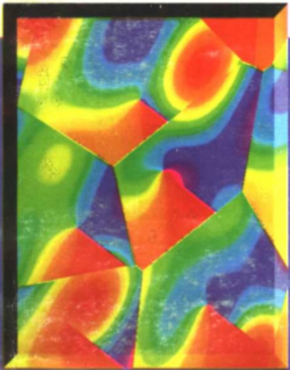
初中学生数学课外阅读系列

ZENYANG JIE BUDENGSHI



怎样解不等式

张福生 赵国礼 编著

上海教育出版社

初中学生数学课外阅读系列

怎样解不等式

张福生　赵国礼 编著

上海教育出版社

初中学生数学课外阅读系列　　怎样解不等式

张福生　赵国礼　编著　　上海教育出版社出版发行

（上海永福路123号）

各地新华书店经销　　上海市印刷三厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张 5　字数 105,000

1997年4月第1版　1998年7月第3次印刷

印数 9,541—14,560本

ISBN 7-5320-5332-6/G·5574　　定价：4.70元

序

在中学阶段，数学是很重要的课程，对于提高学生的文化素质，有极大的作用. 学生将来无论从事哪一种职业，都需要打好数学基础，有好的数学修养，更不必说从事理工科、经济管理方面的专门工作了.

怎样学好初中数学？课堂学习是最重要的一个环节，练习一定数量的习题也是完全必要的. 但是现在有一种倾向，认为题目做得越多越好，越难越好；又有一种倾向，认为课外再要请老师辅导，老师辅导得越多越好. 这样不仅造成学生课业负担过重，而且会影响学生智力的发展.

我认为要想学好数学(其他学科也如此)，培养自学能力和思考能力最为重要，即使在初中阶段，能使学生有自行阅读课外读物的能力是很重要的事，特别对那些学习较好的同学，尤其如此. 任课教师最好在提高课堂教学的同时，留一些时间让学生自学，启发学生思考，这样也就能进一步提高学生的兴趣和水平. 因此，好的课外读物就显得非常重要了.

上海教育出版社出版了《初中学生数学课外阅读系列》，内含 10 本小册子：《漫游勾股世界》、《绝对值》、《多项式的乘法和因式分解》、《怎样列方程解应用题》、《怎样解不等式》、《怎样用配方法解题》、《面积关系帮你解题》、《怎样添辅助线》、《根与系数的关系及其应用》、《反证法》. 这些专题是中学数学中极其重要的基本内容，并且是初等数学的基础. 这些专题有的注重于与横向知识的联系，以培养初中学生初步

运用知识解决问题的综合能力；有的适当介绍了知识的自身发展并注重于与后续内容的联系，以便让学生领略数学知识应用和作用，例如《面积关系帮你解题》，看来似乎只是讲几何的，其实却蕴含着许多三角、代数的内容．又如《根与系数的关系及其应用》，从二次方程的判别式和韦达定理出发，引出了许多几何和代数的问题，还包含了解析几何的思想．这套丛书还将趣味性寓于知识性之中，例如《漫游勾股世界》中，有许多有趣的故事和问题．总之，这是一套开拓学生视野，训练学生思维，为学生终身受益的一套课外读物．这套书由专家和有经验的教师所撰写，所以质量是有保证的，初中学生如果能够读懂其中的某些分册或某些部分，就会得到很多益处．

胡和生

于复旦大学数学所

1995.5.

前　言

同学们从孩提时代开始，当一点点地学会数一、二、三、四、……学会比较长短、高低、大小、多少、远近、轻重时，你有否意识到这是在接触不等关系？但你可能也朦胧地感觉到，对事物作比较时，完全一模一样的事物、完全相等的关系远远少于那些不相同的事物、不相等的关系．在学习数学时，你也许会思考这样的问题：不等关系那么普遍，为什么从小学到中学要研究那么多等量关系而很少研究不等量关系？

是的，不等量关系非常普遍，也非常重要，但是不等量关系比较复杂，等量关系比较单一，先研究等量和等式对学习比较有利．本书将告诉你，不等量关系的研究是以等量关系为基础的．一方面，解决不等量问题要以解决等量问题的知识为基础；另一方面，在解决问题的方法上，两者也有许多相似的地方，可以有所借鉴．

相等和不等关系，是指事物间的数量关系．抽象成数学语言，就是等式和不等式．学习不等式的知识，先要了解不等式的基本概念，掌握研究不等式的工具——一批有关的最基本的定理．然后，你将会知道，不等式的研究有两类问题：一是求使某个不等式成立的未知数的值，称为解不等式；二是研究怎样用充足的理由论证某个不等式一定成立或一定不成立，称为证明不等式．

本书只研究第一类问题，即研究怎样解不等式．而且，限于知识范围，只能研究一部分不等式即代数不等式的解法．

本书将在课本学习的基础上，帮助你进一步学习解不等式的知识和方法. 书中将较为详尽地介绍代数不等式的解法和原理，教给你一些很巧妙而有效的解不等式的通用方法和特殊方法，使你在解不等式方面掌握比别人更多的诀窍和本领.

