全国高等医药教材建设研究会 卫生部规划教材
全国高等学校教材

**供基础、临床、预防、口腔医学类专业用**

# 医用高等数学

第4版

主 编 张选群

1
7(4)
4

人民卫生出版社

全国高等学校教材

供基础、临床、预防、口腔医学类专业用

# 医用高等数学

## 第 4 版


主　编　张选群

编　者（以姓氏笔画为序）

马建忠（中国医科大学）

王　颖（吉林大学白求恩医学部）

何穗智（中山大学中山医学院）

李　海（四川大学华西医学中心）

张选群（武汉大学医学院）

赵耐青（复旦大学上海医学院）



人民卫生出版社

**图书在版编目（CIP）数据**

医用高等数学/张选群主编. —4 版. —北京：人民卫生出版社，2004.5

ISBN 7-117-06082-4

Ⅰ.医... Ⅱ.张... Ⅲ.医用数学-医学院校-教材 Ⅳ.R311

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 032588 号

**医 用 高 等 数 学**

第 4 版

**主　　编**：张选群
**出版发行**：人民卫生出版社（中继线 67616688）
**地　　址**：（100078）北京市丰台区方庄芳群园 3 区 3 号楼
**网　　址**：http：//www. pmph. com
**E - mail**：pmph @ pmph. com
**印　　刷**：尚艺印装有限公司
**经　　销**：新华书店
**开　　本**：850×1168 1/16　　**印张**：13.75
**字　　数**：324 千字
**版　　次**：1987 年 6 月第 1 版　2004 年 5 月第 4 版第 23 次印刷
**标准书号**：ISBN 7-117-06082-4/R·6083
**定　　价**：19.00 元

**著作权所有，请勿擅自用本书制作各类出版物，违者必究**

（凡属质量问题请与本社发行部联系退换）

# 全国高等学校五年制临床医学专业
# 第六轮规划教材修订说明

为适应我国高等医学教育改革和发展的需要，经全国高等医药教材建设研究会和卫生部临床医学专业教材评审委员会审议，决定从2002年9月开始进行五年制临床医学专业规划教材第六轮的修订。第六轮的修订工作要以《中国医学教育改革和发展纲要》和《关于“十五”期间普通高等教育教材建设与改革的意见》为指导，及时反映新世纪教学内容和课程改革的成果，在选择教材内容和编写体系时，应注意素质教育和创新能力与实践能力的培养，为学生知识、能力、素质协调发展创造条件。第六轮的修订要继承和发扬第五轮教材编写的优点，在坚持“三基”、“五性”、“三特定”的同时，提倡创新，可同时编写配套教材（含光盘）；增加英文的词汇量；加强人文科学的内容；并强调增强学生的法律意识等，力争编出精品教材。

随着教材品种的不断增加和完善，第六轮教材将不再与七年制共用；并为适应各院校的具体情况，不再划分必修教材和选修教材，由各院校自行选择使用。

全套教材共50种，于2004年秋季全部出齐，其中24种同时为教育部确定的普通高等教育“十五”国家级规划教材。另根据学科发展的需要，本轮教材将原《耳鼻咽喉科学》更名为《耳鼻咽喉-头颈外科学》；将原《计算机应用基础》更名为《医学计算机应用基础》。

