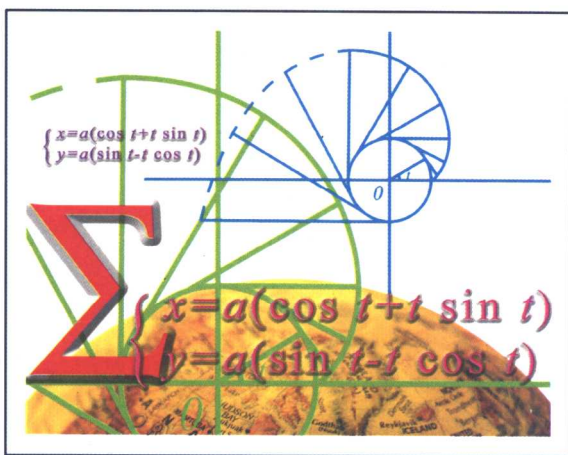


|| 高等学校数学教材系列丛书 ||

新编高等数学 学习辅导

——配合同济高等数学（四版·上册）（第二版）



王金金 李广民 于 力 编

新编高等数学学习辅导

——配合同济高等数学(四版·上册)

(第二版)

王金金 李广民 于 力 编

西安电子科技大学出版社

新编高等数学学习辅导
——**配合同济高等数学(四版·上册)**
(第二版)
王金全 李广民 于 力 编

责任编辑 杨宗周

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电 话 (029)88227828 邮 编 710071

<http://www.xduph.com> E-mail: xdupfxb@pub.xaonline.com

经 销 新华书店

印 刷 西安兰翔印刷厂

版 次 1999年2月第1版 2002年7月第2版

2004年7月第9次印刷

开 本 850毫米×1168毫米 1/32 印张 12.3125

字 数 300千字

印 数 42 001~48 000册

定 价 14.00元

ISBN 7-5606-0693-8/O·0036

XDUP 0963012-8

* * * 如有印装问题可调换 * * *

本社图书封面为激光防伪覆膜,谨防盗版。

内 容 简 介

本书第一版问世以来,深受广大读者厚爱,这次修订新增了“考研题选”部分,并调整了部分内容以及对差错进行了更正。本书是深入学习工科“高等数学”的辅导书。每章内容包括解惑答疑、典型例题、习题选解、自测练习、考研题选。其目的是针对学生在学习过程中产生的疑难问题,采用问答形式予以解答;通过典型例题的分析求解,引导学生产生联想,从中领悟预示的途径,提高学生解题的能力;对教材中有代表性的习题进行解答,供学生在学习过程中参考;自测练习则是为学生自我测试提供的;“考研题选”则是选取有代表性的试题并给出解答,旨在让读者在大学本科学习中,首先了解考研要求,提前进入角色,提高学习兴趣,打好数学基础。

本书分上、下两册出版,内容与同济大学数学教研室编写的《高等数学(第四版)》教材上、下册(高等教育出版社出版)配套。

本书对学习工科“高等数学”的同学是一本很好的辅导教材,同时也可作为报考研究生的理想复习资料及“高等数学”任课教师的教学参考书。

第一版前言

在科学技术飞速发展的当今社会，高等数学作为工科专业的一门重要的基础课，对于学生专业课的学习，乃至今后更进一步的拓宽专业知识面、调整自身的知识结构尤为重要。为配合教学改革，减少授课学时，增加课堂信息量，培养学生的自学能力，提高学生素质，1995年我们配合本校使用的教材，编写了《高等数学辅导》一书。该书旨在帮助学生加深对高等数学中基本概念的理解，引导学生掌握高等数学的解题方法和技巧，启发、培养学生的兴趣。此书受到了广大师生的普遍欢迎，对提高教学质量起到了十分重要的作用。

为了更进一步适应教学的需要，我们广泛听取了使用这一辅导教材的师生的意见修编了原书。考虑到本书的双重作用，即既可作为学习工科高等数学的辅导教材，同时还能作为报考研究生的复习资料，故这次修编在内容安排上，做了较大的变动，使之与高等数学(同济四版)教材结合更加紧密。通过大量的解惑答疑和典型例题的剖析，使读者在理解基本概念、熟练掌握解题方法和技巧方面达到事半功倍的效果。

