陈文灯 黄先开 主编

聚焦考研 Focus NETM

数学四

临考演习

考研名师网络课堂 www.kaoyan.tv

2004版

每做完一份模拟试卷，
有效总结做题的规律和技巧，
考研只不过多一次演习而已。

15套试卷

随书奉送“考研赠卡”
详见封二、封三

赠

世界图书出版公司

前　言

目前考研数学统考题的特点可以用两句话，十八个字来概括：信息量大，题量大；知识面宽，综合性强，难度大，这个命题的特点在近几年不会有大的变化。面对这种形势如何合理地安排时间，发挥自己的潜能，高效地进行复习，是每个考研学子必须很好解决的问题。解决好了，应试时就能考出自己的水平，或许能超常发挥，考出自己意想不到的好成绩；解决不好就会“事倍功半”。对数学我建议同学们这样复习：

(1)牢记重要的概念、定理和公式。因为这样做可使你应试时节省“追忆”、“推演”的时间，同时可使你少犯错用定理、公式的错误。

(2)掌握一些题型的快速解法，提高解题速度。

(3)掌握重要的变量替换、辅助函数的作法技巧，重要题型的解题思路的方法。这可使你应试时很快找到解题的突破口和切入点。

《数学四·临考演习》就是基于上面的出发点精编了 15 套难度较大、技巧性较强、基本概念较丰富的多种题型的模拟试题。只有通过模拟试题的训练，才能掌握各种题型的解题思路、技巧和方法，理解各基本概念的深刻内涵，才能使考研学子应试时“更上一层楼”，否则将达不到应有的效果。

由于成书仓促，又有新的思路、新的题型，难免有欠缺和不足或错误的地方，请考研学子和数学同仁批评指正。

陈文灯　陈文灯印

2003 年 9 月

目录

数学四　临考演习（一）

考生注意：(1) 本试卷共 23 大题，满分 150 分.

(2) 根据国家标准，试卷中的正切函数，余切函数、反正切函数、反余切函数分别用 tan$x$、cot$x$、arctan$x$ 和 arccot$x$ 表示.

得分	评卷人

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

(1) 设函数 $y=y(x)$ 满足 $\Delta y=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\Delta x+o(\Delta x)$，且 $y(1)=1$，则 $\int_1^2 y(x)dx=$ $\frac{\pi}{4}$.

(2) 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处有 $f(0)=0, f'(0)=-2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \ln\cos(x-t)dt}{\sqrt{1-2f^2(x)}-1}=$ 0.

(3) 设 $f(x,y)$ 连续，且 $f(x,y)=xy+\iint\limits_D xyf(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，其中 D 是由 $y=x, y=0, x=1$ 所围区域，则 $f''_{xy}(x,y)=$ $\frac{8}{7}$.

沿线裁下

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶非零方阵，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&1&0\\t&0&1\end{bmatrix}$，且已知 $r(\boldsymbol{A})=2, r(\boldsymbol{AB})=1$，则 $t=$ -3.

(5) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}=$ $\begin{bmatrix}\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}&0\\-\frac{1}{5}&\frac{3}{5}&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

(6) 已知随机事件 A、B、C 满足 P$(A)=0.4, P(B)=0.5, P(C)=0.5$，且 A,B 独立，A,C 互不相容，则概率 $P(A-C\mid AB\cup C)=$ $\frac{2}{7}$.

得分	评卷人

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

(7) 设 $f(x)$、$g(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内连续，且 $f(x)$ 具有连续一阶导数，满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=0, f'(x)=-2x^2+\int_0^x g(x-t)dt$，则

(A) $x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点.

(B) $x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点.

(C) $(0,f(0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.　【 C 】

(8) 下列等式中正确的是

(A) $\int f'(2x)\mathrm{d}x = f(2x)+c$.　　(B) $\int \mathrm{d}f(2x) = f(2x)+c$.

(C) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t = f(x-t)$.　　(D) $\mathrm{d}\int_0^1 xf(xt)\mathrm{d}t = f(x)$.　　【 B 】

(9) 设 $F(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\}$，其定义域为 $(-1,1)$，其中 $f_1(x) = x+1$，$f_2(x) = (x+1)^2$，则 $F'(x)$ 等于

(A) $\begin{cases} 1, & -1<x<0, \\ 2(x+1), & 0<x<1. \end{cases}$　　(B) $\begin{cases} 2(x+1), & 0<x<1, \\ 1, & -1<x<0. \end{cases}$

(C) $\begin{cases} 1, & -1<x<0, \\ 2(x+1), & 0\leqslant x<1. \end{cases}$　　(D) $\begin{cases} 2(x+1), & 0\leqslant x<1, \\ 1, & -1<x<0. \end{cases}$　　【 A 】

(10) 设 $f(x)$ 为连续函数，则 $\int_0^x[\int_0^u f(t)dt]du$ 等于

(A) $\int_0^x (u-x)f(u)du$.　　(B) $x\int_0^x f(u)du$.

