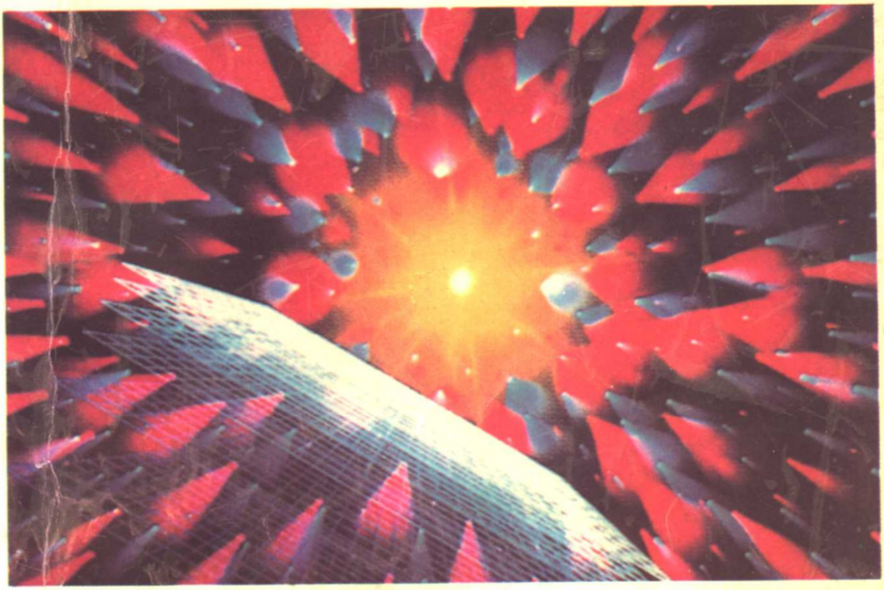
数理化一题多解丛书



张卫兵 编

初中数学竞赛一题多解

湖北教育出版社

数理化一题多解丛书

初中数学竞赛一题多解

张卫兵　编

湖北教育出版社

（鄂）新登字 02 号

图书在版编目（CIP）数据

初中数学竞赛一题多解/张卫兵编. 一武汉：湖北教育出版社，1996
（数理化一题多解丛书）
ISBN 7-5351-2020-2

Ⅰ. 初…　Ⅱ. 张…　Ⅲ. 数学课-初中-竞赛题-解题
Ⅳ. G634.606

中国版本图书馆 CIP 数据核字（96）第 20610 号

出版发行：	湖北教育出版社	汉口解放大道新育村 33 号 邮编：430022　电话：5830435
经　销：	新　华　书　店	
印　刷：	通山县印刷厂	（437600·通羊镇南市路 165 号）
开　本：	787mm×1092mm　1/32	10.5 印张
版　次：	1996 年 12 月第 1 版	1996 年 12 月第 1 次印刷
字　数：	241 千字	印数：1—20 000

ISBN 7—5351—2020—2/G·1636　　定价：9.40 元

说　明

学好中学数理化基础知识，提高分析问题和解决问题的能力，养成探索、思维的习惯，培养富有科学创造性的人才，是中学教学的一项重要任务，而提高数理化解题能力则是实现上述任务的一种必不可少的手段。我们在这种思想的指导下，根据现行中学教学大纲和教材的要求，编写了这套《数理化一题多解丛书》。

本册《初中数学竞赛一题多解》为这套丛书之一种。本书是按国家教委颁布的最新九年义务教育全日制初级中学《数学教学大纲》和中国数学会普及工作委员会制订的《初级中学数学竞赛大纲》的要求，研究本世纪50年代至今近半个世纪的各地初中数学竞赛试题的特点编写而成的。全书所选题目均系数学竞赛题，各章所选题目由浅入深，自简单到复杂，循序渐进，并力求做到：(1)精与全相结合，即本书所选题目题型多样，而且这些题型几乎包括中国开展初中数学竞赛以来的各种有多解的题目。每题的解法只选取几种最基本的解法，一般解法不超过4种，综观全书解法，又能涉及初中数学竞赛出现过的几乎所有解题方法；(2)常规解法与技巧解法相结合，即本书各题所给的解法，不仅尽量给出其同类型题目的普遍适用的解法，而且尽可能依据该题特点给出单独处理该题的解法；(3)重视基础与提高能力相结合，即从本书选题内容上看，不轻视涉及课本及初中数学竞赛的基本内容的题目，也不放弃初中数学竞赛试题中涉及知识面