本书在介绍解不等式的知识和方法的过程中，还充分体现了精要、严密、高效、实用等特点：

一是精要. 本书的内容经过了精心的选择，是解不等式所最有用的知识和方法. 而且，学习这些知识和方法，对学好整个数学有着很大的显性和潜在的作用.

二是严密. 本书特别重视数学语言的表达和数学关系的推演，力求从最少的几个数学事实出发，推演出一个个有用的性质和方法，使同学们养成"言必有据，算必讲理"的习惯. 本书还非常注意数学思想和数学方法的渗透，如类比、转化、分析、综合、换元、降次等，这是今后数学学习中到处有用的通性通法. 把这些学好了，将有力地提高同学们的基本数学素养和数学能力.

三是高效. 本书精选了足够数量的例题和习题，所有习题都配有答案，较难的题还有提示，以便于同学们自我学习、自我训练、自我反馈、自我提高，为达到高效学习创造条件.

四是实用. 本书很重视知识的实际应用，介绍了大量运用不等式的知识和方法解决数学中、生活中、生产中的问题的内容，以提高同学们分析问题、解决问题的能力.

我们相信，通过本书的学习，对原来数学学得一般的同学，可能会有豁然开朗的感觉，从而提高学习数学的兴趣，提高数学学习的水平；对原来数学学得很好的同学，也会感到处处有关要闯，有自己的用武之地，常会有"别有洞天"的感觉，

感受到数学思想和方法的精美，把数学学习的能力和水平提高到新的境界.

总之，本书不仅会帮助同学们进一步学好解不等式，还会对同学们学习能力的提高有很大的帮助；甚至对参加数学竞赛，也会有很好的作用.

本书原来的基础是一本教师读物，由于内容切合教学实际，处理通俗，很多同学喜欢阅读．这次受上海教育出版社的委托，将原书改编成主要适宜于初中学生阅读的课外读物，以满足广大学生的需要．其中有些内容比教学大纲的范围更广、要求更高，同学们可以有所选择，有区别地阅读．有的可以先“知其然”，掌握方法，用了再说，到高中时再“知其所以然”．本书对高中学生和中学数学教师，也是很好的参考读物.

本书全稿经过华东师范大学数学系邹一心先生认真审读，提出了许多宝贵意见，在此表示衷心感谢.

欢迎同学们和其他读者提出宝贵意见.

作　者

一九九五年四月

目　　录

一、不等式纵横谈

1. 常见的不等量关系

当你阅读本书之前，也许你对不等号和不等式早就有所接触．例如，在比较正数的大小时，曾见过 $5>3$，$3.1<3.14<3.2$，$\frac{5}{2}<3<\frac{10}{3}$ 等等．在学习有理数大小比较的时候，也见过 $1>-1$，$-21<-17<0$ 等等．在几何中，也常常用到不等量关系，例如，如果 C 是线段 AB 外一点，那么 $AB<AC+CB$；在三角形 ABC 内，$AB+BC>AC$，$AC+AB>BC$，$BC+AC>AB$；如果在 $\triangle ABC$ 内，$AB>BC$，那么 $\angle C>\angle A$ 等等．

而且，我们还知道，生活中比较两个量的时候，并不一定说成大于或小于，但归纳成数学问题，实际上都是不等量关系，总可以用不等式来表示．例如：上海东方明珠电视塔高 468 米，上海原电视塔高 211.55 米，我们说东方明珠电视塔比上海原电视塔高，比较它们高度的式子是 468 米$>$211.55 米；南浦大桥主桥跨度 423 米，杨浦大桥主桥跨度 602 米，我们说南浦大桥主桥跨度比杨浦大桥短，比较它们长度的式子是 423 米$<$602 米，等等．还有，日常说妈妈比爸爸矮、小李比小张体重轻、从学校到小王家比到小方家远、初二(2)班比初二(1)班人数多等等，它们间的数量关系也都是不等关系，也都能用不等式表示．

