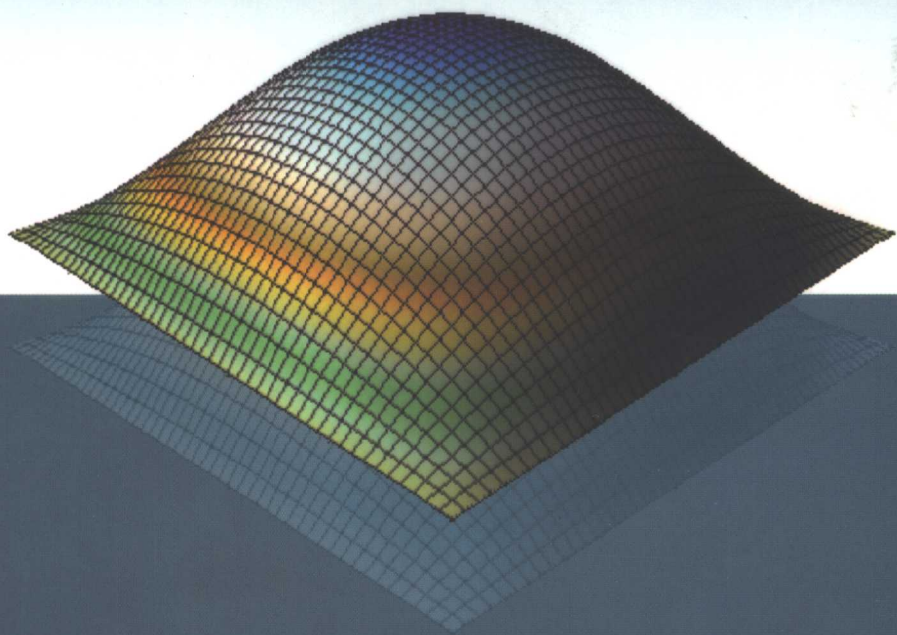


金属塑性加工过程 无网格数值模拟方法

李长生 熊尚武 J.Rodrigues P.Martins 著



NEUPRESS
东北大学出版社

金属塑性加工过程 无网格数值模拟方法

李长生 熊尚武 J.Rodrigues P.Martins 著

东北大学出版社

· 沈 阳 ·

© 李长生 等 2004

图书在版编目 (CIP) 数据

金属塑性加工过程无网格数值模拟方法 / 李长生等著. — 沈阳 : 东北大学出版社, 2004.8

ISBN 7-81102-067-X

I. 金… II. ①李… III. 数值模拟—应用—金属压力加工 IV. TG301

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 076181 号

出版者: 东北大学出版社

地址: 沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号

邮编: 110004

电话: 024—83687331 (市场部) 83680267 (社务室)

传真: 024—83680180 (市场部) 83680265 (社务室)

E-mail: neuph @ neupress.com

http: // www. neupress. com

印刷者: 沈阳市光华印刷厂

发行者: 东北大学出版社

幅面尺寸: 170mm × 228mm

印 张: 18.5

字 数: 352 千字

出版时间: 2004 年 8 月第 1 版

印刷时间: 2004 年 8 月第 1 次印刷

责任编辑: 王兆元

责任校对: 米 戎

封面设计: 唐敏智

责任出版: 秦 力

定 价: 25.00 元

序

近几十年来，有限元作为一种有效的数值解析方法得到了广泛应用，已经成为科研工作者进行工程分析的有力工具。虽然结构分析和部分大变形成形过程的有限元解析方法已日臻成熟，但是人们对有限元新理论、新方法的探索从来没有停止。金属塑性加工过程无网格数值方法就是正在进行研究的课题之一。

本书的两位作者李长生博士和熊尚武博士曾是东北大学轧制技术及连轧自动化国家重点实验室的博士研究生，在攻读博士学位期间就开始从事塑性加工有限元方面的研究工作，曾在有限元理论、方法和应用研究方面取得过令人欣喜的成果。由于科研合作关系，两人先后到葡萄牙里斯本工业大学，在 Paulo Martins 教授领导下从事无网格方法方面的研究工作，我们高兴地看到两人作为主笔在短短的访问研究期间完成了专著《金属塑性加工过程无网格数值模拟方法》一书，对他们取得的成果和进步表示衷心祝贺！

