

数学名著译丛

非线性及泛函分析

—— 数学分析中的非线性问题讲义

[美] M. S. 伯杰 著

罗亮生 林 鹏 译



科学出版社

www.sciencep.com

数学名著译丛

非线性及泛函分析

——数学分析中的非线性问题讲义

[美] M. S. 伯杰 著
罗亮生 林 鹏 译

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书系统地阐述了非线性泛函分析中的基本理论、方法、工具和结果,如隐函数定理、拓扑方法、变分方法、歧点理论等以及有着广泛应用的各种非线性算子。此外,还介绍了这门学科在经典的现代的数学物理中各种问题上的大量应用。本书内容全面、系统,可供大学数学系高年级学生、研究生、教师以及从事数学、数学物理和力学等工作的科技人员阅读参考。

Nonlinearity and Functional Analysis by M. Berger

Copyright © 1977 by Academic Press

Translation Copyright © 2005 by Science Press

All Right Reserved.

图字: 01-2000-4070 号

图书在版编目(CIP)数据

非线性及泛函分析: 数学分析中的非线性问题讲义/ (美) M. S. 伯杰著; 罗亮生, 林鹏译. —北京: 科学出版社, 2005
(数学名著译丛)

ISBN 7-03-011112-5

I. 非… II. ①伯…②罗…③林… III. 非线性-泛函分析
IV. O177.91

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 003357 号

责任编辑: 杨 波 陈玉琢/责任校对: 钟 洋

责任印制: 钱玉芬/封面设计: 王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

丽源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005年1月第一版 开本: 850×1168 1/32

2005年1月第一次印刷 印张: 18 5/8

印数: 1—3 000 字数: 482 000

定价: 56.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈环伟〉)

谨以此书纪念家父 A. 伯杰

译者的话

这本书内容丰富，涉及面广，包含了数学的诸多分支，并将它们与其他学科综合在一起，而这在一般的教材中并不多见。书后附有大量的参考文献，这有利于指导有兴趣的读者作更深一步的探究。

但是，原著印刷错误及写作时的笔误很多，符号使用也比较混乱，我们在翻译时已作了必要的修改与纠正。但由于这类问题数量多，故修改及纠正之处没有一一注明。尽管如此，译者还是尽可能地保留作者原有的风格，尽可能地忠实于原著。

此外，作者在引进新的符号时一般不加说明；在本书后面使用本书前面用到过的符号时往往不作交待；在有些定理的表述和证明时不够严密。但是，只要不很影响阅读，译者一般不作更改和说明，而将这些作为作者的写作特点予以保留。

在翻译这本书的过程中，对于数学术语，译者尽可能采用科学出版社 2002 年的新版《新英汉数学词汇》。极少数数学术语由于没有查到以前的译法，译者只得自创，但读者可以在书后所附的“汉英数学词汇对照”中查到原词汇。

翻译此书的过程中，译者得到了郑维德（即郑维行）教授、沈祖和教授、王声望教授的真诚帮助，在此谨向他们致以最诚挚的感谢！同时，科学出版社的编辑对于本书的翻译给予了很大的帮助并为此付出了许多心血，在此致以同样真诚的感谢！