## 第六轮教材目录

| | | |
|---|---|---|
| 1.《医用高等数学》第4版 | 主编 | 张选群 |
| △2.《医学物理学》第6版 | 主编 | 胡新珉 |
| 3.《基础化学》第6版 | 主编 | 魏祖期 |
| 4.《有机化学》第6版 | 主编 | 吕以仙 |
| | 副主编 | 陆　阳 |
| 5.《医学生物学》第6版 | 主编 | 傅松滨 |
| △6.《系统解剖学》第6版 | 主编 | 柏树令 |
| △7.《局部解剖学》第6版 | 主编 | 彭裕文 |
| △8.《组织学与胚胎学》第6版 | 主编 | 邹仲之 |
| △9.《生物化学》第6版 | 主编 | 周爱儒 |
| | 副主编 | 查锡良 |
| △10.《生理学》第6版 | 主编 | 姚　泰 |
| | 副主编 | 吴博威 |
| 11.《医学微生物学》第6版 | 主编 | 周正任 |
| | 副主编 | 李　凡 |
| 12.《人体寄生虫学》第6版 | 主编 | 李雍龙 |
| 13.《医学免疫学》第4版 | 主编 | 陈慰峰 |
| | 副主编 | 金伯泉 |
| 14.《病理学》第6版 | 主编 | 李玉林 |
| | 副主编 | 唐建武 |
| △15.《病理生理学》第6版 | 主编 | 金惠铭 |
| | | 王建枝 |
| 16.《药理学》第6版 | 主编 | 杨宝峰 |
| | 副主编 | 苏定冯 |
| 17.《医学心理学》第4版 | 主编 | 姜乾金 |
| 18.《法医学》第4版 | 主编 | 王保捷 |
| △19.《诊断学》第6版 | 主编 | 陈文彬 |
| | | 潘祥林 |
| | 副主编 | 康熙雄 |
| | | 王笑云 |
| △20.《医学影像学》第5版 | 主编 | 吴恩惠 |
| | 副主编 | 冯敢生 |
| △21.《内科学》第6版 | 主编 | 叶任高 |
| | | 陆再英 |
| | 副主编 | 谢　毅 |
| | | 王　辰 |

△22.《外科学》第 6 版 主编 吴在德 吴肇汉 副主编 郑树 安洪

△23.《妇产科学》第 6 版 主编 乐杰 副主编 谢幸 丰有吉

24.《儿科学》第 6 版 主编 杨锡强 易著文 副主编 沈晓明 常立文

△25.《神经病学》第 5 版 主编 王维治 副主编 罗祖明

△26.《精神病学》第 5 版 主编 郝伟

△27.《传染病学》第 6 版 主编 彭文伟 副主编 李兰娟 乔光彦

△28.《眼科学》第 6 版 主编 惠延年

29.《耳鼻咽喉-头颈外科学》第 6 版 主编 田勇泉 副主编 孙爱华

△30.《口腔科学》第 6 版 主编 张志愿

△31.《皮肤性病学》第 6 版 主编 张学军

32.《核医学》第 6 版 主编 李少林 副主编 张永学

△33.《流行病学》第 6 版 主编 王建华

34.《卫生学》第 6 版 主编 仲来福 副主编 刘移民

△35.《预防医学》第 4 版 主编 傅华 副主编 段广才

36.《中医学》第 6 版 主编 李家邦 副主编 高鹏翔

37.《医学计算机应用基础》第 3 版 主编 邹赛德 副主编 杨长兴

38.《体育》第 3 版 主编 裴海泓

39.《医学细胞生物学》第 3 版 主编 宋今丹

40.《医学分子生物学》第 2 版 主编 药立波 副主编 冯作化 宋春丽

41.《医学遗传学》第 4 版 主编 左伋

△42.《临床药理学》第 3 版 主编 徐叔云 副主编 魏伟

43.《医学统计学》第 4 版 主编 马斌荣

△44.《医学伦理学》第 2 版 主编 丘祥兴 副主编 王明旭

△45.《临床流行病学》第 2 版 主编 王家良

46.《康复医学》第 3 版 主编 南登崑

47.《医学文献检索》第 2 版 主编 郭继军

48.《卫生法》第 2 版 主编 赵同刚 副主编 达庆东 汪建荣

49.《医学导论》第 2 版 主编 文历阳

△50.《全科医学概论》第 2 版 主编 杨秉辉

注：画△者为普通高等教育“十五”国家级规划教材

## 全国高等学校临床医学专业
## 第五届教材评审委员会

**名誉主任委员** 裘法祖

**主任委员** 陈灏珠 **副主任委员** 龚非力

**委员**（以姓氏笔画为序）

于修平 王卫平 王鸿利 文继舫 朱明德 刘国良
李焕章 杨世杰 张肇达 沈悌 吴一龙 郑树森
原林 曾因明 廖秦平 樊小力

**秘书** 孙利军



试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

# 第4版前言

由人民卫生出版社出版的《医用高等数学》密切配合我国的医学教育改革，在培养我国现代医学人才的教学中不断改进。新世纪课程教材《医用高等数学》（即第3版）的系统性、适用性及科学性受到了全国许多院校师生们的关注与重视。第4版《医用高等数学》仍然是结合我国医学教育的实际情况，为五年制基础、预防、临床、口腔医学类专业教学而编写的。内容按54学时拟订，若加上打星号（*）的部分内容，总的教学时数可拓展到72学时。