本书每章均由四部分组成。第一部分是“解惑答疑”。这部分收集了编者多年来在与学生接触中发现的典型疑难问题，内容及方法涉及基本概念、基本理论的深入理解，解题思路的启发诱导，解题方法中常见错误剖析等。第二部分是“典型例题”。在这部分中，选择了有代表性的例题，对解题思路、解题方法进行仔细分析，启发诱导学生产生联想，提高他们的解题能力。第三部分是“习题选解”。在这一部分中，对同济大学主编的高等数学第四版中的习题，选取其中有代表性的进行解答，供学生在解题时参考。希望通过这些题解的启发，让学生独立完成剩余部分习

题，提高学生的解题能力。第四部分是“自测练习”，这部分是为学生自我测试提供的练习题，学生可通过自测练习检查自己对本章内容掌握的程度。

我们采用同济大学主编的高等数学第四版的习题，是因为这本教材是我国高等学校中普遍使用的国家级优秀教材。这本教材习题安排合理，难易适度，反映了学习高等数学应达到的要求。选用该书习题，则能更好地使所编辅导教材与学生使用教材紧密配合。

本书分上、下两册出版，上册内容包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、空间解析几何与向量代数，与教材上册配套；下册内容包括多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数和微分方程，与教材下册配套。本书由三位编者分工编写，其中第一、四、九章由于力执笔，第二、三、八、十章由王金金执笔，第五、六、七、十一、十二章由李广民执笔，各章都经过反复讨论、修改后定稿。

本书在编写过程中得到了西安电子科技大学应用数学系领导及从事高等数学教学的广大教师的热情支持，特别是刘三阳教授、王世儒教授、刘玉濮副教授以及青年教师马华、任春丽、高淑萍、刘红卫、冯晓慧等同志，对本书的初稿提出了许多宝贵的修改意见，编者在此致以深深的谢意。本书的出版得到西安电子科技大学出版社领导及编辑部的大力支持，他们为此付出的辛勤劳动，编者在此一并表示致谢。

编者虽然对本书的编写做出了最大努力，但由于水平与经验有限，加之时间仓促，错误与不妥之处一定难免，敬请广大读者指正。

编 者

1999年2月

第二版前言

本书第一版受到广大读者的肯定和欢迎,我们表示衷心的感谢。应广大读者要求,我们在第一版的基础上,对解惑答疑、典型例题、习题选解、自测练习的内容进行了修订,删去或更换了个别的例题和习题,使各部分内容更加具有贴近教材、覆盖面广、信息量大、综合性强、重点突出的特点。

近年来,随着我国科学技术的不断进步,高层次科学技术人才的需求量越来越大,研究生招生规模不断扩大,报考研究生的人数逐年增加,也促使本科教育必须适应这一形势发展的需要。为此,根据广大读者要求,我们在第二版中增加了“考研题选”的内容,在近几年全国硕士研究生考试试题中,选取有代表性的试题放在相应章节,并给出解答,旨在让读者在大学本科学习中,首先了解考研要求,提前进入角色,提高学习兴趣,打好数学基础。另外,考研题题型新颖,综合性强,对提高学生的能力和适应考研要求大有好处。我们希望本书的这一尝试,能受到广大读者和有志于报考研究生的广大同学的欢迎。

本书的修订工作由第一版编者承担。其中第一、四、九章由于力执笔;第二、三、八、十章由王金金执笔;第五、六、七、十一、十二章由李广民执笔。

希望这套书能给众多大学生和考研者以切实的帮助。由于我们水平有限,其中必有不足之处,殷切盼望读者提出宝贵意见。

编 者

2002 年 4 月

目 录

第一章 函数与极限	1
一、解惑答疑	1
二、典型例题	8
三、习题选解	23
习题 1—1(23) 习题 1—2(27) 习题 1—3(30)	
习题 1—4(31) 习题 1—5(33) 习题 1—6(35)	
习题 1—7(36) 习题 1—8(37) 习题 1—9(38)	
习题 1—10(39) 习题 1—11(41) 总习题一(42)	
四、自测练习	43
五、考研题选	47
第二章 导数与微分	52
一、解惑答疑	52
二、典型例题	57
三、习题选解	68
习题 2—1(68) 习题 2—2(73) 习题 2—3(75)	
习题 2—4(78) 习题 2—5(80) 习题 2—6(83)	
习题 2—7(88) 习题 2—8(89) 总习题二(93)	
四、自测练习	99
五、考研题选	102
第三章 中值定理与导数的应用	107
一、解惑答疑	107
二、典型例题	115
三、习题选解	126