广、内容深的难题、“怪题”，但难题有规律，“怪题”不超纲。

本书在一些题的解法后，还对解法的繁简、涉及的初中数学竞赛知识及解题方法给出了画龙点睛式的评注，所以它既可以作为初中学生开阔思路的课外自学读物，又可作为初中数学教师备课选题的资料。

参加本书编写的人员还有张敏，龚朴，李晓生，罗烈，江楚桥为本书的出版做了组织、联络工作。

由于作者水平有限，成书时间仓促，错误、疏漏、不妥之处在所难免，敬请各位读者指正。

编　者

1996年9月于黄冈中学

目　录

一、实数…………………………………………………………（1）

二、代数式、恒等式、恒等变形……………………………………（31）

三、方程和不等式……………………………………………（64）

四、应用题………………………………………………………（99）

五、函数 ……………………………………………………（115）

六、几何计算 ………………………………………………（143）

七、几何证明 ………………………………………………（201）

八、杂题 ……………………………………………………（309）

一、实　　数

1—1　证明：$53^{53}-33^{33}$能被10整除.（波兰第六届数学竞赛题）

思路　用整数乘方的个位数字的性质证.

证一　因为$53=13\times4+1$，$33=8\times4+1$，所以53^{53}的个位数字是3，33^{33}的个位数字也是3，于是$53^{53}-33^{33}$的个位数字是0，故$53^{53}-33^{33}$能被10整除.

思路　用同余理论证.

证二　$53^{53}-33^{33}$

$$
\begin{aligned}
&\equiv 3^{53}-3^{33}\pmod{10}\\
&\equiv 3^{33}(3^{20}-1)\pmod{10}\\
&\equiv 3^{33}(81^{5}-1)\pmod{10}\\
&\equiv 3^{33}(1^{5}-1)\pmod{10}\\
&\equiv 0\pmod{10}
\end{aligned}
$$

所以$53^{53}-33^{33}$能被10整除.

思路　用公式分解因式证.

证三　$53^{53}-33^{33}$

$$
\begin{aligned}
&=(53^{53}-33^{53})+(33^{53}-33^{33})\\
&=(53-33)A+33^{33}(33^{20}-1)\\
&=(53-33)A+33^{33}(1089^{10}-1)\\
&=20A+33^{33}\cdot1090B
\end{aligned}
$$

其中，$A=53^{52}+53^{51}\cdot33+53^{50}\cdot33^{2}+\cdots+33^{52}$是整数，$B=(1089-1)(1089^{8}+1089^{6}+1089^{4}+1089^{2}+1)$也是整数.

又因为 20 是 10 的倍数，1090 是 10 的倍数，33^{33}是整数，所以 $20A$、$33^{33}\cdot 1090B$ 都能被 10 整除，故 $53^{53}-33^{33}$能被 10 整除.

说明 证一中用到整数的个位数字的周期性：当正整数 n 被 4 除余 $r(r=0,1,2,3)$ 时，对正整数 a，a^n 的个位数字和 a^r 的个位数字相同. 证二的方法即同余法是证明整除问题的一个常用方法. 证三中我们应用了公式 $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})$（$n$ 是自然数），一般地，对整数 a、b，a^n-b^n 是 $a-b$ 的倍数，$a^{2n}-b^{2n}$是 a^2-b^2 的倍数（n 是自然数）.

1—2 十进制中的六位数 $1abcde$，把它扩大到原来的 3 倍后成为六位数 $abcde1$，求这个六位数.（1990 年北京市奥林匹克学校高中入学数学试题）

思路 用逆推法，分析个位数字解.

解一 由题意知，$3\cdot e$ 的个位数字是 1，所以 $e=7$. 再看题中两个六位数的十位数字可知，$3\cdot d$ 的个位数字是 5，所以 $d=5$. 又看题中两个六位数的百位数字可知，$3\cdot c$ 的个位数字是 4，所以 $c=8$. 看题中两个六位数的千位数字可知，$3\cdot b$ 的个位数字是 6，所以 $b=2$. 最后看题中两个六位数的万位数字知，$3\cdot a$ 的个位数字是 2，所以 $a=4$. 由上可得这个六位数是 142857.

思路 设未知数解.