作者在介绍无网格理论和方法的同时，讨论和分析了 EFG 方法、RKPM 方法、SPH 方法以及 CSPH 方法的特性，将重点放在无网格方法求解塑性加工过程的数值模拟方面。例如采用 RKPM 方法和 EFG 方法求解稳定轧制过程、采用 RKPM 方法和 CSPH 方法求解方棒和圆棒压缩过程、RKPM 方法求解反向挤压过程、CSPH 方法求解板材冲压、圆柱体压缩以及圆环压缩等金属塑性加工过程。这些研究工作不仅加深了对上述各类成形过程深层规律的认识，也有助于读者进一步掌握无网格法理论、使用无网格法求解各类塑性加工问题，为大变形过程的数值解析提供了一个有力的工具。

希望该书的出版对我国塑性加工理论和技术的发展起到积极的促进作用，为准备用无网格法对塑性加工过程进行模拟研究的

各位同行提供参考。我们在把本书推荐给各位读者的同时，希望各位同行能够提出自己的学术思想和观点，以期推进塑性加工理论与技术的进一步发展。

东北大学 王国栋 刘相华

2004年8月

前 言

金属塑性加工过程分析技术,从20世纪50年代就已经开始采用初等分析法、滑移线场理论和上限分析法等理论分析方法以及各种物理模拟方法。鉴于金属塑性加工过程变形的复杂性和材料的非线性,这些方法不能精确处理速度场、温度场、应力场和应变场的定量计算,因此这些方法都显示出了局限性。

有限元方法在金属塑性加工过程的应用在20世纪70年代取得了突破性进展,很多塑性加工过程中的难题都迎刃而解,世界上很多的研究小组投入研究力量分别针对各种塑性加工问题开发了有限元分析软件。与此同时,很多商用大型有限元分析软件,例如ANSYS, MARC, ABQUES等得到了开发和应用。

有限元方法在处理大变形时,由于严重的网格畸变以及变形工件与工具之间的接触问题而使程序设计变得较为复杂。虽然自动划分网格以及自适应网格重划技术已经出现,但计算精度的降低及计算时间的增加等,使该方法受到一定的限制。

金属塑性加工过程的无网格数值模拟方法有力地克服了有限元方法的上述弊端。无网格方法是根据任意节点位置而不是使用明显的网格而使被研究工件离散化的。此外,网格重划和自适应方法是在大变形或变形畸变处采用简单地增加节点方法来实现的。

本书是在作者博士后研究工作以及近年来无网格数值模拟方法在金属塑性加工过程中应用研究工作的基础上,参考国内外100多篇文献写成的。书中阐述了无网格数值模拟方法的基本理论,通过大量的计算实例分析了无网格方法的特性。为了便于理解和应用,书后附有各计算实例的源程序代码。

参加本书编写工作的有东北大学李长生博士、美国西北大学熊尚武博士、里斯本工业大学 Jorge Rodrigues 教授和

Paulo Martins教授。其中，第1章至第3章由 Paulo Martins 和 Jorge Rodrigues 撰写，第4章由熊尚武撰写，第5章至第9章由李长生撰写。全书由李长生统稿。作者在从事无网格数值模拟方法研究中，得到了里斯本工业大学 Paulo Martins 教授的资助和热情支持，在金属塑性加工理论和应用研究中始终得到导师刘相华教授的精心指导，东北大学王国栋教授审阅了全书，在此一并表示衷心地感谢。

本书编著的时间比较仓促，书中难免有不妥之处，请广大读者批评指正。

李长生

2004年3月20日
于里斯本工业大学

PREFACE

Graduate and post-graduate courses in the numerical modelling of metal forming processes are generally limited to the presentation of the finite element method. However, this is a one-sided view-point of numerical modelling taking into account the research efforts that are presently being placed in the development, application and assessment of meshless methods in metal forming.

The need for introducing a series of lectures on meshless methods applied to metal forming in the context of graduate and post-graduate courses was the driving force for writing this book. In fact, the book was primarily written to meet the needs of graduate and post graduate students of mechanical engineering who are interested in learning the fundamentals of meshless methods and its application in the numerical modelling of bulk metal forming processes. However, it should also be useful to students with other backgrounds as well as to researchers and practicing engineers.

