21世纪高等学校教材

赵显曾

微积分教程

WEIJIFEN JIAOCHENG

（上册）

东南大学出版社

SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

微积分教程

上　册

赵显曾

东南大学出版社
·南　京·

内 容 提 要

本书分上、下册，共两篇，前呼后应. 体系严谨，文字流畅，内容丰富多采，富有启发性和创新气息，增添了一些国内外同类书中不多见的有趣的新颖材料. 其中第 1 篇，初等微积分，共 3 章，着重于概念的阐述和运算能力的培养，理论与应用并重；第 2 篇，高等微积分，共 6 章，注重理论，兼顾应用，不仅包含了微积分的经典内容，还注意其现代处理方法.

本书可作为把数学分析课分成两个阶段进行教学的教材，也可作为数学分析课的教学参考书，同时还可供数学工作者和爱好者、工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

微积分教程/赵显曾编著. —南京：东南大学出版社，2001.11

ISBN 7-81050-909-8

Ⅰ.微… Ⅱ.赵… Ⅲ.微积分-高等学校-教材 Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 089356 号

东南大学出版社出版发行
(南京四牌楼 2 号 邮编 210096)
出版人：宋增民
江苏省新华书店经销 华东有色地研所印刷厂印刷
开本：700mm×1000mm 1/16 印张：39.5 字数：774 千字
2002 年 1 月第 1 版 2003 年 4 月第 2 次印刷
定价：45.00 元

序

在当今科学技术的各个领域，数学修养已成为工程技术人员必备的素质，计算机的发展，使数学的潜在威力越来越快地转化为现实生产力．近半个世纪以来，数学已不仅应用于自然科学和工程技术，在经济管理、社会科学、甚至文化艺术等领域也得到了广泛的应用，人们把数学作为工具，解决他们在各个领域中遇到的实际问题，同时也通过学习数学，培养创造性的思维能力．人们已开始重视数学技术和数学文化．

大学数学一直是我国理工科大学生的必修课．近年来，也已逐步成为文科（如经济、社会、政治学科）和其他学科的必修科目．从培养21世纪人才的角度来看，随着教学改革的不断深入，随着计算机和信息技术的迅速发展，随着各门学科之间加速渗透，人们越来越认识到：大学数学教学的重点不仅仅是为专业课程提供数学工具，同时应重视提高大学生的数学素质．从这个意义上说，教学过程中不仅要向学生传授数学知识，使之掌握基本概念和基本理论，更重要的是培养学生对事物的归纳和抽象的思维能力，从具体到一般的联想能力，建立实际问题的数学模型的能力，正确的演绎推理习惯和动手运算能力，自我更新知识的能力（自学能力），从而通过掌握数学的思想方法，激发学生的创造力．

我国高等教育正在蓬勃发展，招生规模迅速扩大，高校类型和人才培养目标也不尽相同．因此，在大学数学有一个基本要求的前提下，有必要根据专业类型和培养目标编写不同层次、不同要求的教材．基于此，我们与东南大学出版社共同努力，拟陆续编写出版“大学数学基础丛书”，以满足不同类型学校和专业的需要，包括多种要求的高等数学、线性代数与几何、概率统计、数学建模，以及其他应用数学方法类教材，同时也考虑到研究生招生规模的扩大，广大学生对考研辅导参考书的迫切需要，首先编写了“考研数学复习全书”．

根据不同培养目标的需要，本套丛书力求对现有数学教材的教学内容进行调整和更新，并不同程度地增加一些近代数学基础知识，以便为今后进一步的学习提供一个接口和开设一个窗口．同时针对不同学科，增加不同类型的应用实例（包括交通、经济、社会等领域的例子），以扩大学生的视野和提高学生的学习兴趣，特别是力求突出数学建模的思想，适当注意与计算机的结合等．

本套教材是在东南大学出版社和江苏省工业与应用数学学会的鼓励和大力支持下出版的，在此表示感谢．各教材的作者在编写和出版过程中付出了辛勤的劳动，在此一并致谢．

编写体现教改思想的教材是一个迫切而艰难的课题，应从多方面、多角度探索和实践，我们的尝试只是初步的，希望起到抛砖引玉的作用，盼望“百花齐放”的局面，不断把数学教学改革引向深入．

大学数学基础丛书编委会

2001年9月

前　言

数学分析是应用数学系最主要的基础课，要求高、难度大、周期长，对素质教育起着举足轻重的作用．为了有利于从中学学习到大学学习的过渡，提高学习质量和运算能力，从 1981 年秋起，我们先后在应用数学系，少年班和强化班，把数学分析课分成“初等微积分”和“高等微积分”两个阶段进行讲授，取得了圆满的结果，说明“两段式”教学是可行的．这一尝试，得到了当时国家教委全国直属重点工科院校应用数学专业教材编委会以及兄弟院校的肯定与好评，并将我们的配套教材推荐给高等教育出版社，1991 年初率先出版了《高等微积分》教材．