解二 设五位数 $abcde=x$，则六位数 $1abcde=10^5+x$，六位数 $abcde1$ 是 $10x+1$，于是由题意知

$$3(10^5+x)=10x+1$$

所以
$$x=\frac{3\cdot 10^5-1}{10-3}=\frac{299999}{7}=42857$$

故所求的六位数是 142857.

说明 (1)逆推法是处理一类数学问题的较好方法,如1991年上海市初三数学竞赛题:某人走进一家商店,进门付一角钱,然后在店里购物花掉当时手中钱的一半,走出商店又付一角钱.以后,每进出一家商店都是如此,当他走出第四家商店时一分钱也没有了,该人原有钱的数目是____角.解此题用逆推法是最方便快捷的方法.(2)解二的方法是变多元为一元的整体代换法,具有一定的技巧和灵活性.

1—3 把由1开始的自然数依次写下去,直写到第198位为止:

$$\underbrace{12345678910111213\cdots}_{198\text{位}}$$

那么这个数用9除的余数是(　　)

(A)4　　(B)6　　(C)7　　(D)非上述答案

(1987年全国初中数学联赛试题)

思路 用整数被9除余数的特点,计算各位数字和解.

解一 自然数中,一位数有9个,两位数有90个,所以从1开始写到99的数有$9+2\times90=189$位.而$198-189=9$,所以题目中的198位数应是

$$12345678910111213\cdots99100101102$$

把1,2,3,…,9分别看作01,02,03,…,09,则1,2,3,…,99可看作"两位数"

$$01,02,03,\cdots,09,10,11,\cdots,99$$

其中个位数字是1的有01,11,21,…,91共10个;十位数字是1的有10,11,12,…,19共10个,因此这99个数中含20个数字1.同理可以说明这99个数中含数字2,3,…,9都是20个,因而这99个数所含数字的总和为

$$(1+2+3+\cdots+9)\cdot 20=900$$

于是题中198位数的各位数字和为

$$900+1+0+0+1+0+1+1+0+2=9\times 100+6$$

故题中的198位数被9除余6,应选(B).

思路 用同余性质,计算被9除的余数解.

解二 同解一可知,题中的198位数是

$$12345678910111213\cdots 99100101102$$

注意到 $10^n\equiv 1(\mathrm{mod}9)$($n$ 是自然数),故对任一自然数 a,同余式 $a\cdot 10^n\equiv a$ 对一切自然数 n 成立,于是

$$\begin{aligned}&12345678910111213\cdots 99100101102\\ \equiv&1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+\cdots\\ &+99+100+101+102(\mathrm{mod}9)\\ \equiv&\frac{1}{2}(1+102)\cdot 102(\mathrm{mod}9)\\ \equiv&103\times 51(\mathrm{mod}9)\\ \equiv&4\times 6(\mathrm{mod}9)\\ \equiv&24(\mathrm{mod}9)\\ \equiv&6(\mathrm{mod}9)\end{aligned}$$

故题中的198位数被9除余6,应选(B).

说明 解一用到了"一个自然数的各位数字和被9除余几,那么这个自然数就被9除余几"这一定理.为了计算各位数字和方便还用到"添0法".解二运用同余理论,计算时不改变题中198位数的各组成部分,这种方法具有一定技巧,运算量小.

1—4 求证:对任意自然数 n,$n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1$ 都为整数,且用3除时余2.(1956年北京市数学竞赛题)

本题等价于证明命题:"对任意自然数 n,$2n^3+3n^2+n$ 都能

被 6 整除”. 下面证明这个命题.

思路 用连续的整数乘积的性质证明.

证一 $2n^3+3n+n$

$$=n(2n^2+3n+1)$$

$$=n(2n+1)(n+1)$$

$$=n(n+1)(n+2+n-1)$$

$$=n(n+1)(n+2)+(n-1)n(n+1)$$

对任意自然数 n，有：$n, n+1, n+2$ 是三个连续自然数，其积 $n(n+1)(n+2)$ 能被 6 整除；$n-1, n, n+1$ 又是三个连续的整数，其积 $(n-1)n(n+1)$ 也能被 6 整除，所以它们的和 $n(n+1)(n+2)+(n-1)n(n+1)$ 能被 6 整除. 故对任意自然数 n，$2n^3+3n^2+n$ 都能被 6 整除.