(C) $\int_0^x uf(u)du$.　　(D) $\int_0^x (x-u)f(u)du$.　　【 D 】

(11) 设函数 $z = f(x,y)$ 满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$，且 $f(x,0) = 1$，$f_y'(x,0) = x$，则 $f(x,y)$ 等于

(A) $1 - xy + y^2$.　　(B) $1 + xy + y^2$.

(C) $1 - x^2y + y^2$.　　(D) $1 + x^2y + y^2$.　　【 B 】

(12) 已知 **A**、**B** 为三阶矩阵，且有相同的特征值 1,2,2，则下列命题：①**A**,**B** 等价；②**A**,**B** 相似；③ 若 **A**,**B** 为实对称矩阵，则 **A**,**B** 合同；④ 行列式 $|A-2E| = |2E-A|$，成立的有

(A) 1 个　　(B) 2 个　　(C) 3 个　　(D) 4 个　　【 C 】

(13) 设 X 为随机变量，若矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -X \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 的特征值全是实数的概率为 0.5，则

(A) X 服从区间[0,2]上的均匀分布.　(B) X 服从二项分布 B(2,0.5).

(C) X 服从参数为 1 的指数分布.　(D) X 服从正态分布 $N(0,1)$.　　【 B 】

(14) 设随机变量 X,Y 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，若概率 $P(aX-bY<\mu) = \frac{1}{2}$，则

(A) $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$.　　(B) $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$.

(C) $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$.　　(D) $a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$.　　【 B 】

沿线裁下

三、解答题（本题共 9 小题，满分 94 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

得分	评卷人

（15）（本题满分 8 分）

设 $f''(1)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=0$，记 $\varphi(x)=\int_0^1 f'[1+(x-1)t]dt$，求 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 某个邻域内的导数，并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=1$ 处的连续性.

解：令 $u=1+(x-1)t$ $\therefore \varphi(x)=\frac{1}{x-1}\int_1^x f'(u)du=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$\because \lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=0$ 故 $f(x)=0(x-1)=0$ $\therefore \varphi(x)=\frac{f(x)}{x-1}$

$\therefore \varphi'(1)=\lim\limits_{x\to1}\frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\varphi(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1}\frac{f'(x)}{2(x-1)}=\frac{f''(x)}{2}=\frac{f''(1)}{2}$

$(\varphi(1)=\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=0)$

$\because \lim\limits_{x\to1}\varphi'(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{f'(x)(x-1)-f(x)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1}\frac{f'(x)}{x-1}-\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)^2}=f''(1)-\frac{1}{2}f''(1)=\frac{1}{2}f''(1)$

即 $\lim\limits_{x\to1}\varphi'(x)=\varphi'(1)$ $\therefore$ 连续

沿线裁下

得分	评卷人

（16）（本题满分 9 分）

设函数 $u=f(\ln\sqrt{x^2+y^2})$，满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$，且极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^1 f(xt)dt}{x}=-1$，试求函数 f 的表达式.

解：$\because \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial\frac{\partial f}{\partial v}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial\frac{\partial v}{\partial x}}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v}$

$=f''(v)\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}+f'(v)\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

同理：$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(v)\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}+f'(v)\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(v)\frac{1}{x^2+y^2}=(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$

即 $f''(v)=(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}$

即 $f''(\ln\sqrt{x^2+y^2})=(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}$

令 $t=\ln\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow x^2+y^2=e^{2t}$

$\therefore f''(t)=e^{5t}$ (*)

又 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^1 f(xt)dt}{x}=-1$

设 $v=xt$ 即 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}\int_0^x f(v)dv}{x}=-1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{2x}=-1$

$\Rightarrow f(0)=0$ $f'(0)=-2$

对 (*) 式两边积分得

$f'(t)=\frac{1}{5}e^{5t}+C_1$ $\because f'(0)=-2$

$\Rightarrow C_1=-\frac{11}{5}$

$f(t)=\frac{1}{25}e^{5t}+(-\frac{11}{5})x+C_2$ $\because f(0)=$

$\Rightarrow C_2=-\frac{1}{25}$

$\therefore f(t)=\frac{1}{25}e^{5t}-\frac{11}{5}t-\frac{1}{25}$

得分	评卷人

（17）（本题满分 8 分）

设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，$g(x)$ 为偶函数，$f(x)+f(-x)=A$.（A 为常数）

（1）求证 $\int_{-a}^{a} f(x)g(x)\mathrm{d}x = A\int_{0}^{a} g(x)\mathrm{d}x$；

（2）计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \arctan e^{x}\mathrm{d}x$.

