动的速度和加速度的大小。

解 质点 M 作直线运动。

(1) 因为 $\tan\theta=\dfrac{x}{h}$ 而 $\theta=\omega t$ 所以
$$x=h\tan\omega t$$

(2) 速度
$$v=\frac{\text{d}x}{\text{d}t}=\frac{h\omega}{\cos^2\omega t}$$

加速度
$$a=\frac{\text{d}v}{\text{d}t}=\frac{\text{d}}{\text{d}t}(h\omega\sec^2\omega t)=2h\omega^2\sec^2\omega t\cdot\tan\omega t$$