考研数学真题与典型题详解系列

新派克 XIN PAI KE

概率论与数理统计

（经济类）

考研真题与典型题详解

金圣才 主编

概率论与数理统计

汇总众多高校考研专业课真题，并进行详细解答！

精选名校题库、讲义和笔记，汇集专业典型试题！

题量充足，来源广泛，突出热点，参考答案详尽！

中国石化出版社

考研数学真题与典型题详解系列

概率论与数理统计(经济类)

考研真题与典型题详解

金重才 主编

中国石化出版社

内 容 提 要

本书是一本考研数学(经济类)真题与典型题详解的复习资料，是根据最新硕士研究生入学考试经济类数学大纲，参考并整理了众多概率论与数理统计的题库和相关资料精编而成。全书共分8章，每章包括4个部分，第1部分是考试内容及要求，第2部分是重要公式、性质及结论，第3部分是历年考研真题详解，第4部分是典型题详解。

本书特别适用于在硕士研究生入学考试中参加数学(三)或数学(四)科目的考生，也适用于各大院校学习概率论与数理统计的师生参考，对于参加职称考试、自考及其他相关专业人员来说，也是学习概率论与数理统计的一本不可多得的复习资料。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计(经济类)考研真题与典型题详解/金圣才主编 .
—北京:中国石化出版社,2005
(考研数学真题与典型题详解系列)
ISBN 7-80164-805-6

Ⅰ.概… Ⅱ.金… Ⅲ.①概率论-研究生-入学考试-解题
②数理统计-研究生-入学考试-解题
Ⅳ.O21-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 040017 号

中国石化出版社出版发行
地址:北京市东城区安定门外大街 58 号
邮编:100011 电话:(010)84271850
读者服务部电话:(010)84289974
http://www.sinopec-press.com
E-mail:press@sinopec.com.cn
北京精美实华图文制作中心排版
北京大地印刷厂印刷
新华书店北京发行所经销
*
787×1092 毫米 16 开本 27.75 印张 709 千字
2005 年 5 月第 1 版 2005 年 5 月第 1 次印刷
定价:46.80 元
(购买时请认明封面防伪标识)

编 委 会

主　编： 金圣才

编　委： 段　浩　朱才斌　潘丽繁　杨艳明
钱　忠　段辛雷　尹　玲　张文娟
徐　芳　张成广　胡三木　皮文杰
严　税　查　猛　成冬梅　蔡　晔
方小慧　陆　杰　黄　帆　舒　玲
吴利平　李　达　车世纪　黄文静

前 言

本书根据最新硕士研究生入学考试数学大纲，参考并整理了众多数学资料精编而成。全书共分 8 章，每章包括 4 部分，第 1 部分是考试内容及要求，第 2 部分是重要公式、性质及结论，第 3 部分是历年考研真题详解，第 4 部分是典型题详解。

本书具有如下特点：

(1) 题量较大，来源广泛。主要选自 200 多本数学复习资料(含 10 年来考研真题)、名校题库以及众多教材和相关资料，经编著而成。可以说本书的试题都经过了精心挑选，博选众书，取长补短。

(2) 解答详细，突出重难点。对每一道题，包括选择题和填空题，都进行了详细的解答。有些试题提供了多种解题方法，便于读者进一步理解。

(3) 难点归纳，理论知识和考试要点归纳有特色。有些试题的结论在一般教材上并没有作为定理或结论，但在考研中却可以直接使用，这些内容本书都进行了总结和分析。

需要特别说明的是：

本书的每道题都是一道典型的例题，读者如果把本书的每一道题认真地看懂、研读，相信在考研中一定能够取得很好的成绩！

本书特别适用于硕士研究生入学考试中数学科目的考生，也适用于各大院校学习数学的师生参考，对于参加职称考试、自考及其他相关专业人员来说，也是学习数学的一本不可多得的复习资料。

由于题量较大，解答详细，错误、遗漏不可避免，诚请读者指正，不妥之处和建议可与编者联系，不甚感激。

为了帮助读者更好地学习数学等各门课程，圣才考研网开设了数学等公共课和专业课的论坛及专栏，还提供各个高校最新考研专业真题、各专业试题库、笔记、讲义及大量专业课复习资料。