思路 用整数剩余类分类讨论证.

证二 $2n^3+3n^2+n=n(n+1)(2n+1)$

当 n 是奇数时，$n+1$ 是偶数，$n(n+1)(2n+1)$ 能被 2 整除；当 n 是偶数时，$n(n+1)(2n+1)$ 也能被 2 整除. 于是对任意自然数 n，$2n^3+3n^2+n$ 能被 2 整除.

当 n 被 3 整除时，显然 $n(n+1)(2n+1)$ 能被 3 整除；当 n 被 3 除余 1 时，$2n+1$ 能被 3 整除，所以 $n(n+1)(2n+1)$ 能被 3 整除；当 n 被 3 除余 2 时，$n+1$ 能被 3 整除，所以 $n(n+1)(2n+1)$ 还是能被 3 整除. 于是对任意自然数 n，$n(n+1)(2n+1)$ 能被 3 整除.

而 2 和 3 互质，所以对任意自然数 n，$n(n+1)(2n+1)$ 都能被 2×3 即 6 整除.

思路 把原式变出一个三连续自然数之积与另一为被 6 整除的整数的和（或差）的形式证.

证三 $2n^3+3n^2+n$

$=n(n+1)(2n+1)$

$=n(n+1)(2n+4-3)$

$=2n(n+1)(n+2)-3n(n+1)$

因为 n、$n+1$、$n+2$ 是三连续自然数，所以 $n(n+1)(n+2)$ 能被 6 整除，并且 $n(n+1)$ 能被 2 整除，于是 $3n(n+1)$ 能被 6 整除，从而 $2n(n+1)(n+2)-3n(n+1)$ 能被 6 整除，即 $2n^3+3n^2+n$ 对任意自然数 n，它都能被 6 整除.

说明 证一、证三中，我们都用到了定理"连续 n 个整数的乘积能被 $1\times2\times3\times\cdots\times n$ 整除". 证一中把 $2n+1$ 写成 $n+2$ 与 $n-1$ 之和，使原式变为两组连续三个整数之积的和，方法巧妙. 证二用到整数按剩余类分类的方法，这种方法是解决整数有关问题的一种基本而重要的方法.

1－5 设 $P=\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{2n个1}-\underbrace{22\cdots2}_{n个2}}$，则（　　）（$n$ 为自然数）

(A) P 为无理数　　(B) $P=\underbrace{11\cdots1}_{n个}$

(C) $P=\underbrace{22\cdots2}_{n个}$　　(D) $P=\underbrace{33\cdots3}_{n个}$

(E) $P=\underbrace{77\cdots7}_{n个}$

（1983 年重庆市初中数学竞赛题）

思路 用特殊值法解.

解一 取 $n=1$，则 $P=\sqrt{11-2}=3$，故应选(D).

思路 用因式分解法解.

解二 $\underbrace{11\cdots1}_{2n个1}-\underbrace{22\cdots2}_{n个2}=\underbrace{11\cdots1}_{n个1}\times10^n+\underbrace{11\cdots1}_{n个1}-\underbrace{22\cdots2}_{n个2}$

$=\underbrace{11\cdots1}_{n个1}\times10^n-\underbrace{11\cdots1}_{n个1}$

$$=\underbrace{11\cdots1}_{n个1}\times(10^n-1)$$

$$=\underbrace{11\cdots1}_{n个1}\times\underbrace{99\cdots9}_{n个9}$$

$$=9\times\underbrace{11\cdots1}_{n个1}{}^2$$

$$=(\underbrace{33\cdots3}_{n个3})^2$$

故应选(D).

思路 用乘法公式解.

解三 $\underbrace{11\cdots1}_{2n个1}-\underbrace{22\cdots2}_{n个2}$

$$=\frac{1}{9}\times\underbrace{99\cdots9}_{2n个9}-\frac{2}{9}\times\underbrace{99\cdots9}_{n个9}$$

$$=\frac{1}{9}\times(10^{2n}-1)-\frac{2}{9}\times(10^n-1)$$

$$=\frac{1}{9}\times(10^{2n}-1-2\times10^n+2)$$

$$=\frac{1}{9}\times(10^{2n}-2\times10^n+1)$$

$$=\frac{1}{9}\times(10^n-1)^2$$

$$=(\frac{10^n-1}{3})^2$$

$$=(\frac{\overbrace{99\cdots9}^{n个9}}{3})^2$$

$$=(\underbrace{33\cdots3}_{n个3})^2$$

故应选(D).