The book is structured in 9 chapters, The first two chapters cover fundamental concepts of meshless methods and briefly review basic principles for weak forms. The element free Galerkin method, the reproducing kernel particle method and the smoothed particle hydrodynamics method are comprehensively discussed in chapters 3 to 6. These chapters also provide the readers with several examples that illustrate the features

and characteristics, the computer implementations, and the ability of each of these methods in reproducing various algebraic functions. Chapters 7 and 8 describe the application of meshless methods in solving Poisson type differential equations and provide the necessary background for the more complex applications of meshless methods in the field of bulk metal forming that are thoroughly discussed in the last chapter of the book. The last chapter treats many aspects related to the theoretical development and computer implementation of meshless methods in metal forming and its presentation is enriched with research work out coming from the authors.

The book is the result of the ongoing collaboration between the authors and their research units, and has been partially financed by Fundacao para a Ciencia e a Tecnologia of Portugal. Authors hope that the Chinese version of the book published by the North-Eastern University of China will help Chinese students and researchers to become more acquainted with meshless methods and its applications to the numerical modelling of metal forming. Comments and suggestions for further improvements in the text will be greatly appreciated.

Li Chang Sheng, North-Eastern University of China
Shangwu Xiong, North-Western University of USA
Jorge Rodrigues, Technical University of Lisbon, Portugal
Paulo Martins, Technical University of Lisbon, Portugal

August, 2004

目 录

| | |
|------------------------------------|----|
| 第 1 章 绪 论 | 1 |
| 第 2 章 无网格方法的基本理论 | 6 |
| 2.1 固体力学平衡方程 | 6 |
| 2.2 固体力学方程的强形式与弱形式 | 8 |
| 2.2.1 Hamilton 原理 | 10 |
| 2.2.2 约束 Hamilton 原理 | 10 |
| 2.2.3 Galerkin 弱形式 | 11 |
| 2.2.4 约束 Galerkin 弱形式 | 13 |
| 2.2.5 最小总势能原理..... | 14 |
| 2.2.6 加权余量法..... | 14 |
| 2.2.7 约束加权余量法..... | 15 |
| 2.3 无网格方法的基本原理..... | 15 |
| 2.3.1 最小二乘插值方法..... | 15 |
| 2.3.2 再生核函数方法..... | 18 |
| 2.3.3 不连续性的处理..... | 19 |
| 第 3 章 无网格 GALERKIN 方法 | 23 |
| 3.1 移动最小二乘方法..... | 23 |
| 3.2 权函数描述..... | 27 |
| 3.3 EFG 方法举例 | 30 |
| 第 4 章 再生核质点方法 | 38 |
| 4.1 再生核函数方法..... | 38 |
| 4.2 RKPM 方法举例 | 40 |
| 第 5 章 光滑粒子力学方法 | 48 |
| 5.1 光滑粒子力学方法..... | 48 |
| 5.2 再生核函数近似..... | 50 |

| | |
|------------------------------------|-----------|
| 5.2.1 定 义 | 50 |
| 5.2.2 一致性和精度 | 51 |
| 5.2.3 核函数 | 51 |
| 5.3 SPH 离散化方法 | 52 |
| 5.4 SPH 方法举例 | 53 |
| 第 6 章 修正的光滑粒子力学方法 | 61 |
| 6.1 核函数修正方法 | 61 |
| 6.2 CSPH 方法举例 | 62 |
| 6.3 核函数偏微分近似 | 69 |
| 第 7 章 POISSON 方程的 CSPH 方法求解 | 71 |
| 7.1 Poisson 方程问题 | 71 |
| 7.2 积分方程离散化 | 72 |
| 7.3 基本边界条件 | 74 |
| 7.4 CSPH 求解 Poisson 方程举例 | 75 |
| 第 8 章 积分修正和稳定化 CSPH 方法 | 80 |
| 8.1 积分修正方法 | 80 |
| 8.2 稳定化方法 | 82 |
| 8.3 Laplace 估算 | 84 |
| 8.4 积分修正和稳定化 CSPH 方法举例 | 85 |
| 第 9 章 无网格方法在金属塑性加工中的应用 | 90 |
| 9.1 流动法则 | 90 |
| 9.1.1 黏塑性 | 91 |
| 9.1.2 极值原理 | 92 |
| 9.1.3 基本方程 | 92 |
| 9.2 CSPH 无网格方法的数值离散化 | 94 |
| 9.2.1 总能耗的最小化 | 94 |
| 9.2.2 再生核函数近似方法 | 95 |
| 9.2.3 速度刚度矩阵公式 | 96 |
| 9.2.4 速度差刚度矩阵公式 | 97 |
| 9.2.5 基本边界条件的施加 | 100 |
| 9.2.6 积分修正和稳定化 | 100 |
| 9.2.7 求解过程分析 | 102 |
| 9.3 RKPM 无网格方法的数值离散化 | 103 |