习题 3—1(126)	习题 3—2(131)	习题 3—3(134)	
习题 3—4(137)	习题 3—5(143)	习题 3—6(145)	
习题 3—7(148)	习题 3—8(155)	习题 3—9(162)	
总习题三(164)			
四、自测练习			173
五、考研题选			176
第四章 不定积分			182
一、解惑答疑			182
二、典型例题			185
三、习题选解			196
习题 4—1(196)	习题 4—2(198)	习题 4—3(202)	
习题 4—4(204)	总习题四(208)		
四、自测练习			214
五、考研题选			217
第五章 定积分			220
一、解惑答疑			220
二、典型例题			231
三、习题选解			256
习题 5—1(256)	习题 5—2(258)	习题 5—3(260)	
习题 5—4(263)	习题 5—5(266)	习题 5—6(268)	
习题 5—7(269)	习题 5—8(273)	总习题五(275)	
四、自测练习			279
五、考研题选			282
第六章 定积分的应用			289
一、解惑答疑			289
二、典型例题			294
三、习题选解			310

习题 6—2(310)	习题 6—3(314)	习题 6—4(317)	
习题 6—5(318)	习题 6—6(322)	总习题六(322)	
四、自测练习			325
五、考研题选			327
第七章 空间解析几何与向量代数			333
一、解惑答疑			333
二、典型例题			340
三、习题选解			353
习题 7—1(353)	习题 7—2(354)	习题 7—3(355)	
习题 7—4(356)	习题 7—5(358)	习题 7—6(360)	
习题 7—7(364)	习题 7—8(365)	习题 7—9(369)	
总习题七(370)			
四、自测练习			375
五、考研题选			377
主要参考书目			383

第一章



函数与极限

一、解惑答疑

问题 1 初等函数与非初等函数有什么区别？

答 初等函数是由常数和基本初等函数(幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数)经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成的,并且可以用一个式子表示,否则就是非初等函数,例如

$$y = \sqrt{x^2 - 4}, y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ 及 } y = \ln x + \frac{e^{\sin \sqrt{x}} - 1}{x^2}$$

等都是初等函数. $y = x^x$ 也是初等函数,因为它是由 $y = e^u$ 与 $u = x \ln x$ 复合而成的. $y = |x| (= \sqrt{x^2})$ 同样是初等函数,因为它是由 $y = \sqrt{u}$ 与 $u = x^2$ 复合而成的. 而狄利克莱函数

$$y = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

是非初等函数. 贝塞尔函数

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots$$

及椭圆函数

$$F(x, \epsilon) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 t}}, \quad 0 < \epsilon < 1$$

也都是非初等函数. 因为它们不可能由基本初等函数经过有限次的四则运算和复合步骤构成. 微积分中所讨论的函数绝大多数都是初等函数, 有时也讨论某些有用的非初等函数.

问题 2 下面关于数列极限的论述是否正确?

(1) 当 n 充分大以后, 数列 $\{x_n\}$ 越来越接近于 a , 则 $n \rightarrow \infty$ 时, 数列 $\{x_n\}$ 以 a 为极限.