由于译者水平有限，原著本身的错误未能一一更正在所难免；新的书写、排版错误谅必也会产生。我们诚请有关专家、读者批评指正，以便再版时更正。

罗亮生 林鹏

2004 年 10 月

记号与术语

Ω	N 维实 Euclid 空间 \mathbf{R}^N 中的开子集
\mathcal{M}^N	N 维光滑流形
$x = (x_1, \dots, x_N)$	\mathbf{R}^N 中点 x 的笛卡儿坐标
$D_j = \partial/\partial x_j$	作用在 Ω 上的函数的偏导算子
$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$	多重指标
$ \alpha $	$\sum_{i=1}^N \alpha_i$
D^α	$\prod_{i=1}^N D_i^{\alpha_i}$
$F(x, D^\beta u, D^m u)$	m 阶微分算子, 它显式地依赖于 m 阶的高阶初等微分算子 D^α , 其中 $ \beta < m$
X	函数的某线性向量空间
线性算子 F	对每个 $f, g \in X$ 和数 α, β , 都有 $F(\alpha f + \beta g) = \alpha F(f) + \beta F(g)$
非线性算子 F	一个不必是线性的算子
拟线性微分算子 $F(x, D^\beta f, D^m f)$	仅当看作 m 阶初等微分算子 $D^\alpha f$ 的函数时, F 是线性微分算子
定义在 Ω 上的微分方程	两个微分算子间的方程, 在 Ω 的每一点必成立
经典解	定义在 Ω 上的(充分光滑的)函数, 它在 Ω 的每一点都满足方程
$ x $	向量 $x \in \mathbf{R}^N$ 的长度

$\ u\ $	Banach 空间 X 的元素 u 的范数
绝对常数	用在不等式 $F(x) \leq cG(x)$ 中, 意指当 x 变化时 c 与 x 无关
半范	定义在 X 上的非负函数 g , 使 $g(ax)$ $= a g(x)$ 和 $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$

序 言

几十年来，数学的主要兴趣集中在与线性算子有关的问题上，以及将线性代数已知结果推广到无穷维情况。这极具远见灼识，而由此发展出来的丰富理论对整个数学科学都有深远的影响。在剔除线性这一假设条件时，有关的算子理论以及许多与这种理论有关的具体问题描绘出了数学研究的前景。迄今为止，在这方面已获得的基本结果构成了线性理论深刻而又完美的拓展。正如线性情况一样，这些结果源于数学分析中的具体问题，并与之密切相关。展现于此的这本讲义，其目的是系统地描述这些基本的非线性结果及其对各种来自数学分析不同领域的具体问题的应用。

此外，我在尽可能广泛的意义上使用“数学分析”这一术语，而这个用法遵循着 Henri Poincaré（我们这个学科的伟大先驱之一）的思想。事实上，仔细审视自然出现在实和复流形微分几何、经典的和现代的数学物理以及变分学的研究中特定的非线性问题，就能发现必然会导致深刻数学结果的那些反复出现的模型。

从抽象观点出发，主要有两种手段处理该课题。如上所述，第一种手段是将 Fredholm, Hilbert, Riesz, Banach 和 von Neumann 等人线性泛函分析的特定结果推广到更一般的非线性情况。第二种手段是视该学科为流形及流形间映射的无穷维微分几何学。显然，这些手段密切相关，而当它们与现代拓扑结合在一起使用时，就成了强有力的数学思维模式。

最后，在上述两种手段之外，还存在着真正适合既是非线性的又是无穷维的现象。能认清这些事实的那个框架仍在发展中。

本书的内容分为三个部分来讲述，而每一部分均含两章。第

一部分首先涉及到研究的动因和理解本书后面展开的内容所必需的数学预备知识，其后提供非线性算子基本的微积分内容并对其进行分类。第二部分涉及到局部分析。在第三章，我们讨论经典反函数定理和隐函数定理的各种无穷维推广。同时，为了研究算子方程，也讨论了 Newton 法，最速下降法和强函数法。第四章，我们将注意力转向与分歧和奇异扰动问题有关的那些依赖于参数的扰动现象。这一章中，拓扑（“超越”）方法的应用是它首次成功的亮相。这本书的第三部分和最后部分讲述了大范围分析，并指出了将具体分析与超越方法相结合的必要性。第五章发展了可用于一般算子类的全局性方法，特别是讨论了映射度的各种理论和应用及其与球面高阶同伦群有关的最新进展，还讨论了线性化方法和投影法。第六章讲述大范围变分学及其在现代临界点理论中的最新进展，这个材料很自然地来自与临界点有关的极小化问题和等周问题。

本书的一个主要课题是将得到的抽象结果用于解决几何与物理中引人入胜的问题。书中提到的应用是这样选择的：既考虑其内在意义，也考虑它们与本书中提到的抽象内容的关系。在很多情况下，特定的例子需要理论的推广，从而为进一步的发展提供动力。我们希望，提到的那些较深刻较复杂的应用将能提高这门快速发展的学科的价值及意义。