限于篇幅，有些试题和资料未能在本书收录，如有建议或需试卷，请登录网站：

圣才考研网 www.100exam.com

金圣才

目　录

第1章　随机事件和概率

1.1　考试内容及要求

考试内容

随机事件与样本空间　事件的关系与运算　完备事件组　概率的概念　概率的基本性质　古典型概率　几何型概率　条件概率　概率的基本公式　事件的独立性　独立重复试验

考试要求

1. 了解样本空间(基本事件空间)的概念，理解随机事件的概念，掌握事件的关系及运算。

2. 理解概率、条件概率的概念，掌握概率的基本性质，会计算古典型概率和几何型概率，掌握概率的加法法则、减法法则、乘法法则、全概率公式以及贝叶斯公式等。

3. 理解事件的独立性的概念，掌握用事件独立性进行概率计算；理解独立重复试验的概念，掌握计算有关事件概率的方法。

1.2　重要公式、性质及结论

1. 概率的加法法则

(1) 设事件 A 与事件 B 互不相容，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

推论1　若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，则有

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

推论2　设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为一完备事件组，则有

$$P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)=1$$

于是，有以下重要公式

$$P(A)=1-P(\overline{A})$$

推论3　$P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$

若 $A\supset B$，则　$P(A-B)=P(A)-P(B)$

推论4　由对偶律可知

$$P(AB)=1-P(\overline{A}+\overline{B})$$

$$P(A+B)=1-P(\overline{A}\,\overline{B})$$

推论5　由于 $A=AB+A\overline{B}(B=AB+\overline{A}B)$，且 AB 与 $A\overline{B}(AB$ 与 $\overline{A}B)$互不相容，所以

$$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$$

$$P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)$$

(2) 设 A，B 为任意两个事件，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

推论6　设 A，B，C 为任意三个事件，则

$$P(A+B+C)=P(A)+B(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

2. 事件的条件概率

条件概率：设 A，B 为同一试验中的两个随机事件，且 $P(B)>0$，在事件 B 已发生的

条件下，事件 A 发生的概率，称为事件 A 的条件概率，记作 $P(A|B)$。条件概率的性质：

(1) $0\leqslant P(A|B)\leqslant 1$；

(2) $P(\overline{A}|B)+P(A|B)=1$；

(3) $P(A+B|C)=P(A|C)+P(B|C)-P(AB|C)$，$P(C)>0$。

注意，$P(A)$，$P(AB)$，$P(A|B)$都是事件 A 发生的概率，只是 $P(A)$为 A 的无条件概率，$P(AB)$为 A 与 B 同时发生的概率，$P(A|B)$为在 B 发生条件下 A 的条件概率。

3. 事件的独立性

设 A，B 是同一试验的两个事件，且满足

$$P(A|B)=P(A),\ P(B)>0$$

或

$$P(B|A)=P(B),\ P(A)>0$$

则称 A 与 B 为相互独立的事件。

若四对随机事件 A 与 B，$\overline{A}$ 与 B，A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 中有一对是相互独立的，则其余三对也相互独立。

设 A，B 为两个正概事件，若 A 与 B 互不相容，则 A 与 B 必不相互独立；若 A 与 B 相互独立，则 A 与 B 必相容。

若事件 A，B，C 两两相互独立，且

$$P(ABC)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$$

则称三事件 A，B，C 相互独立。

4. 事件概率的乘法法则

(1) 设事件 A 与 B 相互独立，则有

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$$

推论　若事件 A_1，A_2，…，A_n 相互独立，则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

(2) 设 A，B 为任意两个事件，则有

$$P(AB)=P(B)\cdot P(A|B),P(B)>0$$

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B|A),P(A)>0$$

设 A，B，C 为任意三个随机事件，则有

$$P(ABC)=P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|AB),P(A),P(AB)>0$$

5. 事件概率的性质

由古典概率和几何概率的计算公式，可得概率的基本性质：

(1) 非负性　$P(A)\geqslant 0$

(2) 规范性　$P(\Omega)=1$

(3) 有限可加性

若事件 A_1，A_2，…，A_n 两两互不相容，

则

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

6. 概率计算的三个重要公式

全概率公式：设 A_1，A_2，…，A_n 为一完备事件组，且 $P(A_i)>0(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，仅当 A_1，A_2，…，A_n 中任一事件发生时，事件 B 才可能发生，则有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\cdot P(B|A_i)$$