现今的《微积分教程》(以下简称为《教程》)是在我们 20 年来在“两段式”教学实践的基础上，经过调整、充实、修改、提高而成的数学分析课改革教材．全书分上、下册，共两篇，体系严谨，文字流畅，内容丰富多采，富有启发性和创新气息．其中第 1 篇是初等微积分，着重于概念的阐述和运算能力的培养，理论与应用并重；第 2 篇是高等微积分，与初等微积分相呼应，注重理论，兼顾应用，并引进了外微分形式等内容．

我认为，在科教兴国的学校教育中，高等院校在向学生传授知识的同时，要十分注重对学生能力的培养；而能力的培养，又必须寓于知识的传授之中．为了尽早培养学生既要敢于创新，又要善于创新的科学态度，从基础教育就要开始做起．因此，作为知识载体的课本，是一门课之根本．一本好教材，不应仅仅是现有材料的堆积，而应当是一本有血有肉，有自己特色的“研本”，不但要使读者知其然，还要知其所以然．这样的教材，才有味道．

诚然，微积分是一门成熟的学科，但是“成熟”是相对的，而不是绝对的，它仍然需要进一步发展与完善，有许多新东西可写．《教程》不仅包含了微积分的经典内容和方法，而且还注意代数方法的引进，同时增添了一些国内外同类教材中所不多见的有趣的新颖材料．譬如：有限极限与无限极限有什么异同？Taylor 公式是在一点附近逼近函数的，那么如何在区间上逼近函数呢？定积分定义中“两个任意性”的实质是什么？有必要强调“这个(积分)和式的极限”的特殊性吗？还有，积分第一中值定理的“内点性”如何证明？积分第二中值定理又该如何？对近似计算，怎样估计误差？二重积分的一般定义如何？积分域没有面积的二重积分存在的例子是什么样？第一型线(面)积分与第二型线(面)积分如何统一起来？关于广义积分和无穷级数中的 Dirichlet 判别法与 Abel 判别法，为什么可称为 Dirichlet 准则与 Abel

准则？在级数中，Cauchy 根值判别法优于 d'Alembert 判别法，那么优于 Raabe 判别法和 Gauss 判别法的 Cauchy 根值判别法的形式该如何？等等．这些问题的解决，不仅是微积分自身的发展与完善，而且必将对学生创新意识的培养起到一种先导性的作用和催化剂的作用．

《教程》的习题丰富、类型较多，是全书不可缺少的一个组成部分，对于加强基本训练和培养创造性学习能力是必备的．例题证明详尽，富有启发性，有利于自学．

《教程》的正文中带星号的部分，是进一步学习其他学科的基础，讲授（或初学）时可以酌情删减，不影响本课程的系统性．带星号的习题，大多是新的，具有一定的难度，是为学有余力的学生准备的，目的是启迪学生独立思考问题，开拓视野，学习创新思维，即使暂时做不出来，也没关系．

本《教程》可作为把数学分析课分成两个阶段进行教学的教材，也可作为数学分析课的教学参考书和考研究生的辅导材料，而且还可供数学工作者和爱好者、工程技术人员参考．

常听到人们说："一本好书，不是没有缺点，而是有特色，特色才是其灵魂"．《教程》的出版，如果留给人们的遗憾能少一点的话，那我将感到莫大的欣慰．

由于本人水平所限，错误之处在所难免，欢迎读者批评与指正．

衷心感谢中国科学技术大学顾新身教授真诚、无私的帮助与支援．对我校陈诤词副教授的支持与鼓励，教务处张维一副教授热情促成本书的出版，在此一并表示谢意．

最后，还要感谢本书的编辑们，正是他们的辛勤工作，才使本书能得以早日问世．

赵显曾

2001 年 9 月　于南京

目　　录

第1篇　初等微积分

第 2 篇 高等微积分

引 言

0.1 微积分的产生

微积分是一门重要的基础课,它是研究函数的微分和积分及其性质的一门科学.