在数学中，直接用不等式表示数量关系的情况也不少．列举一些常见的如下：

(1) 表示数的界限．例如，

a 是两位正整数，b 是三位正整数，可表示为：

$$10\leqslant a\leqslant 99,\quad 100\leqslant b\leqslant 999.$$

一个可装 1000 克水的瓶子，它的容水量 Q，有关系式 $0\leqslant Q\leqslant 1000$(克)．

特别地，应用不等式可以表示近似数的误差界限(或说精确度范围)．例如：小李身高 h 的近似值为 1.62 米，可写成 $h\approx 1.62$ 米或 $h=1.62$ 米(± 0.005)，用不等式表示为

$$1.615\text{ 米}\leqslant h\leqslant 1.625\text{ 米}.$$

(2) 排列数的大小．给出一群数，可以把它们按从小到大或从大到小的顺序排列起来．例如，

$$-5<-4.9<-2.5<-1.3<0<1.8<2.3;$$

$$3.14159<3.1416<3.142<3.15<3.2;$$

$$\frac{9}{10}>\frac{8}{9}>\frac{7}{8}>\frac{6}{7}>\frac{5}{6}>\frac{4}{5}>\frac{3}{4}>\frac{2}{3}>\frac{1}{2}.$$

(3) 表示数的正、负．例如，

$a>0$，表示 a 是正数；

$a<0$，表示 a 是负数；

$a\leqslant 0$，表示 a 不是正数(非正数)；

$a\geqslant 0$，表示 a 不是负数(非负数)．

以上有关不等式的应用，都只是零星的、简单的．下一节我们将从数学的意义上，对不等式的概念和性质作较系统的整理和较为全面的介绍．

练习一(1)

1. 根据下列条件列出不等式:

(1) x 的 5 倍加上 2 大于 2;

(2) a 的一半减去 2 小于 -2;

(3) x 的 $\frac{3}{4}$ 减去 3 为负数;

(4) b 的 4% 加 7 为非负数;

(5) 9 减去 y 的差不小于 -6;

(6) c 与 4 的和不大于 -6;

(7) 2 除以 x 的商至多是 5;

(8) 3 与 a 的积加上 2 至少是 5;

(9) a 与 b 的平方差为非负;

(10) 1 与 x 的立方和为非正.

2. 用不等号把下列各组数从小到大排列起来:

(1) $1.41,\ -3.1,\ -1.33,\ -\frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ -\frac{6}{5}$;

(2) $0.3,\ \frac{1}{3},\ -4.7,\ -\frac{24}{5},\ 0,\ \frac{1}{4}$.

3. 设 $A=\sin 60^\circ$, $B=\sin 45^\circ$, $C=\cos 90^\circ$, $D=\cos 60^\circ$, 试比较它们的大小.

2. 不等式的语言及其由来

(1) 不等号和不等式

在初中数学教材中,我们知道不等式的定义是:用不等号连结两个代数式所成的式子,叫做不等式.这是一种用描述性语言给出的不等式定义.

不等号，记作“$>$”和“$<$”，“$\geqslant$”和“$\leqslant$”，分别读做“大于”和“小于”，“大于、等于”和“小于、等于”. 符号“$\geqslant$”和“$\leqslant$”，也可读做“不小于”和“不大于”，它们同符号“$\nless$”和“$\ngtr$”是等同的. 1978 年某省数学竞赛试题中，曾有这样一个问题：“$1\leqslant 2$，$3\leqslant 3$ 对不对？”答案都是“对的”，但很多学生搞错了. 说明他们对这些符号的意义没有全面的理解. 必须明确：$a>b$、$a<b$、$a\geqslant b$、$a\leqslant b$ 都叫做不等式，而且它们之间的关系可以用这样的语言表达：“不等式 $a>b$ 成立”，就是“不等式 $a\leqslant b$ 不成立”；反之，“不等式 $a>b$ 不成立”，就是“不等式 $a\leqslant b$ 成立”.

在研究不等式的时候，为了讨论方便、叙述简明，还常常用到下面一些术语：

在不等式 $a>b$ 或 $a<b$ 中，a 叫做不等式的左边，b 叫做不等式的右边.

形式是 $a>b$ 和 $c>d$ 的两个不等式，或者形式是 $a<b$ 和 $c<d$ 的两个不等式，叫做同向不等式.

形式是 $a>b$ 和 $c<d$ 的两个不等式，或者形式是 $a<b$ 和 $c>d$ 的两个不等式，叫做异向不等式.

“$>$”和“$<$”互称相反方向的符号. 所谓不等号改变方向，就是变为和它相反方向的符号.

为了区别不含等号和含有等号的不等式，把用“$>$”或“$<$”号连结的不等式叫做严格不等式；用“$\geqslant$”或“$\leqslant$”号连结的不等式叫做非严格不等式. 有了这样的区分，以后对某些不等式的解可以讨论得全面一些.

不等号“$>$”或“$<$”（“$\geqslant$”或“$\leqslant$”），在实际使用中有两种含义：一是表示某种命题，如“$(a-b)^2\geqslant 0$”；二是表示问题，如“当 x 取何值时，有 $x^2-4x-12>0$ 成立？”但是，不等式的

描述性定义，只是确定了某种数学事实，并没有说明不等号在不等式中用来表示什么，就是说，它没有说明不等式在什么范围内可以成立.