(2) 如果 $\forall \epsilon > 0$, 存在自然数 N , 当 $n > N$ 时, 总有无穷多个 x_n 满足 $|x_n - a| < \epsilon$, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

(3) 若对于任意给定的正整数 k , 总存在正数 N , 当 $n > N$ 时, 所有的 x_n 均满足 $|x_n - a| < 10^{-k}$, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

答 (1) 不正确. 因为 $\{x_n\}$ 以 a 为极限是指当 n 充分大以后, x_n 与 a 的差的绝对值小于预先给定的任意小的正数 ϵ , 即 $|x_n - a|$ 随着 n 的增大而趋于 0; 而 x_n 越来越接近于 a , 只能表明 $|x_n - a|$ 越来越小, 并不能保证 $|x_n - a|$ 趋于 0. 例如, $x_n = 1 + \frac{1}{n}$, 随着 n 的增大, x_n 越来越接近于 0, 但 $x_n \not\rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$. 正确的说法应是, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, x_n 与 a 无限地接近, 要多么接近就有多么接近, 则 $\{x_n\}$ 以 a 为极限.

(2) 不正确. 由数列极限的几何解释知, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 在几何上表示两点: ① 在点 a 的任何 ϵ 邻域 $U(a, \epsilon)$ 中都包含了数列 $\{x_n\}$ 的无限多个点; ② 在 $U(a, \epsilon)$ 以外, 最多只有 $\{x_n\}$ 的有限多个点. 而题设之条件仅满足①而不满足②, 故不能说 $\{x_n\}$ 以 a 为极限.

例如, 取

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & n \text{ 为奇数} \\ 1, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

在 $U(0, \epsilon)$ 中包含了数列 $\{x_n\}$ 的无限多个点, 但显然 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不存在.

(3) 正确. 因为对于任意给定的正数 ϵ , 总可以取适当的正整数 k 使 $10^{-k} < \epsilon$, 对于上述 k , 由题设存在正数 N , 当 $n > N$ 时有 $|x_n - a| < 10^{-k} < \epsilon$, 所以由极限定义知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

问题 3 数列 $\{x_n\}$ 与数列 $\{|x_n|\}$ 是否同敛散?

答 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{|x_n|\}$ 一定收敛, 且当 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$. 证明如下: $\forall \epsilon > 0, \exists N$, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \epsilon$, 从而 $||x_n| - |a|| \leq |x_n - a| < \epsilon$.

反之, 若 $\{|x_n|\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 可能收敛, 也可能发散. 例如, $\{|(-1)^n|\}$ 是收敛的, 但 $\{(-1)^n\}$ 却发散. 如果 $\{x_n\}$ 恒正或恒负, 那么 $\{x_n\}$ 与 $\{|x_n|\}$ 同敛散. 此外, 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. 这是一个今后经常用到的结论.

问题 4 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = 1$, 对吗?

答 不对. 尽管我们可以由极限的定义知道, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = a$, 但是在使用商的极限运算法则时有一个条件: 分母的极限不能为零. 由此可知, 当 $a \neq 0$ 时, 结论是正确的; 当 $a = 0$ 时, 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 可能存在, 也可能不存在, 即使存在, 也不一定等于 1.

例如, 数列 $\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{n} [2 + (-1)^n] \right\}$, 虽然有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 但极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{n+1} \cdot \frac{2 + (-1)^{n+1}}{2 + (-1)^n} \right]$$

不存在. 又如, 数列 $\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{2^n} \right\}$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

问题 5 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 不以 A 为极限的分析定义是什么?

答 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq A$ 的分析定义是: 存在一个正数 ϵ_1 , 对任意给定的 $\delta > 0$, 总有点 x_δ 满足 $0 < |x_\delta - x_0| < \delta$, 使 $|f(x_\delta) - A| \geq \epsilon_1$.

例如, 证明 $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 \neq 3$, 按上面的定义, 只要找出符合要求的 ϵ_1 和 x_δ 即可. 因为在点 $x_0 = 2$ 附近, $f(x) = x^2$ 总可以取到大于 4 的函数值, 于是可取 $\epsilon_1 \leq 4 - A = 4 - 3 = 1$, 并在点 $x_0 = 2$ 附近找一点 x_δ , 使 $f(x_\delta) > 4$. 由此分析, 证明如下:

取 $\epsilon_1 = 1$, 任给 $\delta > 0$, 取 $x_\delta = 2 + \frac{\delta}{2} \in U(2, \delta)$, 有

$$|f(x_\delta) - A| = |x_\delta^2 - 3| = \left| \left(2 + \frac{\delta}{2} \right)^2 - 3 \right| > 1 = \epsilon_1$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 \neq 3$$

问题 6 无穷多个无穷小之和的极限是否为无穷小?