微积分产生于 17 世纪,但是它的思想萌芽,却可以追溯到公元前 Archimedes 时期.在数学发展史上,微积分的问世是继 Euclid 几何之后最伟大的一个创造.通常把微积分说成是 Newton 和 Leibniz 的创造,然而客观地历史评价这一成就,只能说他们二人在总结前人经验的基础上,对创立微积分向前迈出了关键性的一大步,起了奠基的作用.这个关键在于初步认识到:过去一直是分开来研究的微分和积分这两种过程是彼此互逆地联系着的.虽然微积分一产生,在实际应用中就表现出了巨大的生命力,可是它自身并不完善,不仅没有阐明所使用的一些基本概念,而且在逻辑推理上还有很多矛盾没解决.因此,在其后的一个多世纪里,众说纷纭,争论不休,处于一种混沌朦胧的状态.

直到 19 世纪,由于极限理论和实数理论的建立,微积分的基本概念才得以澄清.它的理论有了坚实的逻辑基础,从而使微积分成为一门较成熟的数学学科.

应当指出,今天学习微积分的顺序,与其成长的历史顺序恰好相反,即先学习极限,后学习微积分,采用科学推理的方式进行.这种严格演绎式的数学格式,对从事深入的科学研究,实在是非常有益的.

0.2 微积分的基本问题

微分和积分是微积分学中两种基本的极限过程,泛泛地空谈是无济于事的,而要进行严密地论述,尚为时过早.下面通过两个典型的例子,来初步说明这个问题.

例 1 已知真空中做自由落体运动的物体在 t 秒内下落的路程是 $s=\frac{1}{2}gt^2$,求落体在时刻 t_0 的瞬时速度 v_0.

由中学物理可知,在自由落体过程中的某一时刻 t_0,落体的瞬时速度是 $v_0 = gt_0$.现在,我们要问:这是怎样算出来的呢?

对于匀速运动的速度,我们早已会算了.而自由落体运动不是匀速运动,它的速度是随时间变化的,不能用计算匀速运动的公式.但是,这种变化是逐渐的,是一个过程,当时间间隔很小时,速度的变化也很小,可以近似地看成匀速运动.考察从

时刻 t_0 到时刻 $t_0+\Delta t$ 这段时间内的运动，落体下落的路程

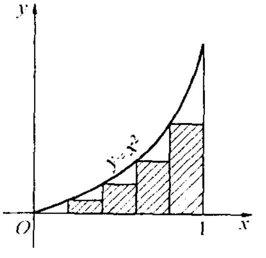
$$\Delta s = \frac{1}{2}g(t_0+\Delta t)^2 - \frac{1}{2}gt_0^2 = \frac{1}{2}g[2t_0\Delta t + (\Delta t)^2]$$

与这段时间间隔 Δt 的比

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = gt_0 + \frac{1}{2}g\Delta t$$

是这段时间内的平均速度. 如果把 $\bar{v}$ 作为 v_0 的近似值，当 Δt 越小(越接近零)时，近似程度越高；但是，不论 Δt 多么小，$\bar{v}$ 只是 v_0 的近似值，而不是它的精确值. 当我们令 Δt 无限趋向于零时，$\bar{v}$ 就无限趋向于 gt_0，即得 $v_0 = gt_0$.

例 2 已知直线 $y=0$，$x=1$ 和抛物线 $y=x^2$ 围成一个“曲边三角形”(如右图)，求曲边三角形的面积 A.



在初等数学中，我们已会计算三角形的面积. 但是曲边三角形有一边是曲线，它的面积就不能应用初等方法来计算了.

我们把 x 轴上从 0 到 1 的区间作 n 等分，则每一段长为 $1/n$，分点坐标分别为 $1/n, 2/n, \cdots, (n-1)/n$. 再过每个分点作 y 轴的平行线，交抛物线于 $n-1$ 个点，然后以这些交点为顶点，作曲边三角形的“内接阶梯形”(为图中阴影部分)，它的面积为

$$\begin{aligned} A_n &= \left(\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2\frac{1}{n} + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n^3}[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2] \\ &= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

同理，我们还可以作曲边三角形的“外接阶梯形”，它的面积为

$$\begin{aligned} \bar{A}_n &= \left(\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2\frac{1}{n} + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\frac{1}{n} + \left(\frac{n}{n}\right)^2\frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

显然 $A_n < A < \bar{A}_n$，而且不论 n 多么大，这个不等式都成立. 由于当 n 无限增大时，A_n 和 $\bar{A}_n$ 都无限接近于 1/3，所以 $A = 1/3$.

例 1 和例 2 分别是微分学和积分学的问题，虽然二者的具体意义不同，但是其基本矛盾却是一致的 —— **变与不变的矛盾或曲与直的矛盾**，因此解决问题的方法都利用了所谓的无穷小进行分析，即使用了极限的方法：为了要确定某个量，最先加以确定的，不是这个量本身，而是它的一串越来越准确的近似值，然后从对这个近似过程的考察中，把那个量的准确值惟一地确定下来. 正因为这样，微积分这一课程又称为数学分析，这个名称比较清楚地刻画了该学科的研究方法.