| | |
|--|------------|
| 9.3.1 变分原理 | 103 |
| 9.3.2 RKPM 形函数及数值离散化 | 103 |
| 9.3.3 RKPM 方法求解程序 | 104 |
| 9.4 EFG 无网格方法的数值离散化 | 108 |
| 9.4.1 变分原理 | 108 |
| 9.4.2 EFG 方法形函数及数值离散化 | 108 |
| 9.4.3 EFG 方法求解程序 | 109 |
| 9.5 无网格方法在塑性加工中应用举例 | 111 |
| 9.5.1 采用 CSPH 和 RKPM 对方棒平面压缩模拟分析 | 111 |
| 9.5.2 采用 CSPH 和 RKPM 方法对圆棒平面压缩模拟分析 | 117 |
| 9.5.3 采用 RKPM 方法对平面轧制过程模拟分析 | 120 |
| 9.5.4 采用 EFG 方法对平面轧制过程模拟分析 | 126 |
| 9.5.5 采用 RKPM 方法对反向平面挤压模拟分析 | 128 |
| 9.5.6 采用 CSPH 方法对板材平面冲压模拟分析 | 131 |
| 9.5.7 采用 CSPH 方法对圆柱体压缩模拟分析 | 134 |
| 9.5.8 采用 RKPM 方法对圆柱体顶锻模拟分析 | 137 |
| 9.5.9 采用 CSPH 方法对圆环压缩模拟分析 | 141 |
| 9.6 无网格方法和 FEM 方法求解问题收敛性比较 | 144 |
| 附 录 无网格方法计算源程序代码 | 146 |
| 1. EFG 方法计算程序代码 | 146 |
| 2. RKPM 方法计算程序代码 | 152 |
| 3. SPH 方法计算程序代码 | 158 |
| 4. CSPH 方法计算程序代码 | 163 |
| 5. 常数修正 CSPH 方法求解 POISSON 方程程序代码 | 169 |
| 6. 积分修正和稳定化 CSPH 方法求解 POISSON 方程程序代码 | 182 |
| 7. 平面应变圆棒压缩过程 RKPM 方法源程序代码 | 204 |
| 参考文献 | 275 |

第 1 章 绪 论

有限元方法(Finite Element Method, 以下简称 FEM)已经作为主要的数值模拟工具,用于分析和优化研究金属塑性加工过程领域的金属流动特性。FEM 方法能够利用计算机程序求解复杂边界条件下的系统方程,从而分析和研究金属材料的变形和力学特性。然而,在处理金属非稳态大变形时,由于变形过程严重的网格畸变以及工件与变形工具之间的接触而使得 FEM 方法在求解问题时受到一定的限制。

图 1.1 所示为反向挤压过程中金属产生塑性变形的有限元模拟结果。可以看出,在上部模具的角部附近,网格单元的变形较大,而随着变形的继续加大,此处的网格已经产生了畸变。在继续挤压过程时,该处单元将产生负的 Jacobian 矩阵而使得 FEM 无法求解。

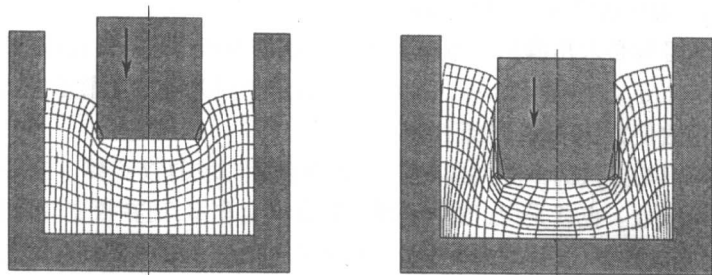


图 1.1 金属反向挤压过程 FEM 网格变形示意图

为了解决金属在较大变形过程中的畸变单元无法求解问题,在 FEM 方法应用中开发了自动网格划分以及自适应网格重划技术^[1~16]。虽然这些技术在处理大变形和保持移动边界时是十分有效的,但是重划网格技术在处理复杂三维塑性变形过程时程序设计比较复杂,而且通常会以牺牲和降低计算精度及增加计算时间为代价,所以该技术的应用也会受到一定的限制。