此外，我们选取一些非线性问题作为抽象的模型。这包括

- (i) 确定非线性常微分方程组的周期解；
- (ii) 各种半线性椭圆型偏微分方程的 Dirichlet 问题；
- (iii) 在给定的紧流形上，确定“最简”度量的微分几何问题（在这里，“最简”是指常曲率）；
- (iv) 非线性弹性 von Kármán 方程的解结构。

所有这些模型说明，需要发展新的理论和需要更精妙敏锐的研究方法。此外，这些问题的经典的性质表明，对于不太经典的非线性问题抽象本质的研究来说，有着广阔领域。

书中提到的许多抽象结果和应用虽然近来才起步，但我仍希

望它们能形成统一的发展模式，而该模式有别于这个课题的现有专著。我们在选择本书所要的资料时高度主观，并且，为保证它页数适当，对许多重要课题的全貌仅浅述即止，而所涉及的有序 Banach 空间，变分不等式，凸分析，单调映射以及抛物型和双曲型偏微分方程的内容均尽可能回避。此外，这些课题已被许多新近的专著和综述文章所涵盖。我以一种略微不同的风格，绕开那些过于特殊以致于无法阐明一般原理的应用，单一的二阶非线性微分方程两点边值问题即为一例。这样的问题可用（例如）相位平面法来成功地处理。最后，现代物理新近的“Euclid”场论方法已指出，非线性双曲型系统通常可借助于这里所论述的非线性椭圆型边值问题来处理。

写这本书花费了数年，各种印刷错误在所难免。我恳请读者将任何这样的错误告之于我，以便列表勘误。还有，我企望这里所讲述的材料有充分的连贯性，有内在的意义并引人入胜，能给读者提供一个进一步遨游非线性分析的园地。

为了使本书有合理的篇幅，许多有趣的非线性问题和例证被割爱。我希望在不久的将来能完成另一卷书，它既有这些内容，又有带启发意义并且更常规的问题。那卷书还将包含一个更完整的参考文献。

最后，我想感谢为了出这本书而提供帮助的所有人，这包括 D. Westreich, R. Plastock, E. Podolak, J. vande Koppel, T. Goldring, S. Kleiman, A. Steif, S. Nachtigall, M. Schechter, L. E. Fraenkel, S. Karlin, W. B. Gordon, A. Wightman 以及虽在最后但又必不可少的科学出版社的编辑们。如果没有科学研究空气动力办公室和国家科学基金会的慷慨经济资助，也不可能完成这本书。对这两个机构，特致诚挚的谢意。

对读者的建议

这本书拟将数学分析的某些方面与其他科学领域作一综合。这种综合需要很多源动力和创造性的方法，而这在教科书中通常是没有的。

因而，第一章和第二章中提供背景材料及预备知识的那些部分可以径直越过而不去读它们。我们鼓励读者先跳过去阅读能激发其兴趣的知识段落以及为此而直接进入后面的章节，当需要时，读者可返回第一部分以补充所需的知识。读这本书时不要求从头至尾。

本质上，第三章筹划成抽象的，并拟帮助发展出一个使用“泛函分析”语言的工具。第三章的前三节构成了其后全部内容的必要前提。相反，第四章则自始至终侧重于应用。事实上，真正理解依赖于参数的局部分析需要仔细思考具体的经典模型问题。读者可以仅选择合乎其兴趣的那些应用。

第三部分可分成几块来阅读。例如，第五章包括三条分开发展的线索：5.1节，5.2节和5.3~5.5节（当然，若要深入研究的话，需将每条线索综合起来）。类似地，第六章自然地分成三个部分：6.1~6.2节，6.3~6.4节和6.5~6.7节。前两部分未用拓扑方法，但对第三部分来说，这种方法是本质的。