① 证明 只需证 $\int_{-a}^{a} f(x)g(x)\,dx = \int_{-a}^{a} \frac{A}{2} g(x)\,dx$

只需证 $\int_{-a}^{a} f(x)g(x)\,dx = \int_{-a}^{a} g(x)\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]\,dx$

移项后 只需证 $\int_{-a}^{a} g(x)[f(x) - \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}f(-x)]\,dx = 0$

即只需证 $\int_{-a}^{a} g(x)[f(x) - f(-x)] = 0$

∵ 设 $G(x) = f(x) - f(-x)$

$G(-x) = -G(x)$

∴ $G(x)$ 为奇函数 ∴ $g(x)G(x)$ 为奇函数

由对称区间上的性质 即 $\int_{-a}^{a} f(x)G(x)\,dx = 0$

∴ $\int_{-a}^{a} g(x)[f(x)-f(-x)]\,dx = 0$ ∴ 得证

∵ $\arctan e^{x} + \arctan e^{-x} = \frac{\pi}{2}$

∴ (2) $= \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|\,dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$

$= \frac{\pi}{2}[-\cos x]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$

得分	评卷人

（18）（本题满分 9 分）

由于折旧等因素，某机器转售价格 $R(t)$ 是时间 t（周）的减函数 $R(t)=\frac{3A}{4}\cdot e^{-\frac{t}{96}}$（元），其中 A 是机器的最初价格，在任何时间 t，机器开动就能产生 $P=\frac{A}{4}e^{-\frac{t}{48}}$ 的利润，问机器使用了多长时间后转售出去能使总利润最大？这利润是多少？机器卖了多少钱？

解：设总利润为 π 设使用了 t 周后卖出去了

~~$\pi = P + R(t) - A$~~

即 ~~$\pi = \frac{A}{4}e^{-\frac{t}{48}} + \frac{3}{4}A\cdot e^{-\frac{t}{96}} + A$~~

得分	评卷人

(19)（本题满分 8 分）

设$f(x),g(x),h(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内二阶可导，且当$x \to a^+$时，$f(x),g(x),h(x)$均为$x-a$的高阶无穷小量. 试证至少存在一点$\xi \in (a,b)$，使得

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f''(\xi) & g''(\xi) & h''(\xi) \end{vmatrix} = 0.$$

得分	评卷人

(20)（本题满分 13 分）

已知三阶方阵$\mathbf{B} \neq 0$的每一个列向量都是以下方程组的解

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -1 \end{cases} \quad 且\ r(\mathbf{B}) = 2.$$

(1) 求λ的值；(2) 设$\mathbf{A}$为此线性方程组的系数矩阵，求$(\boldsymbol{AB})^n$.

解：(1) ∵ $r(B)=2$，且三阶方阵B的每一列向量都是方程组的解，知方程组有非零解.

$\therefore |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \therefore \lambda = 1$

(2) 设B的列向量为b_1, b_2, b_3

则 $AB = A[b_1, b_2, b_3] = [Ab_1, Ab_2, Ab_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} [1 \quad 1 \quad 1]$

$\therefore (AB)^n = A(BA)^{n-1}B = 2^{n-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

沿线裁下

得分	评卷人

(21)(本题满分 13 分)

已知 **A**、**B** 为4阶矩阵,若满足 $AB+2B=0$, $r(B)=2$,且行列式 $|E+A|=|E+2A|=0$,(1) 求 **A** 的特征值; (2) 证明 *A* 可对角化; (3) 计算行列式 $|A+3E|$.

(1) $|E+A|=0 \Rightarrow \lambda_1=-1$ $\lambda_2=-\frac{1}{2}$ 是A的两个特征值
$|E+2A|=0$
又 $AB=-2B$, $B=[b_1,b_2,b_3,b_4]$ 不妨设 b_1,b_2 线性无关,
由特征值的定义知 $\lambda=-2$ 是其对应特征向量 b_1、b_2 的特征值
即 $\lambda b_1=Ab_1$ $\lambda b_2=Ab_2$ 即 λ 为二重根
∴ A的特征值为 $\lambda_1=-1$ $\lambda_2=-\frac{1}{2}$ $\lambda_3=\lambda_4=2$

(2) 由题意 λ_1 对应特征向量 α_1, λ_2 ——— α_2
由不同的特征值对应的特征向量线性无关 知
$[\alpha_1,\alpha_2,b_1,b_2]$ 线性无关
∴ A可对角化(有四个线性无关的特征向量)

(3) $P^{-1}(A+3E)P=P^{-1}AP+3E=\begin{pmatrix}2 & & & \\ & \frac{5}{2} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{pmatrix}$
∴ $|A+3E|=5$

得分	评卷人

(22)(本题满分 13 分)

设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}(1+xy)/4, & |x|<1, |y|<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

证明:X 与 Y 不独立,但 X^2 与 Y^2 独立.

解 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-1}^{1}f(x,y)dy=\begin{cases}\frac{1}{2} & |x|<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$ 同理 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2} & |y|<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$
∴ X与Y不独立
令 $U=X^2$
当 $u<0$ $F(u)=0$
$u\geq 1$ $F(u)=1$
当 $0\leq u<1$ $F(u)=P\{U\leq u\}=P\{X^2\leq u\}$
$=P(-\sqrt{u}\leq X\leq\sqrt{u})=\int_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}}\frac{1}{2}dx=\sqrt{u}$

同理 令 $V=Y^2$
当 $v<0$ $F(v)=0$
$v\geq 1$ $F(v)=1$
当 $0\leq v<1$ 时 $F(v)=\sqrt{v}$
∴ $F(u)=\begin{cases}0 & u<0\\ \sqrt{u} & 0\leq u<1\\ 1 & u\geq 1\end{cases}$ $F(v)=\begin{cases}0 & \cdots\\ \sqrt{v} & \cdots\\ 1 & \cdots\end{cases}$
且 $F(u,v)=P\{X^2\leq u, Y^2\leq v\}=$