从 20 世纪 70 年代开始,无网格方法(Meshless Method, 或者 Mesh Free Method)就已经出现,当时各学者命名方式不同,有的以近似函数的名称命名,有的以离散化的方法命名。1996 年开始,T. Belytschko 等^[17]首次提出将不用

单元和网格的数值方法命名为无网格方法。

与有限差分方法(Finite Difference Method,以下简称 FDM)以及 FEM 方法一样,无网格方法也是一种求解微分方程有效的数值计算方法。但是,FDM 只能求解具有规则几何形状而且网格划分也比较规则的研究对象。采用无网格方法则能够解决 FDM 方法以及 FEM 方法遇到的这些问题^[17~37]。实际上,无网格数值模拟方法是根据任意节点位置而不是使用明显的单元网格,而使被研究工件离散化的。FEM 方法要以单元为单位进行微分方程的积分计算,当被研究对象产生较大的变形时,由于节点位置的变化导致的单元畸变而无法实现积分计算,因而要考虑网格重划和自适应方法等。无网格方法是对节点或者背景单元进行积分计算的,在大变形或变形畸变处简单地增加节点而不需要重划网格。

为了简单理解无网格方法的基本概念,这里设待解问题的基本方程和边界条件为:

$$\begin{cases} \nabla^2 u + f = 0, & \text{在域 } V \text{ 内} \\ u = \bar{u}, & \text{在边界 } S_u \text{ 上} \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{t}, & \text{在边界 } S_t \text{ 上} \end{cases} \quad (1.1)$$

式中, u 为待求的场函数; f 为不含 u 的已知项; \bar{u} 为在边界 S_u 上的已知 u 值; n 为外法线; \bar{t} 为在边界 S_t 上的已知 t 值。

我们的目标是求出满足基本方程和边界条件的解 $u(x)$ 。在域 V 内,取一组离散的节点 x_I , ($I=1, 2, \dots, n_N$), 将与节点 I 相关联的变量记为 u_I , 无网格方法就是用数值方法求 u_I 的近似解。

所有无网格方法的一个共同特点是使用有紧支域的权函数,在小波理论中亦称为窗口函数。也就是说,这个函数在紧支域上非零,而在紧支域外的剩余域为零,而且紧支域要比剩余域小得多。与节点 I 相关联的紧支域标记为 V_I , 紧支域也称为节点 I 的影响域。在二维情况下,常用的紧支域为圆和矩形,如图 1.2 所示^[17]。图 1.2 中的虚线是全域的边界线,实线为某个节点对应函数的紧支域,可以看到,紧支域之间相互有重叠部分。