读者应具备常规的线性泛函分析、常微分方程和偏微分方程的一些必要知识。对大学物理和微分几何有所了解将有助于理解应用部分。这些应用叙述得相当简洁并具有不同程度的完整性。与每个应用的更详细和更传统的处理方式作比较将是有益的。我的想法是使读者对这个课题的范围、用途和多样性提供介绍而又不致使关键思想难以理解。

目 录

译者的话
记号与术语
序言
对读者的建议

第一部分 预备知识

第一章 背景材料	2
1.1 非线性问题如何产生	2
1.1A 微分几何学上的来源	2
1.1B 数学物理中的来源	9
1.1C 变分学中的来源	16
1.2 遭遇的典型困难	18
1.2A 固有的困难	18
1.2B 非固有的困难	22
1.3 来自泛函分析的细节	26
1.3A Banach 空间和 Hilbert 空间	26
1.3B 一些有用的 Banach 空间	28
1.3C 有界线性泛函和弱收敛	32
1.3D 紧性	34
1.3E 有界线性算子	35
1.3F 特殊类型的有界线性算子	38
1.4 不等式与估计	43
1.4A 空间 $W_{1,p}(\Omega)$ ($1 \leq p < \infty$)	44
1.4B 空间 $W_{m,p}(\mathbf{R}^N)$ 和 $\dot{W}_{m,p}(\Omega)$ ($m \geq 1$, m 是整 数, $1 \leq p < \infty$)	50

1.4C	对线性椭圆型微分算子的估计	51
1.5	微分系统的经典解和广义解	53
1.5A	$W_{m,p}$ 中的弱解	54
1.5B	半线性椭圆型系统弱解的正则性	55
1.6	有限维空间之间的映射	59
1.6A	Euclid 空间之间的映射	59
1.6B	同伦不变性	62
1.6C	同调与上同调不变量	65
	注记	68
第二章	非线性算子	76
2.1	初等微积分	76
2.1A	有界性和连续性	76
2.1B	积分	78
2.1C	微分	81
2.1D	多重线性算子	85
2.1E	高阶导数	87
2.2	具体的非线性算子	93
2.2A	复合算子	93
2.2B	微分算子	94
2.2C	积分算子	96
2.2D	微分算子的表示法	98
2.3	解析算子	103
2.3A	等价定义	103
2.3B	基本性质	108
2.4	紧算子	109
2.4A	等价定义	109
2.4B	基本性质	112
2.4C	紧微分算子	114
2.5	梯度映射	116
2.5A	等价定义	116

2.5B 基本性质	119
2.5C 特殊的梯度映射	123
2.6 非线性 Fredholm 算子	126
2.6A 等价定义	126
2.6B 基本性质	127
2.6C 微分 Fredholm 算子	128
2.7 真映射	129
2.7A 等价定义	129
2.7B 基本性质	132
2.7C 作为真映射的微分算子	133
注记	136

第二部分 局部分析

第三章 单个映射的局部分析	143
3.1 逐次逼近法	143
3.1A 压缩映射原理	143
3.1B 反函数定理和隐函数定理	145
3.1C Newton 法	149
3.1D 局部满射性的一个判别法	154
3.1E 对常微分方程的应用	156
3.1F 对等周问题的应用	160
3.1G 对映射奇异性的应用	165
3.2 梯度映射的最速下降法	169
3.2A 局部极小的连续下降法	170
3.2B 等周变分问题的最速下降法	172
3.2C 对于一般临界点的结果	175
3.2D 关于一般光滑映射的最速下降法	178
3.3 解析算子和强函数法	179
3.3A 一些启发	179
3.3B 一个解析隐函数定理	180