0.3 学习微积分的意义

微积分不仅在实际问题中有着广泛的用途，而且它还是现代数学和科学技术的重要基础.因此，学习微积分的第一个目的，就是为了应用和打基础.

学习微积分的第二个目的，是为了加强思维能力的培养，提高人的素质，进行创新.数学是锻炼思维的体操，作为人类文明的一项重大成就的微积分，包含着丰富的辩证法，因此它是很好的锻炼思维的体操教材.

在这里我们既不想掩饰困难，造成微积分很容易学习的假象，也不想忽略知识的内在联系，造成微积分难以理解的感觉，而是力求从整体上阐明微积分的基本概念和内在联系.作到由浅入深，循序渐进地进行学习.如果说初等数学是常量数学的话，那么微积分则是变量数学.在讨论微积分的问题中，要牢固地树立起变化的观点.在给出具体应用和直观意义的同时，还要使学生明白，严格性并不妨碍直观的理解，严格性本身不是目的，而是一种进行科学研究的方法训练.

鉴于人们对事物的认识是从感性到理性，由浅入深循序渐进的，以及教学的实际需要，我们把传统的数学分析课，分成“初等微积分”和“高等微积分”两段进行授课.

第 1 篇　初等微积分

在初等微积分中，着重于一元函数与极限、一元函数微积分概念的阐述和基本运算能力的培养，同时注意实际应用．而实数理论的建立，则放在第 2 篇高等微积分中．

1　函数与极限

函数是微积分的研究对象，极限是微积分的研究方法．

1.1　集合与映射

1.1.1　集合概念

集合是数学中一个最基本而又简单的概念，就像几何学里的点和直线一样．我们不来定义集合，只描述它．通常，人们把在一定场合下具有某种共同性质的一些对象的全体，称为集合或集；而组成集合的一个个的对象，称为集合的元素或元．

如果对任何一个对象，都可以确切知道它属于或不属于某个集合，那么这个集合就算给定了．对一个集合 S 来说，某一对象 x 或是 S 的元素，记为 $x \in S$，读作“x 属于 S”；或 x 不是 S 的元素，记为 $x \notin S$，读作“x 不属于 S”，二者必居其一，不能模棱两可．每一个对象只可能是给定集合的一个元素；换言之，一个集合中所有的元素彼此都是不同的．由有限个元素组成的集合称为**有限集**；否则，称为**无限集**．

习惯上常用大写字母 A, B, C 等表示集合，而用小写字母 a, b, c 等表示元素．如果能够明确写出集合的所有元素，那么可以把元素列举在花括号里面来表示该集合．例如，由 a, b, c 所组成的集合 M，就可写成

$$M = \{a, b, c\}$$

又如，所有自然数组成的集合，记为

$$N = \{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$$

M 是有限集，而 N 是无限集.

一般地，把具有某个性质 P 的元素 x 所组成的集合 S，记为

$$S = \{x \mid x \text{ 具有性质 } P\}$$

例如，方程 $x^2 - 1 = 0$ 的解 x 的全体，组成的集是 $\{x \mid x^2 - 1 = 0\}$.

专门研究集合的一般性质的数学分支，称为**集合论**. 集合论是在 19 世纪末 20 世纪初才开始蓬勃发展起来的. 德国数学家 G. Cantor 是它的奠基人. 集合论的思想与概念，已经渗透到所有现代数学的各个分支，并且改变了它们的面貌，如果不熟悉集合论的原理，就不可能对现代数学获得正确的理解.

定义 1 设 A, B 为两个集合，只要 $x \in A$，就必有 $x \in B$，则称 A 含于 B 或 B 包含 A. 此时也称 A 是 B 的一个**子集**，记为 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$.

对于任意集合 A，显然有 $A \subseteq A$.

定义 2 如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，则称 A 等于 B 或 B 等于 A，记为 $A = B$ 或 $B = A$.

定义 3 如果 $A \subseteq B$，但 $A \neq B$，则称 A 是 B 的一个**真子集**.

特别是为了研究问题方便起见，把不含任何元素的集合称为**空集**，记为 $\varnothing$. 如 $\{x \mid x^2 + 1 = 0\} = \varnothing$. 规定空集是任何集合的子集.