答 我们知道, 有限多个无穷小的和仍然是无穷小. 但是, 把“有限多个”改为“无穷多个”, 结论就不一定成立了.

例如: (1)
$$x_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2}$$

因为
$$x_n = \frac{1}{n^2} (1+2+3+\cdots+(n-1)) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

所以
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

在这里, 无穷多个无穷小之和是常数.

(2) 若
$$x_n = \frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^3} + \cdots + \frac{n-1}{n^3}$$

则
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)}{2n^3} = 0$$

在这里, 无穷多个无穷小之和仍是无穷小.

(3) 若
$$x_n = \frac{1}{n^{3/2}} + \frac{2}{n^{3/2}} + \cdots + \frac{n-1}{n^{3/2}}$$

则
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)}{2n^{3/2}} = +\infty$$

这个例子说明, 无穷多个无穷小之和还可能是无穷大.

问题 7 函数极限与数列极限之间有什么关系?

答 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ (或 ∞) 的充分必要条件是: 对任何收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$ ($x_n \neq x_0$), 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ (或 ∞) (证明略).

由此, 我们可以得到数列极限在讨论函数极限时的一些应用.

(1) 为了证明函数极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在, 常用的方法是找出一个收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$ ($x_n \neq x_0$), 使对应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 为无穷大; 或者找出两个收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$ 、 $\{y_n\}$ ($x_n \neq x_0$, $y_n \neq x_0$), 使 $\{f(x_n)\}$ 与 $\{f(y_n)\}$ 有不同的极限.

例 证明极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ 不存在.

证 取 $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{x_n} = 1$; 取 $y_n = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$, 则

$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{y_n} = 0$. 所以, 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ 不存在.

(2) 为了证明 $f(x)$ 在 D 上无界, 常用的方法是找出数列 $\{x_n\} \subset D$, 而 $\{f(x_n)\}$ 为无穷大数列.

(3) 为了证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq \infty$, 常用的方法是找出一个数列 $x_n \rightarrow x_0 (x_n \neq x_0)$, 而 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

例 证明函数 $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 的邻域内无界, 但当 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x)$ 却不是无穷大.

证 取 $x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, 有 $f(x_n) = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$,

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内无界.

另一方面, 取 $y_n = \frac{1}{n\pi}$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $y_n \rightarrow 0$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n\pi \sin n\pi = 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq \infty$.

(4) 为了求 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, 可以先找一个收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\} (x_n \neq x_0)$, 求出 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$, 然后再证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

例如, 先证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, 再用夹逼准则证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

根据函数极限与数列极限的这一关系, 反过来有时也可以利用函数极限的结果去求相应的数列极限.

例如, 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 则由于 $x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

事实上,求函数极限的方法比求数列极限的方法多,所以大量的求函数极限的方法能给数列极限的计算带来一些方便.

问题 8 无穷大量与无界函数有什么区别和联系?

答 无穷大量是指在自变量的某一变化过程中,对应的函数值的一种变化趋势,即绝对值无限制地增大.其定义中的不等式 $|f(x)| > G$,要求当自变量变化到某一阶段后的一切 x 都要满足.而无界函数是以否定有界函数来定义的,它是反映自变量在某一范围时,对应的函数值的一种性态.其定义中的 $|f(x)| > M$,只要求自变量在此范围内有一个 x 满足即可(尽管 M 与 G 一样,都是任意大的正数).

无穷大量与无界函数的联系是:如果 $f(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷大量,则 $f(x)$ 在点 x_0 附近一定无界;反之不一定成立.例如, $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1]$ 上无界,但当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $f(x)$ 不是无穷大量.

问题 9 若 $f(x)$ 在点 x_0 连续,是否存在 x_0 的某个邻域 $U(x_0, \delta)$ 使 $f(x)$ 在该邻域内连续?

答 不一定.例如令

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{当 } x \text{ 为有理数时} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时} \end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,而在点 $x=0$ 的任何一个邻域内都有间