3.3C 复解析 Fredholm 算子的局部性态	183
3.4 广义反函数定理	185
3.4A 一些启发	185
3.4B J. Moser 的一个结果	186
3.4C 光滑算子	189
3.4D 对于局部共轭问题的反函数定理	192
注记	195
第四章 依赖于参数的扰动现象	202
4.1 分歧理论——一个构造性方法	202
4.1A 定义和基本问题	203
4.1B 简化为有限维问题	207
4.1C 单重情况	209
4.1D 一个收敛的迭代格式	213
4.1E 高重情况	218
4.2 分歧理论中的超越方法	221
4.2A 一些启发	221
4.2B 分歧理论中的 Brouwer 度	223
4.2C 初等临界点理论	226
4.2D 分歧理论中的 Morse 型数	231
4.3 具体的分歧现象	234
4.3A 限制三体问题中平衡点附近的周期运动	234
4.3B 非线性弹性中的屈曲现象	239
4.3C Navier-Stokes 方程的第二定常流	247
4.3D 紧复流形上复结构的分歧	254
4.4 渐近展开和奇异扰动	259
4.4A 一些启发	259
4.4B 形式渐近展开的有效性	261
4.4C 对半线性 Dirichlet 问题 (Π_ϵ) 的应用	270
4.5 经典数学物理中的某些奇异扰动问题	276
4.5A 由瞬时力作用的非谐振子的扰动	277

4.5B 非线性弹性中的薄膜逼近	278
4.5C 黏性流体的扰动 Jeffrey-Hamel 流	280
注记	285

第三部分 大范围分析

第五章 一般非线性算子的全局性理论	293
5.1 线性化	293
5.1A 整体同胚	294
5.1B 具奇异值的映射	304
5.2 有限维逼近	313
5.2A Galerkin 逼近	313
5.2B 对拟线性椭圆型方程的应用	318
5.2C 强制性限制的消除	320
5.2D 梯度算子的 Rayleigh-Ritz 逼近	324
5.2E Navier-Stokes 方程的定常态解	326
5.3 同伦, 映射度及其推广	330
5.3A 一些启发	330
5.3B 连续映射的紧扰动	331
5.3C 恒等算子的紧扰动与 Leray-Schauder 度	335
5.3D 线性 Fredholm 映射的紧扰动及稳定同伦	349
5.3E 零指标 C^2 真 Fredholm 算子的广义度	358
5.4 同伦和非线性算子的映射性质	362
5.4A 满射性质	362
5.4B 单叶性和同胚性质	364
5.4C 不动点定理	367
5.4D 谱性质和非线性本征值问题	370
5.4E 可解性的充要条件及其推论	377
5.4F 保锥算子的性质	381
5.5 对非线性边值问题的应用	384
5.5A 拟线性椭圆型方程的 Dirichlet 问题	385

5.5B	$\Delta u + f(x, u) = 0$ 的 Dirichlet 问题的正解	387
5.5C	周期水波	389
5.5D	自治系统周期运动的延拓	395
5.5E	强制半线性椭圆型边值问题可解的充要条件	398
	笔记	400
第六章 梯度映射的临界点理论		406
6.1	极小化问题	406
6.1A	下确界的达到	407
6.1B	一个例证	413
6.1C	与拟线性椭圆型方程有关的极小化问题	415
6.2	来自几何学与物理学的具体极小化问题	424
6.2A	常值负 Hermite 纯量曲率的 Hermite 度量	424
6.2B	非线性弹性中的稳定平衡态	430
6.2C	Plateau 问题	434
6.2D	Euclid 量子场论中的动态不稳定性 (在平均场逼近下)	437
6.3	等周问题	439
6.3A	梯度映射的非线性本征值问题	440
6.3B	半线性梯度算子方程的可解性	448
6.4	几何和物理中的等周问题	455
6.4A	非线性 Hamilton 系统的大振幅周期解族	455
6.4B	具零 Euler-Poincaré 示性数的紧 2 维流形之指定 Gauss 曲率的 Riemann 结构	461
6.4C	具指定纯量曲率的 Riemann 流形	465
6.4D	S^2 上指定 Gauss 曲率的共形度量	467
6.4E	一个全局性自由边界问题——理想流体中持久形式的定常涡环	471
6.5	Hilbert 空间中的 Marston Morse 临界点理论	477
6.5A	最速下降法的一个改进	478
6.5B	退化与非退化临界点	479