本版教材除了在内容结构、典型例题等方面稍作调整外，还配套编写了《医用高等数学学习指导》。该书对每一章的内容都进行了概括与总结；对难度较高的“思考与练习”作出了解答，以正确引导学生的思维；对各章的习题也给出了详细的解题过程；同时还提供了一些综合例题、模拟试题，强化思想性与启发性。

我真诚地欢迎使用本教材的师生们多提宝贵意见，共同为建设适用、先进的优秀教材奉献心力！

**张选群**

2004.3

# 目　　录

# 第一章　函数和极限

函数是变量之间相互联系、相互制约关系的抽象表示，是事物运动、变化及相互影响的复杂关系在数量方面的反映；极限刻画了变量的变化趋势，是研究函数的重要方法．本章内容主要包括函数、极限和函数的连续性等基本概念，以及它们的主要性质．

## 第一节　函　　数

### 一、函数的概念

**1. 常量与变量**

我们经常会遇到各种不同的量，如长度、重量、面积、温度、时间、距离等．其中有的量在过程中始终保持同一数值，称为**常量**（constant）；有的量在过程中可取不同的数值，称为**变量**（variable）．

一个量究竟是常量还是变量，不是绝对的，要根据具体过程和具体条件来确定．即使同一个量，在某一过程或条件下可以认为是常量；而在另一过程或条件下就可能是变量．例如人的身高，在研究少儿发育成长的过程中是变量，而在研究成人的健康状况时通常是常量．

常量也可看作是一种特殊的变量，即在某一过程中，该变量都取相同的数值．

**2. 函数的概念**

**定义 1-1**　设 $x$、$y$ 是同一变化过程中的两个变量，如果对于变量 $x$ 的每一个允许的取值，变量 $y$ 按照一定的规律总有一个确定的值与之对应，则称变量 $y$ 是变量 $x$ 的**函数**（function）．此时，变量 $x$ 称为**自变量**（independent variable），$y$ 又称为**因变量**（dependent variable），记为

$$y=f(x)$$

自变量的所有允许值的集合称为函数的**定义域**（domain of definition）．函数的定义域通常用区间来表示．如果 $x_0$ 是函数 $f(x)$ 定义域中的一点，我们也说函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 点有定义，与 $x_0$ 对应的因变量的值称为函数值，记为 $f(x_0)$，有时也记为"$y\mid_{x=x_0}$"，即 $y\mid_{x=0}=f(x_0)$．所有函数值的集合称为函数 $f(x)$ 的**值域**（domain of functional value）．

对应规律和定义域是函数概念中的两大要素，两个函数只有当它们的对应规律和定义域都完全相同时，才认为是两个相同的函数．函数的定义中，对应规律是用记号 $f(\quad)$ 表示的，它具有广泛的涵义，其表达方式通常有公式法、图像法和表格法；函数的定义域在实际中是由问题的实际意义确定的，在不考虑函数的实际意义时，是使函数的解析表达式有意义的一切实数所构成的数集．

**例 1-1**　在出生后 1～6 个月期间内，正常婴儿的体重近似满足以下关系式：



试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

$$y=3+0.6x$$

式中，$x$ 表示婴儿的月龄，是自变量；$y$ 表示其体重（千克），是 $x$ 的函数. 函数的定义域为 [1，6]. 这是公式法表达的函数关系. 若不考虑该问题的实际意义，函数 $f(x)=3+0.6x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

**例 1-2** 监护仪自动记录了某患者一段时间内体温 $T$ 的变化曲线，如图 1-1 所示. 对于这段时间的任意时刻 $t$ 都能读出患者体温 $T$ 的值，即患者体温 $T$ 是时间 $t$ 的一个函数 $T=T(t)$. 这是用图像法表达的函数关系. 如果记录的是静卧在床上健康人的体温 $T=37℃$，它仍然是 $t$ 的函数，此时无论 $t$ 取何值，$T$ 的取值总是 37℃，反映在图像上则是平行于 $t$ 轴的直线.