得分	评卷人

(23)(本题满分 13 分)

要验收一批(100 件)乐器,验收方案如下:自该批乐器中随机地取 3 件测试(设三件乐器的测试是相互独立的),如果 3 件中有一件在测试中被认为是音色不纯,则这批乐器就被拒绝接收,设一件音色不纯的乐器经测试查出其为音色不纯的概率为 0.95;而一件音色纯的乐器经测试被误认为不纯的概率为 0.01. 如果已知这 100 件乐器中恰有 4 件是音色不纯的,试问这批乐器被接收的概率是多少?

解:设B为乐器被接受
A_i 为抽取乐器中不纯的件数 $i=0,1,2,3$
则 $P(B|A_0)=(0.99)^3$ $P(B|A_1)=(0.99)^2\times 0.05$ $P(B|A_2)=0.99\times 0.05^2$ $P(B|A_3)=0.05^3$
又 $P(A_0)=\frac{C_{96}^3}{C_{100}^3}$ $P(A_1)=\frac{C_{96}^2C_4^1}{C_{100}^3}$ $P(A_2)=\frac{C_{96}^1C_4^2}{C_{100}^3}$ $P(A_3)=\frac{C_4^3}{C_{100}^3}$
∴ $P(B)=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=0.8629$

数学四　临考演习（二）

考生注意：(1) 本试卷共 23 大题，满分 150 分.

(2) 根据国家标准，试卷中的正切函数，余切函数、反正切函数、反余切函数分别用 tanx、cotx、arctanx 和 arccotx 表示.

沿线裁下

得分	评卷人

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 把答案填在题中横线上）

(1) 已知 $f(x)$ 满足 $f(0)=0, f'(0)=-2$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x[\int_0^u f(u-t)\,dt]\,du}{\sin x(1-\cos x)}=$ ______.　$-\frac{2}{3}$

(2) 设 $f(x)$ 是连续可导函数且 $f(x)=x+x\int_0^1 f(t)\,dt+x^2\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$，则 $f(x)=$ ______.

(3) 从已知曲线 $x^2+2xy+y^2-4x-5y+3=0$ 作切线，使其平行于直线 $2x+3y=0$，则切线方程为 ______.　$2x+3y-2=0$

(4) 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为实矩阵，且满足

①$a_{ij}=A_{ij}$（A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式）；②$|A|=1$；③$a_{11}=1$.

求 $Ax=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$ 的解.

(5) 已知 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 为三阶相似矩阵，$\lambda_1=1,\lambda_2=2$ 为 $\mathbf{A}$ 的两个特征值，行列式 $|B|=2$，则行列式 $\begin{vmatrix}(A+E)^{-1} & 0\\ 0 & (2B)^*\end{vmatrix}=$ ______.　$\frac{64}{3}$

(6) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从正态分布 $N(0,1)$，则概率 $P\{XY\geq0\}=$ ______.　$\frac{1}{2}$

得分	评卷人

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

(7) 以下命题正确的是

(A) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{|x|}\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$.　　(B) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{|x|}\arctan\dfrac{1}{|x|}=\dfrac{\pi}{2}$.

(C) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin|x|}{x}\arctan\dfrac{1}{|x|}=\dfrac{\pi}{2}$.　　(D) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin|x|}{|x|}\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$.　　【 D 】

(8) 函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在点(0,0)处

(A) 连续,但偏导数不存在.　(B) 偏导数存在,但不可微.
(C) 可微.　(D) 偏导数存在且可微.　【　】

(9) 下列结论中,成立的是

(A) $\int_1^2 \ln x dx > \int_1^2 (\ln x)^2 dx$, $\int_0^1 e^x dx > \int_0^1 \ln(1+x)dx$.

(B) $\int_1^2 \ln x dx < \int_1^2 (\ln x)^2 dx$, $\int_0^1 e^x dx > \int_0^1 \ln(1+x)dx$.

(C) $\int_1^2 \ln x dx > \int_1^2 (\ln x)^2 dx$, $\int_0^1 e^x dx < \int_0^1 \ln(1+x)dx$.

(D) $\int_1^2 \ln x dx < \int_1^2 (\ln x)^2 dx$, $\int_0^1 e^x dx < \int_0^1 \ln(1+x)dx$.　【A】

(10) 交换积分次序:$\int_0^1 dx\int_{x-1}^{1-x} f(x,y)dy$

(A) $\int_{-1}^0 dy\int_0^{1-y} f(x,y)dx + \int_0^1 dy\int_0^{1+y} f(x,y)dx$.

(B) $\int_{-1}^0 dy\int_0^{1+y} f(x,y)dx + \int_0^1 dy\int_0^{1-y} f(x,y)dx$.

(C) $\int_{-1}^1 dy\int_{1-y}^{1+y} f(x,y)dx$.