贝叶斯公式：在上述条件下，事件 B 发生的条件下，事件 A_i 的条件概率为

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_iB)}{P(B)},P(B)>0$$
$$=\frac{P(A_i)\cdot P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^{n}P(A_k)\cdot P(B|A_k)},i=1,2,\cdots,n$$

独立试验序列(贝努里概型)：做 n 次独立重复试验，在每一次试验中事件 A 发生的概率均为 $p(0<p<1)$，则 n 次试验事件 A 发生 $m(0\leqslant m\leqslant n)$次的概率 $P_n(m)$可由下面的贝努里公式求得

$$P_n^{(m)}=C_n^mP^m(1-p)^{n-m}$$
$$=\frac{n!}{m!(n-m)!}p^m(1-p)^{n-m},m=0,1,\cdots,n$$

1.3 历年考研真题详解

1.3.1 填空题

1.(1993 数四)设 10 件产品中有 4 件不合格品，从中任取两件，已知所取两件产品中有一件是不合格品，则另一件也是不合格品的概率为______。

【分析】 "已知所取两件产品中有一件是不合格品"应理解为"所取两件产品中至少有一件是不合格品"。

解： 以 A 表示事件{从 10 件产品中任取两件，两件都是不合格品}，以 B 表示事件{从 10 件产品中任取两件，至少有一件是不合格品}，则所求的概率为 $P(A|B)$。

而 $P(A)=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{15}$，$P(B)=1-\frac{C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{3}$

显然 $A\subset B$，故 $P(AB)=P(A)=\frac{2}{15}$，由条件概率的计算公式知

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{5}$$

2.(1992 数四)设对于事件 A、B、C，有 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=\frac{1}{8}$，则 A、B、C 三个事件中至少出现一个的概率为______。

【分析】 先由 $0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0$，得 $P(ABC)=0$，再利用加法公式即可。

解： 由题设 $P(AB)=P(BC)=0$，又 $ABC\subset AB$，于是 $0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0$，即有 $P(ABC)=0$。

从而 A、B、C 三个事件中至少出现一个的概率为：

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{8}-0+0=\frac{5}{8}$$

3.(1998 数四)设一次试验成功的概率为 p，进行 100 次独立重复试验，当 $p=$____时，

成功次数的标准差的值最大，其最大值为 = ____。

【分析】 若设 X 表示100次独立重复试验成功的次数，则 $X \sim B(100, p)$，即可求 X 的标准差及其最大值。

解： 设 X 表示100次独立重复试验成功的次数，则 X 服从二项分布 $B(100, p)$，均值 $E(X)=100p$，标准差 $\sqrt{D(X)}=\sqrt{100p(1-p)}$。由于 $D(X)$ 与 $\sqrt{D(X)}$ 同时具有最大值，而 $D(X)=100p(1-p)$ 显然在 $p=\frac{1}{2}$ 时，取最大值。故 $p=\frac{1}{2}$ 时，$\sqrt{D(X)}$ 最大，且最大值为5。

【评注】 本题的关键是假设表示100次独立重复试验成功次数的随机变量 X，并得到其分布。同时本题较好地将概率问题与极值问题综合起来。

4.(1992，经济)将C、C、E、E、I、N、S等七个字母随机地排成一行，那么，恰好排成英文单词SCIENCE的概率为____。

【分析】 按古典概型问题求出基本事件总数与有利的基本事件数即可。

解： 这是一个古典概型问题，将七个字母C，C，E，E，I，N，S任一种可能排列作为基本事件，则全部基本事件数为7!，而有利的基本事件数为 $1\times2\times1\times2\times1\times1\times1=4$。故所求的概率为 $\frac{4}{7!}=\frac{1}{1260}$。

5.(1997数四)设 A，B 是任意两个随机事件，则 $P\{(\overline{A}+B)(A+B)(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B})\}=$ ____。