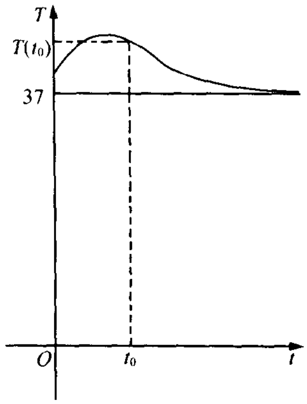

图 1-1

**例 1-3** 某地区统计了某年 1～12 月中当地流行性出血热的发病率，见表 1-1. 可以看出，对每一个月份 $t$，都有一个发病率 $y$ 与之对应. $y$ 是 $t$ 的函数，其定义域为 1～12 月，对应规律则由表 1-1 所示，这是用表格法表达的函数关系.

表 1-1

| $t$（月份） | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$（‰） | 16.6 | 8.3 | 7.1 | 6.5 | 7.0 | 10.0 | 2.5 | 3.5 | 5.7 | 10.0 | 17.1 | 7.0 |

## 二、初 等 函 数

**1. 基本初等函数**

中学里所学过的五类函数：

幂函数 $y=x^a$ （$a$ 为任意实数），

指数函数 $y=a^x$ （$a>0$，$a\neq1$），

对数函数 $y=\log_a x$ （$a>0$，$a\neq1$），

三角函数 $y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\tan x$、$y=\cot x$ 等，

反三角函数 $y=\arcsin x$、$y=\arccos x$、$y=\arctan x$、$y=\operatorname{arccot} x$ 等，

再加上常数函数 $y=C$（$C$ 为常数），统称为**基本初等函数**（**basic elementary function**）.

**2. 复合函数**

**定义 1-2** 设变量 $y$ 是变量 $u$ 的函数，变量 $u$ 又是变量 $x$ 的函数，即

$$y=f(u),u=\varphi(x).$$

如果变量 $x$ 的某些值通过变量 $u$ 可以确定变量 $y$ 的值，则称 $y$ 是 $x$ 的**复合函数**（**compound function**），记为

$$y=f[\varphi(x)]$$

变量 $u$ 称为中间变量. 复合函数概念可以推广到多个函数构成情况，此时函数是通过多个中间变量的传递而形成的.

**例 1-4** 试通过 $y=\lg u$，$u=\arctan v$，$v=x+1$，求出 $y$ 关于 $x$ 的复合函数.

**解** $y=\lg u$，$u=\arctan v$，$v=x+1$，则 $y$ 关于 $x$ 的复合函数是 $y=\lg\arctan(x+1)$，其定义域为 $(-1,+\infty)$.

**例 1-5** 设 $f(x)=x^2$，$g(x)=\frac{x}{1-x}$，试求：$f[g(x)]$、$f[f(x)]$、$g[f(x)]$、$g[g(x)]$.

**解** $f[g(x)]=\left(\frac{x}{1-x}\right)^2$，　　$f[f(x)]=(x^2)^2=x^4$，

$g[f(x)]=\frac{x^2}{1-x^2}$，　　$g[g(x)]=\dfrac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}}=\frac{x}{1-2x}$.

如果由两个函数复合而成的函数的定义域为空集，则此复合函数无意义（或称它们不能复合）. 例如，由 $y=\arcsin u$，$u=2+x^2$ 复合而成的函数 $y=\arcsin(2+x^2)$ 因 $2+x^2>1$，其定义域为空集，即函数 $\arcsin(2+x^2)$ 无意义.

以上是将多个函数“合成”为一个表达式. 而在后面的很多计算问题中，往往需要把复合函数的中间变量找出来，把它“分解”为若干个基本初等函数或由它们通过四则运算而得到的简单函数形式，以便于利用公式进行计算.

**例 1-6** 将下列复合函数“分解”为简单函数：

(1) $y=a\sin(bx+c)$；

(2) $y=\frac{a}{1+2^{kx}}$；

(3) $y=\lg(1+\sqrt{1+\cos^2x})$.

**解** (1) $y=a\sin(bx+c)$ 可以看成是由 $y=a\sin u$ 和 $u=bx+c$ 复合而成的.

(2) $y=\frac{a}{1+2^{kx}}$ 可以看成是由 $y=\frac{a}{u}$，$u=1+2^v$，$v=kx$ 复合而成的.

(3) $y=\lg(1+\sqrt{1+\cos^2x})$ 可以看成是由 $y=\lg u$，$u=1+\sqrt{v}$，$v=1+\omega^2$，$\omega=\cos x$ 复合而成的.