(D) $\int_{-1}^1 dy\int_{1+y}^{1-y} f(x,y)dx$.　【B】

(11) 设$f(t)$ 是连续函数,则$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x f(x-y)\mathrm{d}y$ 等于

(A) $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^y f(x-y)\mathrm{d}x$.　(B) $\int_0^1 (1-x)f(x)\mathrm{d}x$.

(C) $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1 f(x-y)\mathrm{d}x$.　(D) $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$.　[B]

(12) 已知三阶矩阵 **A** 的特征值为 0, ±1,则下列结论中不正确的是
(A) 矩阵 **A** 是不可逆的.　(B) 矩阵 **A** 的主对角元素之和为 0.
(C) 1 和 −1 所对应的特征向量是正交的.　(D) $\mathbf{A}x = \mathbf{0}$ 的基础解系由一个向量组成.　【C】

(13) 下表中列出了二维相互独立的离散型随机变量(X,Y) 的部分联合分布律和边缘分布律中的数值,则

X \ Y	0	1	2	$P(X=x_i)$
0	α	$\frac{1}{8}$	β	
1	$\frac{1}{8}$			
$P(Y=y_j)$	$\frac{1}{6}$			1

(A) $\alpha = \frac{3}{8}, \beta = \frac{1}{12}$.　(B) $\alpha = \frac{1}{24}, \beta = \frac{1}{12}$.

(C) $\alpha = \frac{1}{12}, \beta = \frac{1}{3}$.　(D) $\alpha = \frac{1}{24}, \beta = \frac{1}{6}$.　[B]

沿线裁下

(14) 设随机变量 $X \sim N(0,1)$，随机变量 $Y \sim N(1,4)$，且 X 与 Y 相互独立，则

(A) $P(X+Y \leqslant 0) = P(X+Y \geqslant 0)$.　(B) $P(X+Y \leqslant 1) = P(X+Y \geqslant 1)$.

(C) $P(X-Y \leqslant 0) = P(X-Y \geqslant 0)$.　(D) $P(X-Y \leqslant 1) = P(X-Y \geqslant 1)$.　[B]

三、解答题（本题共 9 小题，满分 94 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

得分	评卷人

(15)（本题满分 8 分）

设 φ 具有连续的二阶偏导数，Ψ 具有连续的一阶导数，令 $z = \frac{1}{2}\varphi(\underset{①}{y+ax}, \underset{②}{y-ax}) + \frac{1}{2a}\int_{y-ax}^{y+ax}\Psi(t)\,dt$，试求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

解：$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}\varphi_1' \cdot a + \frac{1}{2}\varphi_2'(-a) + \frac{1}{2a}(\psi(y+ax)\cdot a + \psi(y-ax)\cdot a)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\varphi_{11}'' a^2 + \frac{1}{2}\varphi_{12}'' a(-a) + \frac{1}{2}\varphi_{21}''(-a)a + \frac{1}{2}\varphi_{22}''(-a)^2 + \frac{1}{2a}(\psi'(y+ax)a^2 + \psi'(y-ax)a(-a)$

$= \frac{1}{2}a^2(\varphi_{11}'' - 2\varphi_{12}'' + \varphi_{22}'') + \frac{a}{2}(\psi'(y+ax) - \psi'(y-ax))$

同理 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}\varphi_1' + \frac{1}{2}\varphi_2' + \frac{1}{2a}(\psi(y+ax) - \psi(y-ax))$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{2}\varphi_{11}'' + \frac{1}{2}\varphi_{12}'' + \frac{1}{2}\varphi_{21}'' + \frac{1}{2}\varphi_{22}'' + \frac{1}{2a}(\psi'(y+ax) - \psi'(y-ax))$

$= \frac{1}{2}(\varphi_{11}'' + 2\varphi_{12}'' + \varphi_{22}'') + \frac{1}{2a}(\psi'(y+ax) - \psi'(y-ax))$

$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -a^2\varphi_{12}'' - a^2\varphi_{12}'' = -2a^2\varphi_{12}'' = -2a^2\varphi_{12}''(y+ax, y-ax)$

得分	评卷人

(16)（本题满分 8 分）

试证：对于在 $(1,2)$ 内任一点 x 处均有 $\left|\ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}\right| < \frac{1}{4}(x-1)^3$.

沿线裁下

得分	评卷人

(17)(本题满分9分)

[多元函数偏导数.全微分]

[多元函数偏导数.全微分] 设 $f(x,y)$ 在单位圆上有连续的偏导数,且在边界上取值为零,证明

$$f(0,0)=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{-1}{2\pi}\iint_D\frac{x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}}{x^2+y^2}dxdy,$$

其中 D 为圆环域:$\varepsilon^2\leqslant x^2+y^2\leqslant1$.