函数 $u(x)$ 的近似值 $u^h(x)$ 可以用 n 个离散节点的形函数表达为

$$u^h(x) = \sum_{I=1}^n \varphi_I(x) u_I \quad (1.2)$$

$\varphi_I(x)$ 称为无网格方法的形函数,其性质不同于 FEM 中的形函数,不同的无网格方法形函数可以采用不同的方法来表达。

在过去的 20 年中,无网格数值模拟方法有了很快的发展,而且研究领域不断拓宽。在许多工程领域里,目前大量的无网格方法研究还只是停留在估价无

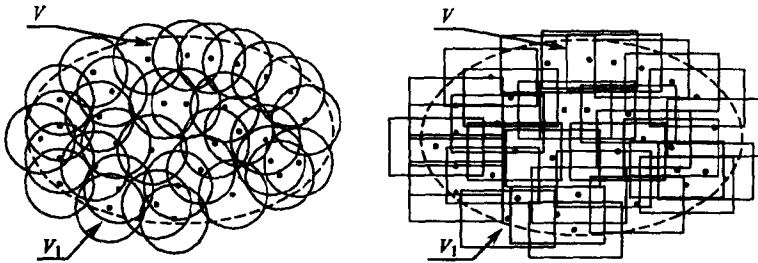


图 1.2 无网格方法中二维问题使用的紧支域

网格数值模拟方法在解决工程问题的应用能力上。无网格方法现在已经应用于结构力学^[17, 29, 35, 38~40]、断裂力学^[17, 23, 25, 26, 32, 41, 42]、可压缩流体^[43]、不可压缩流体^[44~46]、多相流体和表面张力^[47~53]等流体力学^[27, 33, 36, 37]、热传导问题^[54, 55]、电磁学^[56~59]、岩石力学^[60~62]和非线性动力学问题^[63]等研究领域,同时还可以解决振动^[64]以及接触^[34, 65~67]等复杂问题。

为了简明起见,表 1.1 列出了现阶段无网格方法的研究者以及使用方法和公式以及近似方法等在计算力学中的应用情况。

表 1.1 无网格方法应用情况

| 作者 | 无网格方法 | 公式的形式 | 近似方法 |
|---|---------------------------|---------|-------------------|
| Gingold, Lucy 和 Monaghan (1970~1980) | 光滑粒子力学(SPH) | 强形式 | 积分近似 |
| Nayroles 等(1992) | 散射单元(DEM) | 弱形式 | MLS 近似 |
| Belytschko 等(1994) | 无网格 Galerkin (EFG) | 弱形式 | MLS 近似 |
| W. K. Liu 等(1993) | 再生核质点(RKPM) | 强形式或弱形式 | 积分近似 |
| Laguna(1995) | 光滑粒子插值(SPI) | | |
| Babuska 和 Melenk (1995) | 单位分解法(PUM) | 弱形式 | 单位分解, MLS 近似 |
| W. K. Liu 等(1996) | 移动最小二乘再生核 (MLSRK) | | |
| Sulsky (1996) | 背景单元与质点(PIC) | 强形式或弱形式 | |
| Onate 等(1996) | 有限元(FP) | 强形式 | Taylor 级数和 MLS 近似 |
| Oden 和 Duarte (1996) | H-P 云团 | 弱形式 | 单位分解, MLS 近似 |
| S. N. Atluri 等 (1999) | 局部 Prtrov-Galerkin (MLPG) | 弱形式 | MLS 近似 |

据作者所知,光滑粒子力学方法(Smoothed Particle Hydrodynamics, 以下简称 SPH,)是首先使用的无网格方法。SPH 方法在有的文献中称为光滑粒子流

体动力学法^[68],也有文献称为光滑粒子法^[38]。由于 SPH 方法可以应用于包括流体动力学在内的力学领域,因此通常应将 SPH 方法理解成光滑粒子力学方法^[34]。SPH 方法是由 Lucy^[28], Gingold 以及 Monaghan^[18]大约 20 年以前开发和使用的,当时用来模拟天体物理现象,例如恒星碰撞、星系形成、气体的扩散和宇宙中的黑洞现象等。

光滑粒子力学方法的数学模型与气体动力学相似,随后在 Lagrange 研究方法中使用了再生核函数光滑流体动力质点,例如采用离散的质点质量动量和能量模拟流体流动。后来,SPH 方法被用于能够计算应力和应变张量的固体力学中^[69]。而且 Laguna^[70]也使用 SPH 方法求解了非流体动力学问题,并命名为 SPI 技术(Smoothed Particle Interpolation)。

散射单元方法(Diffuse Element Method,以下简称 DEM)是由 Nayroles 等^[19~22]提出的另外一种无网格方法,它只用分配节点和定义边界来构造 Galerkin 方程。这一方法使用加权最小二乘插值来拟合节点值的多项式近似函数。这里的插值与移动最小二乘(Moving Least Square,以下简称 MLS)方法中的表面节点拟合方法是一样的^[71]。后来 Belytschko 等^[23]采用增加偏微分方程,并通过 Lagrange 乘子施加基本边界条件和修正变分原理等提高了 DEM 方法的计算精度。这一研究方法被称为无网格 Galerkin 方法(Element Free Galerkin,以下简称 EFG)。虽然在 DEM 和 EFG 方法中不存在网格,但仍需使用一些辅助的背景网格(通常指胞元,Cell),借助背景网格或胞元进行 Galerkin 积分表达式的数值计算。而背景网格或胞元的使用,削弱了无网格方法的许多优点^[72]。