说明 解一中运用了解选择题的一种方法:“特殊值法”.解选择题还可根据该题的特点用“验证法”、“特例法”、“排除法”、“图解法”、“逆推法”、“极端图形法”中的某一或几种方法解之.

能灵活运用这些方法解选择题.有利于提高解题速度和思维的灵活性.解二较灵活,关键是$\underbrace{11\cdots1}_{2n个1}$分成两部分之和.解三中用到公式:$\underbrace{\overline{aa\cdots a}}_{n个a}=\frac{a}{9}\times(10^n-1)(1\leqslant a\leqslant9,a$ 是整数).这一公式是解有连续若干个各位数上数字相同的整除的问题的普遍方法.

1—6 已知存在正整数n,能使$\underbrace{11\cdots1}_{n个1}$被1987整除,求证:数

$$P=\underbrace{11\cdots1}_{n个1}\underbrace{99\cdots9}_{n个9}\underbrace{88\cdots8}_{n个8}\underbrace{77\cdots7}_{n个7}$$

和

$$Q=\underbrace{11\cdots1}_{n-1个1}\underbrace{99\cdots9}_{n-1个9}\underbrace{88\cdots8}_{n-1个8}\underbrace{77\cdots7}_{n-1个7}$$

都能被1987整除.(1987年全国初中数学联赛试题)

思路 用分解因式证.

证一

$$P=\underbrace{11\cdots1}_{n个1}\times10^{3n}+\underbrace{99\cdots9}_{n个9}\times10^{2n}+\underbrace{88\cdots8}_{n个8}\times10^n+\underbrace{77\cdots7}_{n个7}$$

$$=\underbrace{11\cdots1}_{n个1}\times(10^{3n}+9\times10^{2n}+8\times10^n+7)$$

且$\underbrace{11\cdots1}_{n个1}$能被1987整除,所以$P$能被1987整除.

同理

$$Q=\underbrace{11\cdots1}_{n-1个1}\times(10^{3(n-1)}+9\times10^{2(n-1)}+8\times10^{n-1}+7)$$

$$=\underbrace{11\cdots1}_{n-1个1}\times(10^{3n-3}+9\times10^{2n-2}+8\times10^{n-1}+7)$$

而

$$10^{3n-3}+9\times10^{2n-2}+8\times10^{n-1}+7$$

$$=(10^n)^3\times10^3+9\times(10^n)^2\times10^2+8\times10^n\times10+7$$

$$=(\underbrace{99\cdots9}_{n个9}+1)^3\times10^3+9\times(\underbrace{99\cdots9}_{n个9}+1)^2\times10^2$$

$$+8\times(\underbrace{99\cdots9}_{n个9}+1)\times10+7$$

又因为$\underbrace{99\cdots9}_{n个9}=9\times\underbrace{11\cdots1}_{n个1}$ 能被 1987 整除，所以上式被 1987 除的余数是 $10^3+9\times10^2+8\times10+7$，即 1987，于是上式能被 1987 整除，从而 Q 能被 1987 整除.

思路 用同余法证.

证二 因为$\underbrace{11\cdots1}_{n个1}$ 能被 1987 整除，所以有

$$\underbrace{11\cdots1}_{n个1}\equiv0(\mathrm{mod}1987)$$

于是
$$P=\underbrace{11\cdots1}_{n个1}\times10^{3n}+9\times\underbrace{11\cdots1}_{n个1}\times10^{2n}+8\times\underbrace{11\cdots1}_{n个1}\times10^n$$
$$+7\times\underbrace{11\cdots1}_{n个1}$$
$$\equiv0\times10^{3n}+9\times0\times10^{2n}+8\times0\times10^n+7\times0$$
$$(\mathrm{mod}1987)$$
$$\equiv0(\mathrm{mod}1987)$$

即 P 能被 1987 整除.