解:设 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $u(r,\theta)=f(x,y)$

$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$

$\therefore r\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}r\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}r\sin\theta=x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}$

$\therefore\iint_D\frac{x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}}{x^2+y^2}dxdy=\iint_D\frac{r\frac{\partial u}{\partial r}}{r^2}rdrd\theta=\iint_D\frac{\partial u}{\partial r}drd\theta$

$=\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^1\frac{\partial u}{\partial r}drd\theta$

$=\int_0^{2\pi}[f(r\cos\theta,r\sin\theta)]_\varepsilon^1d\theta$

$=\int_0^{2\pi}f(\cos\theta,\sin\theta)d\theta-\int_0^{2\pi}f(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)d\theta$

$\because f(x,y)$ 在边界取值为0 $\therefore$ 原式 $=-\int_0^{2\pi}f(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)d\theta$

由积分中值定理 $\theta^*\in[0,2\pi]$ 上式 $=-2\pi f(\varepsilon\cos\theta^*,\varepsilon\sin\theta^*)$

$\therefore\lim_{\varepsilon\to0}\frac{-1}{2\pi}(-2\pi)f(\varepsilon\cos\theta^*,\varepsilon\sin\theta^*)=f(0,0)$

得分	评卷人

(18)(本题满分8分)

[定积分]

[定积分] 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$,其中 $f(x)=\int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{x}}\frac{du}{1+\tan u^2}$.

解:$\because\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)d\sqrt{x}$

$=2[f(x)\sqrt{x}]_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x}\,df(x)$

$=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{1}{1+\tan x}dx$

$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan x}dx$

令 $t=\frac{\pi}{2}-x$

$\therefore I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cot t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{1+\tan x}dx$

$\therefore 2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{1+\tan x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx$

$\therefore I=\frac{\pi}{4}$

$\therefore\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=-I=-\frac{\pi}{4}$

得分	评卷人

(19)(本题满分9分)

设函数 $z=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数,且 $\frac{\partial f}{\partial y}\neq0$.

试证:对任意的常数 C, $f(x,y)=C$ 为一直线的充要条件是

$$(f'_y)^2f''_{xx}-2f'_xf'_yf''_{xy}+(f'_x)^2f''_{yy}=0.\quad(*)$$

证明:必要性:令 $f(x,y)=ax+by+c$

则 $f'_x=a$ $f'_y=b$ $f''_{xx}=0$ $f''_{xy}=0$ $f''_{yy}=0$ $\therefore(*)=0$ $\therefore$ 得证

充分性:$f(x,y)-C=0$

确定:$\frac{dy}{dx}=-\frac{f'_x}{f'_y}$

$\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{(f''_{xx}+f''_{xy}\frac{dy}{dx})f'_y-(f''_{xy}+f''_{yy}\frac{dy}{dx})f'_x}{(f'_y)^2}=-\frac{f''_{xx}(f'_y)^2-2f'_xf'_yf''_{xy}+f''_{yy}(f'_x)^2}{(f'_y)^3}=0$

$\therefore$ 由 $(*)=0\Rightarrow$ $\therefore$ 得证

综上命题得证

沿线裁下

得分	评卷人

(20)（本题满分 13 分）

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta}$ 为四维列向量，$\mathbf{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$，已知 $\mathbf{A}x=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为

$$x=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\1\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}.$$ 其中 $\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ 为对应齐次方程组的基础解系，k_1,k_2 为任意常数. 令 $\mathbf{B}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$，试求 $\mathbf{B}y=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

解：∵ $r(A)=2$

由题意知：$\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4=\beta$

$\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_4=0$

$-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$

∵ $\alpha_4=-\alpha_1-2\alpha_2$；$\alpha_3=\alpha_1-\alpha_2$ $r(A)=2$

∴ α_1,α_2 线性无关

∴ $\beta=2\alpha_1-5\alpha_2+0\alpha_3$

∴ $[2,-5,0]^T$ 是 $By=\beta$ 的一个特解

$B=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 的基础解向量个数为一个

$Bx=0$

$-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$

∴ $[1,-1,-1]^T$ 为其基础解向量

∴ 通解 $y=k\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\-5\\0\end{bmatrix}$

沿线裁下

得分	评卷人

(21)（本题满分 13 分）

设 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 为 n 阶矩阵，$r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})<n$. 证明：

(1) $\lambda=0$ 为 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 相同的特征值；

(2) $\mathbf{A}x=\mathbf{0}$ 与 $\mathbf{B}x=\mathbf{0}$ 的基础解系组成的向量组线性相关；

(3) $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 具有公共的特征向量.

证明：(1) $r(A)<n$，$r(B)<n$ ∴ $|A|=0$ $|B|=0$

设 A 的特征值 λ 知 $|\lambda E-A|=0$ 当 $\lambda=0$ $|\lambda E-A|=|0E-A|=|A|=0$

∴ $\lambda=0$ 是 A 的特征值 同理 $\lambda=0$ 也是 B 的特征值 ∴得证

(2) ∵ $AX=0$ 的基础解向量的个数 $n-r(A)$，同理为 $n-r(B)$

又∵ $n-r(A)+n-r(B)=2n-(r(A)+r(B))>n$

即 $AX=0$，$BX=0$ 的基础解系组成的向量组向量个数 $>n$

但向量的维数为 n ∴线性相关

(3) 由 A、B 有相同的特征值 λ

∵ $AX=\lambda X$ 即 $(A-\lambda E)X=AX=0$ 知 $\lambda=0$ 的特征向量是 $AX=0$ 的~~基~~解向量

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-s}$，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-t}$ 分别为 $AX=0$，$BX=0$ 的基础解向量