【分析】 利用随机事件的运算性质即可求解。

解： 由于

$(\overline{A}+B)(A+B)=\overline{A}A+\overline{A}B+AB+B=B$，$(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B})=\overline{B}$，从而 $P\{(\overline{A}+B)(A+B)(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B})\}=P\{B\overline{B}\}=P(\varnothing)=0$。

6.(1991数四)设 A、B 为随机事件，$P(A)=0.7$，$P(A-B)=0.3$，则 $P(\overline{AB})=$ ____。

【分析】 利用随机事件概率的性质。

解： 由题设 $P(A)=0.7$，$P(A\overline{B})=0.3$，利用公式

$$A\overline{B}+AB=A$$

知 $P(AB)=P(A)-P(A\overline{B})=0.7-0.3=0.4$

故 $P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.4=0.6$

【评注】 公式 $A\overline{B}+AB=A$ 或 $AB+\overline{A}B=B$ 经常用到，应该重点记忆。

7.(1994数四)假设一批产品中一、二、三等品各占60%、30%、10%，从中随意取出一件，结果不是三等品，则取到的是一等品的概率为____。

【分析】 利用条件概率计算公式即可。

解： 设 A_1、A_3 分别表示取得的是一等品和三等品的事件，则

$$P(A_1)=0.6, P(A_3)=0.1$$

根据条件概率公式

$$P(A_1|\overline{A}_3)=\frac{P(A_1\overline{A}_3)}{P(\overline{A}_3)}=\frac{P(A_1)}{1-P(A_3)}=\frac{0.6}{0.9}=\frac{2}{3}$$

8.(1996数四)一实习生用同一台机器接连独立地制造3个同种零件，第 i 个零件是不合格品的概率 $p_i=\frac{1}{i+1}(i=1, 2, 3)$，以 X 表示3个零件中合格品的个数，则 $P\{X=2\}=$ ____。

【分析】 若以 A_i 表示第 i 个零件是合格品，则事件 $\{X=2\}$ 可用事件 A_i 来表示。

解：若以 A_i 表示第 i 个零件是合格品，则

$$P\{X=2\}=P(A_1A_2\overline{A}_3)+P(A_1\overline{A}_2A_3)+P(\overline{A}_1A_2A_3)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{11}{24}$$

1.3.2 选择题

1.(1996 数三)已知 $0<P(B)<1$ 且 $P[(A_1+A_2)|B]=P(A_1|B)+P(A_2|B)$，则下列选项成立的是(　　)。

(A) $P[(A_1+A_2)|\overline{B}]=P(A_1|\overline{B})+P(A_2|\overline{B})$

(B) $P(A_1B+A_2B)=P(A_1B)+P(A_2B)$

(C) $P(A_1+A_2)=P(A_1|B)+P(A_2|B)$

(D) $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$

【答】 应选(B)。

【分析】 利用条件概率的定义立即可得正确答案。

解：由题设知：

$$\frac{P(A_1B+A_2B)}{P(B)}=\frac{P(A_1B)}{P(B)}+\frac{P(A_2B)}{P(B)}$$

因 $P(B)>0$，故

$$P(A_1B+A_2B)=P(A_1B)+P(A_2B)$$

【评注】 本题也可由条件概率的性质来求解。

由于 $P[(A_1+A_2)|B]=P(A_1|B)+P(A_2|B)-P(A_1A_2|B)$，于是由已知条件可得 $P(A_1A_2|B)=0$，即 $P(A_1A_2B)=0$，故 $P(A_1B+A_2B)=P(A_1B)+P(A_2B)-P(A_1A_2B)=P(A_1B)+P(A_2B)$，即选(B)。

2.(1991 数三)设 A 和 B 是任意两个概率不为零的不相容事件，则下列结论中肯定正确的是(　　)。

(A) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 不相容　　(B) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相容

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$　　(D) $P(A-B)=P(A)$

【答】 应选(D)。

【分析】 由 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$ 即可得(D)正确。

解：据题设 A 和 B 是任意两个不相容事件，$AB=\varnothing$，从而 $P(AB)=0$。

利用公式 $A\overline{B}+AB=A$，知

$$P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=P(A)$$

所以(D)为正确答案。

【评注】 由于 $P(A)\neq 0$，$P(B)\neq 0$，(C)项不可能成立，值得注意的是(A)、(B)两项，有人认为(A)与(B)是对立的，从而总有一个是正确的。实际上，若 $AB=\varnothing$，$A\cup B\neq\Omega$ 时，(A)不成立；$AB=\varnothing$，且 $A\cup B=\Omega$ 时，(B)项不成立。