**3. 初等函数**

**定义 1-3** 由基本初等函数经过有限次四则运算以及函数复合所得到的仅用一个解析式表达的函数，称为**初等函数**（**elementary function**）.

例如，$y=\frac{\lg x}{\sqrt{1-x^2}}$、$y=x\tan x+\sin(1-e^x)$ 等都是初等函数.

## 三、分 段 函 数

有些函数，对于其定义域内自变量 $x$ 不同的值，不能用一个统一的解析式表示，而要用两个或两上以上的式子表示，这类函数称为**分段函数**（**piecewise function**）. 分段函数在实际医学问题中也是常见的.

**例 1-7** 设某药物的每天剂量为 $y$（单位：mg），对于 16 岁以上的成年人用药剂量是一常数，设为 2mg. 而对于 16 岁以下的未成年人，则每天的用药剂量 $y$ 正比于年龄 $x$，比例常数

为 0.125mg/岁，其函数关系（图 1-2）为

$$y=\begin{cases}0.125x & 0<x<16\\ 2 & x\geqslant 16\end{cases}.$$

这里，用药剂量 $y$ 是年龄 $x$ 的函数，但其函数关系是用两个解析式表示的.

应该注意的是，分段函数是一个函数，而不是两个或几个函数. 求分段函数的函数值时，不同范围内的自变量的值要代入相应范围内的函数表达式进行运算. 分段函数一般不属于初等函数. 不过，在不同段内的表达式，通常由初等函数表示.

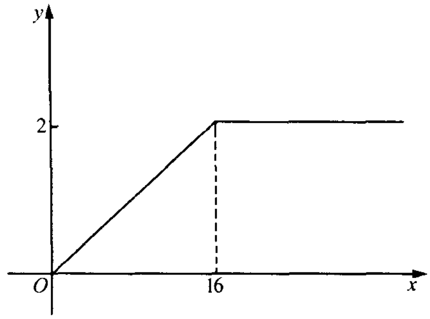

图 1-2

**例 1-8** 设 $f(x)=\max\{|x|,x^2\}=\begin{cases}x^2 & x<-1\\ -x & -1\leqslant x<0\\ x & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x^2 & 1<x\end{cases}$，

求 $f(-2)$、$f(-0.5)$、$f(0)$、$f(1.2)$.

**解** $f(-2)=(-2)^2=4$，

$f(-0.5)=-(-0.5)=0.5$，

$f(0.5)=0.5$，

$f(1.2)=1.2^2=1.44$.

## 四、函数的几种简单特性

**1. 有界性**

设函数 $f(x)$在区间（$a$，$b$）内有定义，如果存在一个正数 $M$，使对所有的 $x\in(a,b)$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$在（$a$，$b$）内是有界的. 如果不存在这样的正数 $M$，则称 $f(x)$在（$a$，$b$）内是无界的.

例如：$\sin x$ 在（$-\infty$，$+\infty$）内是有界的；$y=\dfrac{1}{x}$在（1，$+\infty$）内是有界的，但在（0，1）内是无界的.

**2. 单调性**

设 $x_1$、$x_2$ 是函数 $f(x)$的定义区间（$a$，$b$）内的任意两点，且 $x_1<x_2$. 若 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$在（$a$，$b$）内是单调递增的；若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$在（$a$，$b$）内是单调递减的.

例如：$2^x$ 在（$-\infty$，$+\infty$）内是单调递增的；$x^2$ 在（$-\infty$，0）内是单调递减的，而在（0，$+\infty$）内是单调递增的.

**3. 奇偶性**

如果对于函数 $f(x)$定义域内的任意点 $x$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$是偶函数；如果对于函数 $f(x)$定义域内的任意点 $x$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为奇函数. 偶函数的图像是关于 $y$ 轴对称的，而奇函数的图像是关于坐标原点对称的.

例如：$x^2-3x^4$、$2^x+2^{-x}$、$\cos x$ 都是偶函数；$\sin x$、$x+2x^3$、$2^x-2^{-x}$都是奇函数.

**4. 周期性**

对于函数 $f(x)$，如果存在正的常数 $T$，使得 $f(x)=f(x+T)$恒成立，则称 $f(x)$为周期函数，满足这个等式的最小正数 $T$，称为函数的周期.