由线性相关知存在不全为零的 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n-s}\alpha_{n-s}+l_1\beta_1+l_2\beta_2+\cdots+l_{n-t}\beta_{n-t}=0$

令 $\xi=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n-s}\alpha_{n-s}=-l_1\beta_1-l_2\beta_2-\cdots-l_{n-t}\beta_{n-t}\neq0$

∴ ξ 是 $AX=0$ $\lambda=0$ 对应的特征向量，同理 也是 $BX=0$，$\lambda=0$ 对应的特征向量，∴具有公共特征向量

得分	评卷人

(22)（本题满分 13 分）

在线段[0,1] 上任取 n 个点,试求其中最远两点距离的数学期望.

解：设 $x_1 \cdots x_n$ 为 [0,1] 上 n 个点，则 $x_1 \cdots x_n$ 在 [0,1] 上服从均匀分布

且 $x_1, x_2 \cdots x_n$ 相互独立.

$\therefore f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$ $\quad F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$

而最远两点的距离 设 $X_{(1)} = \min\{x_1, x_2 \cdots x_n\}$ $\quad X_{(n)} = \max\{x_1, x_2 \cdots x_n\}$

为 $X_{(n)} - X_{(1)} = X$ $\quad \therefore EX = EX_{(n)} - EX_{(1)}$

又 $F_{X_{(n)}}(x) = F^n(x) = x^n$ $\quad F_{X_{(1)}}(x) = 1 - (1-x)^n$

$f_{X_{(n)}}(x) = n x^{n-1}$ $\quad f_{X_{(1)}}(x) = n(1-x)^{n-1}$

$\therefore EX_{(n)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, n x^{n-1} dx = \int_0^1 n x^n dx = \frac{n}{n+1}$ $\quad EX_{(1)} = \frac{1}{n+1}$

$\therefore X = \frac{n-1}{n+1}$

得分	评卷人

(23)（本题满分 13 分）

每箱产品有十件,其次品数从 0 到 2 是等可能的,开箱检验时,从中任取一件,如果检验为次品,则认为该箱产品不合格而拒收,由于检验误差,假设一件正品被误判为次品的概率是 2%,一件次品被漏查误判为正品的概率是 10% . 试求:

(1) 检验一箱产品能通过验收的概率;

(2) 检验 100 箱产品通过率不低于 90% 的概率.

解：(1) 设 "A" = 检验一箱产品通过验收

"B_i" 这箱中含次品的个数为 i　i=0,1,2.

由题意 $P(B_0) = \frac{1}{3}$ $\quad P(A|B_0) = 0.98$

$P(B_1) = \frac{1}{3}$ $\quad P(A|B_1) = \frac{1}{10} \times 0.1 + \frac{9}{10} \times 0.98 = 0.892$

$P(B_2) = \frac{1}{3}$ $\quad P(A|B_2) = \frac{2}{10} \times 0.1 + \frac{8}{10} \times 0.98 = 0.804$

$\therefore P(A) = P(B_0)P(A|B_0) + P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) = 0.892$

(2) X ~ 通过验收的箱数 $\quad X \sim B(100, 0.892)$

$EX = np = 89.2$ $\quad np(1-p) =$

则 $P\{X \ge 90\} = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \ge \frac{90-\mu}{\sigma}\right) = 1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{90-\mu}{\sigma}\right)$

"A" = 检验一箱产品通过检收 $\quad$ "A_i" 箱中含有次品的个数为 i　i=0,1,2

"B" = 检验时抽到的是正品

$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})$ $\quad P(A) = 0.892$

$= P(B)\, 0.98 + P(\bar{B})\, 0.10$

$P(B) = P(A_0)P(B|A_0) + P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)$

$= \frac{1}{3}(1 + 0.9 + 0.8) = 0.9$ $\quad P(\bar{B}) = 0.1$

数学四　临考演习（三）

考生注意：(1) 本试卷共 23 大题，满分 150 分.

(2) 根据国家标准，试卷中的正切函数，余切函数、反正切函数、反余切函数分别用 tanx、cotx、arctanx 和 arccotx 表示.

得分	评卷人

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 把答案填在题中横线上）

(1) 设 $f(x,y,z)=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}$，则 $df(x,y,z)\Big|_{(1,1,1)}=$ dx − dy.

(2) 曲线 $y=\int_0^x \sin(x-t)dt$ 在点 $x=\frac{\pi}{2}$ 处的切线方程为 $y=x+1-\frac{\pi}{2}=x+\frac{2-\pi}{2}$

(3) $\iint\limits_{\substack{0\le x\le\pi\\0\le y\le\pi}}|\cos(x+y)|dxdy=$ ______.