3.(2003 数四)对于任意二事件 A 和 B，(　　)。

(A) 若 $AB\neq\varnothing$，则 A，B 一定独立

(B) 若 $AB\neq\varnothing$，则 A，B 有可能独立

(C) 若 $AB=\varnothing$，则 A，B 一定独立

(D) 若 $AB=\varnothing$，则 A，B 一定不独立

【答】 应选(B)。

【分析】 本题考查独立与互斥事件之间的关系，事实上，独立与互斥事件之间没有必然的互推关系。

解： $AB\neq\varnothing$ 推不出 $P(AB)=P(A)P(B)$，因此推不出 A，B 一定独立，排除(A)；若 $AB=\varnothing$，则 $P(AB)=0$，但 $P(A)P(B)$是否为零不确定，因此(C)，(D)也不成立，故正确选项为(B)。

【评注】 当 $P(A)>0$，$P(B)>0$ 时，若 A，B 相互独立，则一定有 $P(AB)=P(A)P(B)>0$，从而有 $AB\neq\varnothing$。可见，当 A，B 相互独立时，往往 A，B 并不是互斥的。

4.(1998 数四)设 A，B，C 是三个相互独立的随机事件，且 $0<P(C)<1$。则在下列给定的四对事件中不相互独立的是(　　)。

(A) $\overline{A+B}$与 C　　(B) $\overline{AC}$与 $\overline{C}$

(C) $\overline{A-B}$与 $\overline{C}$　　(D) $\overline{AB}$与 $\overline{C}$

【答】 应选(B)。

【分析】 由多个事件相互独立的性质，即可得到(A)、(C)、(D)中的每对事件都是相互独立的，利用排除法，(B)选项正确。

解： 由于 A，B，C 是三个相互独立的随机事件，故其中任意两个事件的和、差、交、并、逆与另一个事件或其逆是相互独立的，根据这一性质(A)、(C)、(D)三项中的两事件是相互独立的，因而均为干扰项，只有选项 B 正确。

5.(2001 数四)对于任意二事件 A 和 B，与 $A\cup B=B$ 不等价的是(　　)。

(A) $A\subset B$　　(B) $\overline{B}\subset\overline{A}$

(C) $A\overline{B}=\varnothing$　　(D) $\overline{A}B=\varnothing$

【答】 应选(D)。

【分析】 本题考查对随机事件的概念和运算性质的理解，为了便于分析，可以画图进行说明。

解： 因为 $A\cup B=B\Leftrightarrow A\subset B\Leftrightarrow\overline{B}\subset\overline{A}\Leftrightarrow A\overline{B}=\varnothing$，所以正确选项为(D)。

【评注】 对于随机事件的运算不很熟悉的考生，也可考虑用举例说明的方法找到正确答案。比如，考虑样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{1\}$，$B=\{1,2\}$，满足 $A\cup B=B$，则有 $A\subset B$，$\overline{B}\subset\overline{A}$，$A\overline{B}=\varnothing$ 均成立，但 $\overline{A}B=\{2\}\neq\varnothing$，因此与 $A\cup B=B$ 不等价的肯定为(D)。当然这只是一种解题技巧，并不是真正的证明。

6.(1992 数三)设当事件 A 与 B 同时发生时，事件 C 必发生，则(　　)。

(A) $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$　　(B) $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$

(C) $P(C)=P(AB)$　　(D) $P(C)=P(A\cup B)$

【答】 应选(B)。

【分析】 由已知可得 $AB\subset C$ 及 $P(AB)\leqslant P(C)$，再由 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A+B)\geqslant P(A)+P(B)-1$ 即可得(B)为正确选项。

解： 由题设 $AB\subset C$ 且 $P(AB)\leqslant P(C)$。

又由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)\leqslant 1$

知　$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\geqslant P(A)+P(B)-1$，即　$P(C)\geqslant P(AB)\geqslant P(A)+P(B)-1$。