例如：$\sin x$、$\cos x$ 都是周期函数，周期为 $2\pi$.

### 思考与练习

1. 判断下列各组中的函数是否为相同的函数：

(1) $f(x)=\sqrt{x^2}$ 与 $g(x)=x$；　(2) $f(x)=\sqrt[3]{x^3}$ 与 $g(x)=x$；

(3) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$ 与 $g(x)=\dfrac{1}{x+1}$；　(4) $f(x)=10^{\lg x}$ 与 $g(x)=x$；

(5) $f(x)=\cos^2x+\sin^2x$ 与 $g(x)=1$；　(6) $f(x)=\arcsin x$ 与 $g(x)=\dfrac{\pi}{2}-\arccos x$；

(7) $y=\tan(x+1)$与 $u=\tan(v+1)$.

2. 设 $f(x)$是奇函数，$g(x)$是偶函数，考察下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)g(x)$；　(2) $f[g(x)]$；　(3) $f[f(x)]$.

3. 下列函数中哪些是奇函数？哪些是偶函数？哪些是非奇非偶函数？

(1) $f(x)=x^3+|\sin x|$；　(2) $f(x)=(2^x+2^{-x})\cos x$；　(3) $f(x)=\arctan(\sin x)$.

4. 指出下列各函数中哪些是周期函数，并指出其周期.

(1) $y=\arctan(\tan x)$；　(2) $y=\sin\pi x+\cos\pi x$；　(3) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$；　(4) $y=1+\cos 2x$.

# 第二节　极　　限

## 一、极限的概念

在研究实际问题时，除了了解有关函数在变化过程中如何取值之外，往往我们还需要弄清楚：当自变量按一定的趋势变化时，函数的变化趋势如何．这就是**极限（limit）**概念所要描述和解答的问题.

对于函数 $y=f(x)$，自变量 $x$ 的变化趋势有两种情形：一种是自变量 $x$ 的绝对值无限增大（记为 $x\to\infty$）；另一种是自变量 $x$ 的值无限趋近于某一定值 $x_0$（记为 $x\to x_0$）．下面我们分别考察这两种情况下函数 $y=f(x)$的变化趋势.

**1. $x\to\infty$时函数的极限**

考察函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，当 $x\to\infty$时的变化趋势．由表 1-2 可看出，无论 $x$ 是取正值并无限增大（记作 $x\to+\infty$），还是取负值且其绝对值无限增大（记作 $x\to-\infty$），函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$的变化趋势都是无限趋近于 0.

表 1-2

| $x$ | $\pm 1$ | $\pm 10$ | $\pm 100$ | $\pm 1000$ | $\pm 10000$ | $\pm 100000$ | … | $\to\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\pm 1$ | $\pm 0.1$ | $\pm 0.01$ | $\pm 0.001$ | $\pm 0.0001$ | $\pm 0.00001$ | … | $\to 0$ |

从图 1-3 也可看出，当 $|x|$ 无限增大时，函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图像无限地接近于 $x$ 轴，即以直线 $y=0$ 为渐近线. 由此可见：0 是函数 $y=\frac{1}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时无限接近的一个常数.

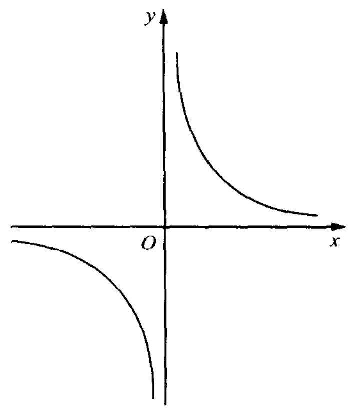

图 1-3

**定义 1-4** 当自变量 $x$ 的绝对值无限增大时，如果函数 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 $A$，就称当 $x$ 趋于无穷大时，函数 $f(x)$ 以 $A$ 为极限，记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A \ (x\to\infty).$$