沿线裁下

(4) 设 **A**、**B** 为 n 阶方阵，其中 **A** 为可对角化矩阵且满足 $A^2+A=0, B^2+B=E$，$r(AB)=2$，则行列式 $|A+2E|=$ 2^{n-4}.　2^{n-2}

(5) 设 $\lambda=1$ 是矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&2&-1\\1&0&k\end{bmatrix}$ 的一个特征值，则 $k=$ 1.

(6) 设随机变量 X 和 Y 相互独立，X 在区间(0,2)上服从均匀分布，Y 服从参数为 1 的指数分布，则概率 $P\{\max(X,Y)>1\}=$ $\frac{1}{2}(1+\frac{1}{e})$.

得分	评卷人

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

(7) 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续，若 $f(x)=\begin{cases}\frac{g(x)}{\sin x}, & x\neq 0,\\ 2, & x=0,\end{cases}$ 则

(A) $\lim\limits_{x\to0}g(x)=0$ 且 $g'(0)$ 不存在.

(B) $\lim\limits_{x\to0}g(x)=0$ 且 $g'(0)=0$.

(C) $\lim\limits_{x\to0}g(x)=0$ 且 $g'(0)=1$.

(D) $\lim\limits_{x\to0}g(x)=0$ 且 $g'(0)=2$.　　【 A 】

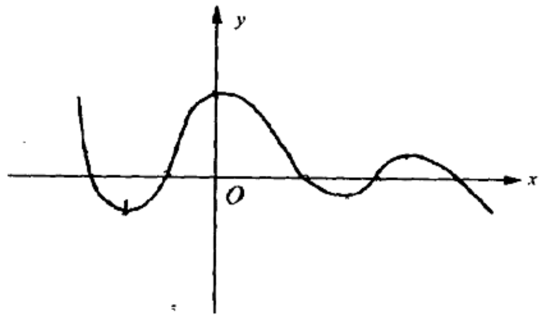
(8) 设 $f(x)=\frac{1}{2}(x+|x|)$，$g(x)=\begin{cases}x, & x<0\\ x^2, & x\geq0\end{cases}$ 则

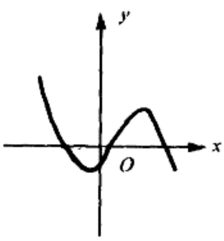
(A) $f[g(x)]=\begin{cases}x^2, & x<0\\ 0, & x\geq0,\end{cases}$　　(B) $g[f(x)]=\begin{cases}x^2, & x<0\\ 0, & x\geq0,\end{cases}$

(C) $f[g(x)]=\begin{cases}0, & x<0\\ x^2, & x\geqslant 0,\end{cases}$ (D) $g[f(x)]=\begin{cases}x, & x<0\\ x^2, & x\geqslant 0,\end{cases}$

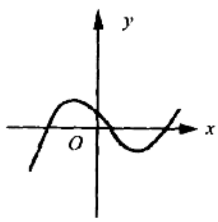
【 D 】

(9) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内二阶可导，$y=f(x)$ 的图形如图所示，则二阶导函数 $y=f''(x)$ 的图形为 【 A 】

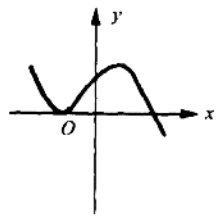




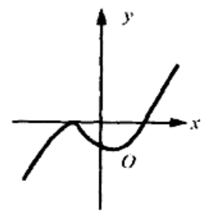
(A)



(B)



(C)



(D)

(10) 若 $f(-x)=f(x)$，在 $(0,+\infty)$ 内 $f'(x)>0, f''(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内

(A) $f'(x)<0, f''(x)<0$. (B) $f'(x)<0, f''(x)>0$.

(C) $f'(x)>0, f''(x)<0$. (D) $f'(x)>0, f''(x)>0$. 【 A 】

A (11) 设 $I_1=\iint\limits_D \ln(x+y)\,dxdy, I_2=\iint\limits_D \sin(x+y)\,dxdy$，其中 D 由 $x=0, y=0, x+y=1$，$x+y=a(0<a<1)$ 围成，则 I_1, I_2 之间的大小关系是

(A) $I_1<I_2$. (B) $I_1=I_2$.

(C) $I_1>I_2$. (D) 必须给出 a 的值才可比较 I_1, I_2 的大小. 【 C 】

C (12) 已知 $\mathbf{A}$ 为三阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}0\\t\\1\end{bmatrix}$ 为非齐次线性方程组 $\mathbf{A}x=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ 的三个解向量，则

(A) 当 $t=2$ 时，$\mathbf{A}$ 的秩必为1. (B) 当 $t=2$ 时，$\mathbf{A}$ 的秩必为2.

(C) 当 $t\neq 2$ 时，$\mathbf{A}$ 的秩必为1. (D) 当 $t\neq 2$ 时，$\mathbf{A}$ 的秩必为2. 【 A 】

D (13) 已知 A、B、C 为任意三个随机事件，则 $P[(A+B)(A-C)]$ 等于

(A) $P(A)-P(AC)+P(AB)-P(ABC)$.

(B) $P(A)+P(AC)-P(AB)-P(ABC)$.

(C) $P(A)-P(AC)+P(ABC)$.

沿线裁下