7.(2000 数三)在电炉上安装了 4 个温控器，其显示温度的误差是随机的。在使用过程中，只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0，电炉就断电。以 E 表示事件“电炉断电”，而 $T_{(1)}\leqslant T_{(2)}\leqslant T_{(3)}\leqslant T_{(4)}$为 4 个温控器显示的按递增顺序排列温度值，则事件 E 等于(　　)。

(A) $\{T_{(1)}\geqslant t_0\}$　　(B) $\{t_{(2)}\geqslant t_0\}$

(C) $\{T_{(3)}\geqslant t_0\}$　　(D) $\{T_{(4)}\geqslant t_0\}$

【答】 应选(C)。

【分析】 本题考查随机事件的表示问题。注意“电炉断电”相当于至少有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0，也就是说，两个或两个以上的温控器显示的温度不低于临界温度 t_0 都在“电炉断电”这个事件所描述的范围之内。

解：“电炉断电”这一事件 E 发生，意味着四个温控器至少有两个显示的温度值大于或等于 t_0，即若将 4 个温控器上的值 $T_{(1)}$，$T_{(2)}$，$T_{(3)}$，$T_{(4)}$从小到大排序的话，排在第 3 的温度值一定大于或等于 t_0，即有$\{T_{(3)}\geqslant t_0\}$，故正确选项为(C)。

8.(1994 数三)设 $0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，$P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$，则(　　)。

(A) 事件 A 和 B 互不相容　　(B) 事件 A 和 B 互相对立

(C) 事件 A 和 B 互不独立　　(D) 事件 A 和 B 相互独立

【答】 应选(D)。

【分析】 利用事件独立的充要条件来判定。

解：将条件概率公式 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$以及 $P(\overline{B})=1-P(B)$代入 $P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$ 中，推得 $P(AB)=P(A)P(B)$，因而事件 A 和 B 相互独立。

【评注】 $P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1\Leftrightarrow P(A|B)=1-P(\overline{A}|\overline{B})=P(A|\overline{B})\Leftrightarrow A$、$B$ 相互独立。

9.(1993 数三)假设事件 A 和 B 满足 $P(B|A)=1$，则(　　)。

(A) A 是必然事件　　(B) $P(B|\overline{A})=0$

(C) $A\supset B$　　(D) $P(A\overline{B})=0$

【答】 应选(D)。

【分析】 利用条件概率公式和差事件概率公式即可。

解：由 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=1$，可知 $P(AB)=P(A)$，从而有 $P(A-B)=0$，即 $P(A\overline{B})=0$。

【评注】 原题中选项(D)为 $A\subset B$，此时显然没有正确选项。故作者将(D)改为 $P(A\overline{B})=0$。

10.(1990 数三)设 A，B 为两随机事件，且 $B\subset A$，则下列式子正确的是(　　)。

(A) $P(A+B)=P(A)$　　(B) $P(AB)=P(A)$

(C) $P(B|A)=P(B)$　　(D) $P(B-A)=P(B)-P(A)$

【答】 应选(A)。

【分析】 由事件之间的关系即得。

解：由 $A\supset B$，得 $A+B=A$，因而 $P(A+B)=P(A)$。

【评注】 对随机事件 A，B，若 $B\subset A$，则有

(1) $A+B=A$；(2) $AB=B$；(3) $B-A=\varnothing$；(4) $\overline{A}\subset\overline{B}$

1.3.3 解答题

1.(1991 数四)在电源电压不超过 200 伏、在 200~240 伏和超过 240 伏三种情形下，某种电子元件损坏的概率分别为 0.1，0.001 和 0.2，假设电源电压 X 服从正态分布 $N(220, 25^2)$，试求：

(1) 该电子元件损坏的概率 α；

(2) 该电子元件损坏时，电源电压在 200~240 伏的概率 β。

附表：

x	0.10	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20	1.40
$\Phi(x)$	0.530	0.579	0.655	0.726	0.788	0.841	0.885	0.919

注：表中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数。

【分析】 利用全概公式与逆概公式即可。

解： 引进下列事件：$A_1=\{$电压不超过 200 伏$\}$，$A_2=\{$电压在 200~240 伏$\}$，$A_3=\{$电压超过 240 伏$\}$；$B=\{$电子元件损坏$\}$。