由$\underbrace{11\cdots1}_{n个1}\equiv0(\mathrm{mod}1987)$，知

$$\underbrace{99\cdots9}_{n个9}\equiv0(\mathrm{mod}1987)$$

于是
$$10^n=\underbrace{99\cdots9}_{n个9}+1\equiv1(\mathrm{mod}1987)$$

又
$$Q=\frac{1}{9}\times(10^{n-1}-1)\times10^{3n-3}+\frac{9}{9}\times(10^{n-1}-1)$$
$$\times10^{2n-2}+\frac{8}{9}\times(10^{n-1}-1)\times10^{n-1}+\frac{7}{9}\times(10^{n-1}-1)$$

所以
$$9Q=10^{4n-4}-10^{3n-3}+9\times10^{3n-3}-9\times10^{2n-2}+8\times10^{2n+2}$$

$$-8\times10^{n-1}+7\times10^{n-1}-7$$

$$=10^{4n-4}+8\times10^{3n-3}-10^{2n+2}-10^{n-1}-7$$

$$\equiv10^4+8\times10^3-10^2-10-7 \pmod{1987}$$

$$\equiv17883 \pmod{1987}$$

而 $17883=1987\times9\equiv0 \pmod{1987}$，所以

$$9Q\equiv0 \pmod{1987}$$

由于 $(9,1987)=1$，所以

$$Q\equiv0 \pmod{1987}$$

即 Q 能被 1987 整除.

思路 用整除性质证.

证三 $P=\underbrace{11\cdots1}_{n个1}\times10^{3n}+9\times\underbrace{11\cdots1}_{n个1}\times10^{2n}+8\times\underbrace{11\cdots1}_{n个1}\times10^{n}$
$+7\times\underbrace{11\cdots1}_{n个1}$

由于 $\underbrace{11\cdots1}_{n个1}$ 能被 1987 整除，所以 P 的四个加数都能被 1987 整除，从而 P 能被 1987 整除.

$$Q=\underbrace{11\cdots11}_{n个1}\ \underbrace{99\cdots9}_{n-1个9}998\ \underbrace{88\cdots8}_{n-1个8}7\ \underbrace{77\cdots7}_{n个7}$$

$$=\underbrace{11\cdots1}_{n个1}\ \underbrace{1\cdots1}_{n个1}\times10^{2n+4}+\underbrace{88\cdots8}_{n个8}\times10^{2n+3}+1987\times10^{2n}$$

$$+\underbrace{11\cdots1}_{n个1}\times10^{n-1}+\underbrace{77\cdots7}_{n个7}\times10^{n}+\underbrace{77\cdots7}_{n个7}$$

因为 $\underbrace{11\cdots1}_{n个1}\ \underbrace{11\cdots1}_{n个1}$，$\underbrace{88\cdots8}_{n个8}$，$\underbrace{11\cdots1}_{n个1}$，$\underbrace{77\cdots7}_{n个7}$ 都是能被 1987 整除的数，1987 显然也能被 1987 整除，所以 Q 的五个加数都能被 1987 整除，从而 Q 能被 1987 整除.

说明 证一化繁为简较直接，步骤较少. 证二的关键之处是由题设推出 $10^n\equiv1 \pmod{1987}$，较好地运用了同余性质. 证三思路自然，但运用的“去两头、凑中间”的方法，不易想到.

1—7 满足等式 $1982x-1981y=1983$ 的一组自然数是(　　)

(A)$x=12785, y=12768$

(B)$x=12784, y=12770$

(C)$x=11888, y=11893$

(D)$x=19847, y=1945$

(福建省1983年初中数学竞赛试题)

思路 用验证法解.

解一 将答案(A)、(B)、(C)、(D)的数值代入方程左边计算,只有

$$1982\times11888-1981\times11893=1983$$

所以选(C).

思路 先分析个位数字,再用排除法解.

解二 将(A)、(B)、(C)、(D)四答案的数值代入左边,计算左边个位数字,得其值分别为

$$2(2\times5-1\times8), 8(2\times4-1\times0)$$

$$3(2\times8-1\times3), 9(2\times7-1\times5)$$

对照方程右边个位数字,应排除(A)、(B)、(D),选(C).

思路 先比较大小,再用排除法解.

解三 $1982x-1981y$

$$=x+1981(x-y)$$

对于答案(A)、(B),有:$x>1983$,$x-y>0$,所以上式大于1983,(A)、(B)的值不是方程的解,应排除.

对于答案(D),$x>0$,$x-y=2$,上式大于 1981×2,显然 $1981\times2>1983$,所以上式大于1983,(D)的值不是方程的解,应排除.

综上所述,正确的答案应是(C).