W. K. Liu^[24, 29]等在再生核函数和小波理论上开发了不同类型的无网格方法。这一技术被称为再生核质点方法(Reproducing Kernel Particle Method,以下简称 RKPM),该方法允许使用形函数通过核函数变换方法从而达到积分的目的。在研究问题域内利用尺寸因子可以改变核函数的大小,因此它可以满足类似有限元方法中的确定单元和单元重划的需要^[29]。RKPM 方法后来已经被 W. K. Liu^[73, 74]和他的研究者们发展为移动最小二乘再生核函数方法(Moving Least Square Reproducing Kernel,以下简称 MLSRK)。在这一方法中,形函数是通过移动最小二乘方法产生的,近似计算则包含再生核函数。该方法能够准确和容易地生成任何 m 阶多项式,也可建立起单位分解方法^[26](Partition of Unity Method)需要的连续的基函数。

背景单元质点(Particle-in-Cell)方法是另外一种由 Sulsky 等^[75]开发的无网格方法。该方法使用 MLS 插值来传递移动节点到辅助背景单元之间的信息,在辅助背景单元处求解方程。这种方法已经采用 Lagrange 描述而应用于求解

固体力学问题,它可以被看成是EFG方法的广义和延伸方法^[69]。

Onate等^[37,72]基于移动加权最小二乘(Moving Weighted Least Square,以下简称MWLS)插值方法提出了有限点(Finite Point,以下简称FP)方法。该方法已经被成功地用来分析流体问题。在其他无网格方法研究文献中还有Duarte和Oden^[25]提出的HP云团方法,Babuska^[26]等提出的背景单元单位分解方法(Partition of Unity Method)以及S. N. Atluri^[76-80]等提出的局部Prtrov-Galerkin(MLPG)等方法。

从目前来看,无网格数值模拟方法在力学领域里已经有了很大的发展。将无网格数值模拟方法应用于金属塑性加工过程的研究还很少,因此加强这一方法在金属塑性加工领域中的研究显得迫在眉睫和尤为必要。就作者所知,首次使用无网格方法进行金属变形过程研究的是J. S. Chen等^[81-83]。他们使用的是由W. K. Liu^[24,29]提出的RKPM方法,用来模拟金属环件压缩,冷镦粗和毛坯延伸过程。该方法中使用了弹塑性模型,而且理论计算结果和实验数据符合良好。

Bonet和Kulasegaram^[84,85]使用修正光滑粒子力学(Corrected Smooth Particle Hydrodynamics,以下简称CSPH)方法完成了几例基本塑性加工过程的二维计算和模拟,包括挤压、轧制、镦粗以及锻压等过程。但处理的问题比较简单,只考虑的是没有应变硬化影响的刚(完全)塑性材料,而且计算结果中只讨论了变形形状问题,应变速率场和应力场的结果未见列出。

D. Qian等^[86,87]采用动态松弛RKPM分析了三维板成形过程,计算结果和试验结果符合良好。

S. W. Xiong等^[88-92]使用EFG以及RKPM无网格方法模拟求解了稳态轧制及一些简单的二维镦粗和挤压过程等。另外,娄路亮等^[40],G. Y. Li等^[93],Y. M. Guo等^[94]以及J. Yvonnet等^[95]也利用无网格方法对一些简单的成形过程进行了有价值的探讨。最近,C. S. Li^[96,97]等利用CSPH以及RKPM无网格方法解析了平面应变情况下可压缩材料的金属塑性变形问题,利用不同的研究域的附加节点方法成功得到了应变速率和应力场分布。可以看出,EFG方法、RKPM方法和CSPH无网格方法都能得到良好的模拟预测结果。

综上所述,无网格方法在实际工程应用中得到了研究,取得了一定的进展,在金属塑性加工领域的研究还处于起步阶段。同时还可以看出,不同研究者使用的无网格方法是不尽相同的,这是由于无网格方法求解的微分方程的弱形式产生方式是不同的。然而,如果使用近似方法按照有限数量的节点构造插值计算进行分类,则上述无网格数值方法主要可以分为两类:最小二乘方法和再生核函数方法。关于这些基本理论的特性将在下一章里进一步讨论。