由条件，知 $X \sim N(220, 25^2)$，因此

$$P(A_1)=P\{X\leqslant 200\}=P\left\{\frac{X-220}{25}\leqslant\frac{200-220}{25}\right\}=\Phi(-0.8)=0.212$$

$$P(A_2)=P\{200\leqslant X\leqslant 240\}=\Phi(0.8)-\Phi(-0.8)=0.576$$

$$P(A_3)=P\{X>240\}=1-0.212-0.576=0.212$$

(1) 由题设条件知：

$$P(B|A_1)=0.1, P(B|A_2)=0.001, P(B|A_3)=0.2$$

于是，由全概率公式，有

$$\alpha=P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=0.0642$$

(2) 由条件概率定义(或贝叶斯公式)，知

$$\beta=P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}\approx 0.009$$

【评注】 若随机试验可以看成分两个阶段(或层次)进行，且第一阶段的各试验结果具体发生了哪一个未知。

(1) 如求第二阶段的结果发生的概率，一般用全概公式。

(2) 如第二阶段的某一个结果是已知的，要求此结果为第一阶段某一结果所引起的概率，一般用逆概公式。

另外，全概与逆概的应用的关键是选取完备事件组，它就是第一阶段的所有可能结果。

2.(1998 数三)设有来自三个地区的各 10 名、15 名和 25 名考生的报名表，其中女生的报名表分别为 3 份、7 份和 5 份。随机地取一个地区的报名表，从中先后抽出两份。

(1) 求先抽到的一份是女生表的概率 p；

(2) 已知后抽到的一份是男生表，求先抽到的一份是女生表的概率 q。

【分析】 本题考查全概率公式，关键是定义事件以及这些事件的概率和条件概率。

解： 设 $H_i=\{$报名表是第 i 区考生的$\}(i=1, 2, 3)$，$A_j=\{$第 j 次抽到的报名表是男生表$\}(j=1, 2)$，则 $P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\dfrac{1}{3}$，

$P(A_1|H_1)=\frac{7}{10}$，$P(A_1|H_2)=\frac{8}{15}$，$P(A_1|H_3)=\frac{20}{25}$

（1）由全概率公式得：

$$p=P(\overline{A_1})=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(\overline{A_1}|H_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}+\frac{7}{15}+\frac{5}{25}\right)=\frac{29}{90}$$

（2）由全概率公式得：

$$P(A_2|H_1)=\frac{7}{10},P(A_2|H_2)=\frac{8}{15},P(A_2|H_3)=\frac{20}{25}$$

$$P(\overline{A_1}A_2|H_1)=\frac{7}{30},P(\overline{A_1}A_2|H_2)=\frac{8}{30},P(\overline{A_1}A_2|H_3)=\frac{5}{30}$$

$$P(A_2)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)\cdot P(A_2|H_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{7}{10}+\frac{8}{15}+\frac{20}{25}\right)=\frac{61}{90}$$

$$P(\overline{A_1}A_2)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(\overline{A_1}A_2|H_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{7}{30}+\frac{8}{30}+\frac{5}{30}\right)=\frac{2}{9}$$

因此，$q=P(\overline{A_1}|A_2)=P(\overline{A_1}A_2)|P(A_2)=\dfrac{\frac{2}{9}}{\frac{61}{90}}=\dfrac{20}{61}$

【评注】 利用全概率公式求解的关键是弄清楚随机试验的结构，找出完备事件组，本题的完备事件组为 H_1，H_2，H_3。另外，由“抽签原理”可知 $P(A_2)=P(A_1)=1-P(\overline{A_1})=1-\frac{29}{90}=\frac{61}{90}$。

3.（2002 数四）设 A，B 是任意二事件，其中 A 的概率不等于 0 和 1，证明 $P(B|A)=P(B|\overline{A})$是事件 A 与 B 独立的充分必要条件。

【分析】 由于 A 的概率不等于 0 和 1，知题中两个条件概率都存在，再利用事件独立的定义与性质证明即可。

解：必要性。

由事件 A 与 B 独立，知事件 $\overline{A}$ 与 B 也独立，因此 $P(B|A)=P(B)$，$P(B|\overline{A})=P(B)$，从而 $P(B|A)=P(B|\overline{A})$。