对于函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时，$f(x)\to 0$，即 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$. 如果当 $|x|$ 无限增大时，函数 $f(x)$ 不趋于某一个常数，此时，我们就称 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 的极限不存在. 例如函数 $y=\sin x$ 和 $y=x^2$，当 $x\to\infty$ 时极限都不存在. 前者在 $x\to\infty$ 时函数值始终在 $-1$ 与 1 之间波动；后者当 $x\to\infty$ 时，函数值是无限增大的. 对于后一种情形，我们也常记为

$$\lim_{x\to\infty} x^2=\infty \text{ 或 } x^2\to\infty \ (x\to\infty).$$

若仅当自变量 $x$ 的变化沿 $x$ 轴正方向无限增大（或沿 $x$ 轴负方向绝对值无限增大）时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 $A$，则称 $A$ 为函数 $f(x)$ 的单侧极限，记为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \ (\text{或} \lim_{x\to-\infty} f(x)=A).$$

例如，对于函数 $f(x)=\arctan x$，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to\frac{\pi}{2}$；当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to-\frac{\pi}{2}$. 即

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}.$$

**2. $x\to x_0$ 时函数的极限**

考察函数 $f(x)=\frac{1}{x}$，当自变量从 $x$ 轴上 $x=1$ 的左右趋近于 1（记为 $x\to 1$）时，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的变化趋势见表 1-3.

表 1-3

| $x$ | 0.5 | 0.7 | 0.9 | 0.99 | 0.999 | … | $\to 1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2 | 1.429 | 1.11 | 1.010 | 1.001 | … | $\to 1$ |
| $x$ | 1.5 | 1.2 | 1.1 | 1.01 | 1.001 | … | $\to 1$ |
| $f(x)$ | 0.667 | 0.833 | 0.909 | 0.990 | 0.999 | … | $\to 1$ |

由表 1-3 可见，当 $x\to1$，不论是从右边还是从左边趋近于 1，函数 $f(x)$ 都趋近于 1，可见 1 是当自变量 $x\to1$ 时函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 无限接近的常数.

**定义 1-5** 设函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 附近有定义（但在这一点可以没有定义），当自变量 $x$ 以任意方式无限趋近于定点 $x_0$ 时，若函数 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 $A$，就称当 $x$ 趋近于 $x_0$ 时，函数 $f(x)$ 以 $A$ 为极限，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0).$$

由此，当 $x\to1$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x}\to1$，即 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x}=1$. 如果当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 不趋近一个常数，则称当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的极限不存在. 例如当 $x\to0$ 时，$\dfrac{1}{x}$、$\sin\dfrac{1}{x}$ 的极限都不存在. 显然，前者趋于无穷大，而后者在 $-1$ 与 1 之间波动. 对于前者，我们也常记为

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}=\infty \text{ 或 } \frac{1}{x}\to\infty \quad (x\to0).$$

在上述定义中，若自变量 $x$ 趋近于定点 $x_0$，仅限于 $x<x_0$（或 $x>x_0$），即从 $x_0$ 的左侧（或从 $x_0$ 的右侧）趋近于 $x_0$ 时，函数 $f(x)$ 趋近于一个常数 $A$，则 $A$ 就称为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限（或右极限），记为

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \text{ 或 } f(x_0^-)=A$$
$$\left(\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A \text{ 或 } f(x_0^+)=A\right).$$

显然，当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限存在的必要充分条件是左、右极限都存在并且相等.

**例 1-9** 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x+1 & x<0\\ 0 & x=0\\ x-1 & x>0\end{cases}$ 当 $x\to0$ 时的极限.

**解** 这是分段函数，$f(x)$ 在 $x=0$ 处的左、右极限分别为：

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(x+1)=1,$$
$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(x-1)=-1.$$

由于左极限不等于右极限，所以当 $x\to0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限不存在（图 1-4）.

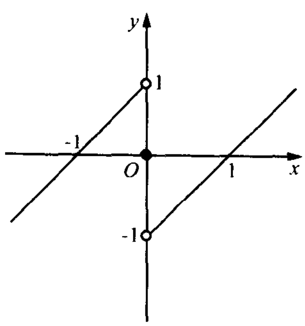

图 1-4

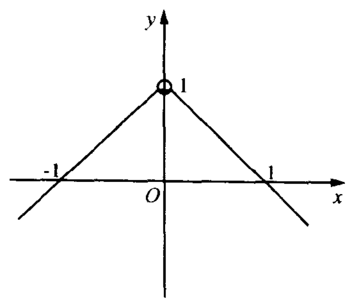

图 1-5



试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com