通常根据不等式对于其字母成立的范围，分为绝对不等式、条件不等式和矛盾不等式三种：

如果不论用什么数值代替不等式中的字母，它都能成立，这样的不等式叫做绝对不等式，如

$$(x+2)(x-6)<(x-5)(x+1),$$
$$a+1>a-1$$

等是绝对不等式.

如果只能用某些范围内的数值代替不等式中的字母，它才能成立，这样的不等式叫做条件不等式，如

$$(x+2)(x-6)<(x-5)(x+3),$$
$$(a-1)^2<a^2+1$$

等是条件不等式.

如果不论用什么数值代替不等式中的字母，它都不能成立，这样的不等式就叫做矛盾不等式，如

$$x^2+1<0,$$
$$a+b<2\sqrt{ab}$$

等是矛盾不等式.

需要注意的是，两边都不含有字母而能够成立的不等式，也是绝对不等式，如

$$6>2,\quad -6<-2$$

等，都是绝对不等式；两边都不含有字母而不成立的不等式，也是矛盾不等式，如

$$6<2,\quad -6>-2$$

等，都是矛盾不等式.

在学习了函数之后，如果将代数式看作是所含字母的函数解析表达式，不等式的定义可以从函数角度给出：

不等式 $f(x)>\varphi(x)$，表示函数 $f(x)$ 的值大于函数 $\varphi(x)$ 的对应值．解这个不等式就是求自变量的可取值范围中，使函数 $f(x)$ 的值大于函数 $\varphi(x)$ 的对应值的数值范围．

一般地表示为

$$f_1(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m)>f_2(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m),$$

或
$$f_1(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m)<f_2(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m).$$

这里，x_1，x_2，…，x_m 表示式中有 m 个不同的未知数；f_1、f_2 表示关于 x_1、x_2、…、x_m 的不同的关系式．

不等式，可根据不等式中函数的分类来分类．当 f_1、f_2 是整代数函数时，含有一个未知数且未知数的幂为一次的不等式，是一元一次不等式；含有一个未知数且未知数的幂的最高次数为二次的不等式，是一元二次不等式；……含有一个未知数且未知数的幂的最高次数为 n 次的不等式，是一元 n 次不等式；含有两个未知数且未知数项的最高次数为一次的不等式，是二元一次不等式；……含有 m 个未知数且未知数项的最高次数为 n 次的不等式，是 m 元 n 次不等式．

这里，必须注意"整代数函数"（即函数解析式是整式——多项式）这个条件．凡是谈到不等式的次数，这个不等式左右两边都必须是整式，而且都是指化简后说的．例如，不等式

$$\frac{x^2+1}{2}-\frac{3+2x^2}{4}<\frac{1-x}{2}+x$$

和
$$x^2-3x+1>6-4x+x^2,$$

都不是一元二次不等式，而是一元一次不等式．

（2）不等式符号的演变

了解一下不等式符号的演变，是很有意思的．

不等式的符号，曾经经历了一个相当长的演变过程．据有人考证，古代希腊和阿拉伯的数学家，已经研究了“等于”、“大于”和“小于”的概念，但就像他们不用简略的符号来表示加减乘除运算一样，他们对“等于”和“大于”、“小于”的概念，也不用任何特别的符号．到了15世纪、16世纪，一些数学著作才开始用单词来表示两个量的相等和不等．例如，在有些公式中，写着aequ或aequalis或aequaliter（拉丁字的“相等”、“等于”）．大约在16世纪，英国御医烈柯尔德(Rebert Record, 1510～1558)的代数著作中，出现了“相等”的象征记号“=”，作者说：“为了避免枯燥地重复is aequalleto这个词，也就是等于，如像我经常在自己的工作中实际用到的那样，我就放上两条平行线——同样长=的一对双生子，因为任何两件东西，不可能比它们更相等．”但是，这个相等的记号没有立刻普遍被采用．大约二十年后，克西兰杰尔教授(1532～1574)还用过‖这个符号来表示相等．关于不等式，在法国数学家日腊尔的代数教程(1629)里，开始采用了下列的象征记号：

Aff$B$，相当于现在的$A>B$；

B§ A，相当于现在的$B<A$．

这位作者死后10年，在1631年出版的英国人戈里奥塔(Thomas Harriot, 1560～1621)的著作里，第一次出现了今天的不等符号（$>$，$<$），但这些符号$=$、$>$、$<$都没有立刻被普遍采用．在1631年，奥乌烈德(William Oughtred, 1574～1660)的著作里，相等用=来表示，而大于和小于却用符号⊐和⊏来表示．笛卡儿(René Descartes, 1596～1650)在他著名的于1637年用法文出版的«几何学»里，还用∞来表示相等．而另一位法国数学家厄里贡(Pierre Herigone)在他的