充分性。

由 $P(B|A)=P(B|\overline{A})$，可见

$$\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$$

$$P(AB)[1-P(A)]=P(A)P(B)-P(A)P(AB)$$

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

因此 A 和 B 独立。

【评注】 一般地，下列四个条件中的任何一个都是事件 A 与 B 相互独立的充分必要条件：

① $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$；　② $P(B|A)=P(B)(P(A)>0)$；

③ $P(B|A)=P(B|\overline{A})(0<P(A)<1)$；　④ $P(B|A)+P(\overline{B}|\overline{A})=1(0<P(A)<1)$。

另外，概率为 1 或 0 的事件与任何事件相互独立。

4.（1991 数三）一汽车沿一街道行驶，需要通过三个均设有红绿信号灯的路口，每个信号灯为红或绿与其他信号灯为红或绿相互独立，且红绿两种信号显示的时间相等，以 X 表示

该汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数。求 X 的概率分布。

【分析】 X 的可能取值为0，1，2，3，如令 A_i 表示“汽车在第 i 个路口遇到红灯”($i=1$，2，3)，可见 A_1，A_2，A_3 相互独立，则 $P\{X=k\}(k=0, 1, 2, 3)$可用 A_1，A_2，A_3 的相关事件的概率来表示。

解：显然 X 服从离散型概率分布，而且 X 的可能取值为0，1，2，3。问题归结为求概率 $P\{X=i\}$，$i=0$，1，2，3。

由条件知，X 的可能取值为0，1，2，3。以 $A_i(i=1, 2, 3)$表示事件“汽车在第 i 个路口首次遇到红灯”；A_1，A_2，A_3 相互独立，且

$$P(A_i) = P(\overline{A_i}) = \frac{1}{2}, i = 1,2,3$$

对于 $k=0$，1，2，3，有

$$P\{X = 0\} = P(A_1) = \frac{1}{2}$$

$$P\{X = 1\} = P(\overline{A_1}A_2) = \frac{1}{2^2}$$

$$P\{X = 2\} = P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3) = \frac{1}{2^3}$$

$$P\{X = 3\} = P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}) = \frac{1}{2^3}$$

【评注】 本题的关键在于假设事件 A_1，A_2，A_3，并将 $P\{X=k\}(k=0, 1, 2, 3)$转化为 A_1，A_2，A_3 的相关事件的概率。其实，求随机变量的概率分布，其本质就是事件的概率，所以，应充分利用事件及其概率的性质及结论。

5.(1995 数三)假设一厂家生产的每台仪器，以概率0.70可以直接出厂；以概率0.30需进一步调试，经调试后以概率0.80可以出厂；以概率0.20定为不合格品不能出厂。现该厂新生产了 $n(n\geqslant 2)$台仪器(假设各台仪器的生产过程相互独立)。求：

(1) 全部能出厂的概率 α；

(2) 其中恰好有两件不能出厂的概率 β；

(3) 其中至少有两件不能出厂的概率 θ。

【分析】 本题的关键是先求出每台仪器能出厂的概率，然后利用独立重复试验概型求解即可。

解：对于新生产的每台仪器，引进事件：$A=\{$仪器需进一步调试$\}$，$B=\{$仪器能出厂$\}$，则 $\overline{A}=\{$仪器能直接出厂$\}$，$AB=\{$仪器经调试后能出厂$\}$。

由条件知，$B=\overline{A}+AB$，

$$P(A) = 0.30, P(B|A) = 0.80$$

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = 0.30 \times 0.80 = 0.24$$

$$P(B) = P(\overline{A}) + P(AB) = 0.70 + 0.24 = 0.94$$

设 X 为所生产的 n 台仪器中能出厂的台数，则 X 作为 n 次独立试验成功(仪器能出厂)的次数，服从参数为(n，0.94)的二项分布，因此

$$\alpha = P\{X = n\} = 0.94^n$$

$$\beta = P\{X = n - 2\} = C_n^2 \cdot 0.94^{n-2} \cdot 0.06^2$$

$$\theta = P\{X \leqslant n - 2\} = 1 - P\{X = n - 1\} - P\{X = n\}$$