1.1.2 集合的运算

定义 4 两个集合 A_1, A_2 的**并集**(或**并**) 为

$$A_1 \cup A_2 = \{x \mid x \in A_1 \text{ 或 } x \in A_2\}$$

就是说，$A_1 \cup A_2$ 是由那些至少属于 A_1, A_2 中一个的元素所组成的集合. 如果元素 x 既属于 A_1 又属于 A_2，那么 x 只能归入并集 $A_1 \cup A_2$ 一次. 因此，有

$$A_1 \cup A_1 = A_1$$

而且当 $A_1 \subseteq A_2$ 时，有

$$A_1 \cup A_2 = A_2$$

并集定义可以推广到 n 个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的情况，其并集记为 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

定义 5 两个集合 A_1, A_2 的**交集**(或**交**) 为

$$A_1 \cap A_2 = \{x \mid x \in A_1 \text{ 且 } x \in A_2\}$$

$A_1 \cap A_2$ 是由同时属于 A_1, A_2 的所有元素组成的集合. 显然 $A_1 \cap A_1 = A_1$. 如果 $A_1 \subseteq A_2$，则 $A_1 \cap A_2 = A_1$. 特别，当 $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$ 时，称 A_1 与 A_2 相交；而当 $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ 时，称 A_1 与 A_2 不交.

此定义也可推广到 n 个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的情况，其交集记为 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

集合的并与交具有下述性质：

定理 1 $A_1 \cup (A_2 \cup A_3) = (A_1 \cup A_2) \cup A_3 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

证　设 $x \in A_1 \cup (A_2 \cup A_3)$，则 $x \in A_1$ 或 $x \in A_2 \cup A_3$，也就是说 $x \in A_1$ 或 $x \in A_2$ 或 $x \in A_3$，即 $x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

反之，若 $x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3$，显然 $x \in A_1 \cup (A_2 \cup A_3)$. 于是

$$A_1 \cup (A_2 \cup A_3) = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

同样可证 $(A_1 \cup A_2) \cup A_3 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.　■

定理 2　$A_1 \cap (A_2 \cap A_3) = (A_1 \cap A_2) \cap A_3 = A_1 \cap A_2 \cap A_3$.

证明留给读者.

定理 3　$A_1 \cap (A_2 \cup A_3) = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)$.

证　若 $x \in A_1 \cap (A_2 \cup A_3)$，则 $x \in A_1$ 且 $x \in A_2 \cup A_3$，也就是 $x \in A_1$ 且 $x \in A_2$ 或者 $x \in A_1$ 且 $x \in A_3$，即 $x \in A_1 \cap A_2$ 或者 $x \in A_1 \cap A_3$，亦即 $x \in (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)$. 因而

$$A_1 \cap (A_2 \cup A_3) \subseteq (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)$$

反之，若 $x \in (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)$，则 $x \in A_1 \cap A_2$ 或 $x \in A_1 \cap A_3$，所以 $x \in A_1$ 并且 $x \in A_2$ 或 $x \in A_3$，于是 $x \in A_1$ 且 $x \in A_2 \cup A_3$，所有 $x \in A_1 \cap (A_2 \cup A_3)$，可知

$$(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3) \subseteq A_1 \cap (A_2 \cup A_3)$$

综上，定理 3 得证.　■

定理 4　$A_1 \cup (A_2 \cap A_3) = (A_1 \cup A_2) \cap (A_1 \cup A_3)$.

请读者自证.

定义 6　两个集合 A_1, A_2 的**差集**(或**差**)为

$$A_1 - A_2 = \{x \mid x \in A_1 \text{ 且 } x \notin A_2\}$$

$A_1 - A_2$ 是由所有属于 A_1 而不属于 A_2 的元素组成的集合. 如果 $A_2 \subseteq A_1$，则差集 $A_1 - A_2$ 也称为 A_2 关于 A_1 的**余集**. 如果 $A_1 \subseteq A_2$，则 $A_1 - A_2 = \varnothing$.

定理 5　设 $A_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 和 B 是集合，则：

(1) $B - \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \bigcap\limits_{i=1}^{n} (B - A_i)$；

(2) $B - \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{n} (B - A_i)$.

证　(1) 设 $x \in B - \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$，则 $x \in B$ 且 $x \notin \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$，也就是 $x \in B$ 且对所有 $i = 1,2,\cdots,n$ 有 $x \notin A_i$，因而对 $i = 1,2,\cdots,n$ 有 $x \in B - A_i$，即 $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} (B - A_i)$. 于是 $B - \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{n} (B - A_i)$.

反之，设 $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} (B - A_i)$，则对任何 $i = 1,2,\cdots,n$ 有 $x \in B - A_i$，即 $x \in B$ 且对任何 $i = 1,2,\cdots,n$ 有 $x \notin A_i$，亦即 $x \in B$ 且 $x \notin \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$，所以 $x \in B - \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$，