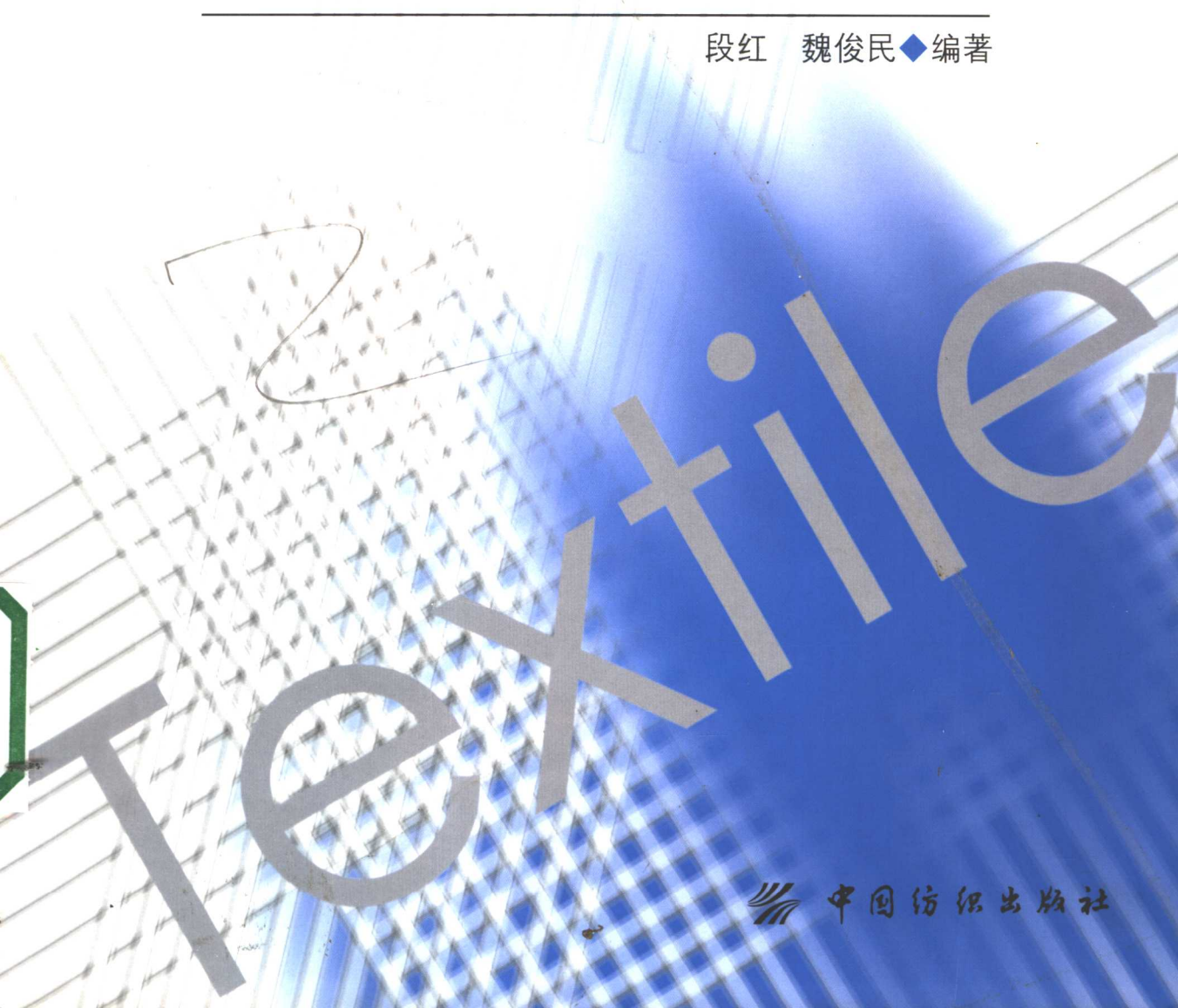


高等教育教材

现代测试

信号处理理论与实践

段红 魏俊民◆编著



中国纺织出版社

高等教育教材

现代测试信号处理 理论与实践

段 红 魏俊民 编著



中国纺织出版社

内 容 提 要

测试技术是一门涉及诸多学科技术领域的新兴学科,发展十分迅速,信号分析与处理则是测试技术的重要内容。本书叙述现代信号处理方法中的小波变换的理论、进化算法、模糊理论、人工神经网络理论以及混沌信息处理的理论等基础知识,并用实例介绍了这些新型信号处理技术在实践中的应用方法,同时还介绍了虚拟仪器的构成及系统设计方法。

本书可作为研究生及相关专业本科生教材,对从事测试技术工作的工程技术人员亦有很好的参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

现代测试信号处理理论与实践/段红,魏俊民编著.北京:中国纺织出版社,2005.7

高等教育教材

ISBN 7-5064-3411-3/TS·1991

I.现… II.①段… ②魏… III.①信号分析-高等教育-教材②信号处理-高等学校-教材 IV.TN911

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 048828 号

策划编辑:张福龙 责任编辑:董友年 特约编辑:闫建华
责任校对:楼旭红 责任设计:何建 责任印制:黄放

中国纺织出版社出版发行

地址:北京东直门南大街6号 邮政编码:100027

邮购电话:010-64168110 传真:010-64168231

http://www.c-textilep.com

E-mail:faxing@c-textilep.com

三河艺苑印刷厂印刷 三河永成装订厂装订

各地新华书店经销

2005年7月第1版第1次印刷

开本:787×1092 1/16 印张:12.25

字数:239千字 印数:1—3000 定价:30.00元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社市场营销部调换

前 言

在现代科学技术领域里,电子信息系统的应用极为广泛,主要有通讯、导航、雷达、声纳、医疗仪器、振动工程、机械故障诊断、产品质量检测等。在短短的几十年时间里,这些系统几经更新换代,发展速度极快。系统发展的进程往往与信息的利用程度息息相关,而信息的利用程度又与信号和信息处理理论及技术的发展紧密相连。

早在 20 世纪 40 年代信息系统发展的初期,信号和信息处理理论与技术就受到了电子界的重视,当时在信号检测、参数估计、滤波方面建立了一系列的理论和方法,为电子信息系统的发展指明了方向。但是由于基础技术条件的制约,使智能优化系统难以实现,实际应用的只是一些简单的处理技术。

20 世纪 60 年代以来,微电子集成电路技术、工艺迅猛发展,为复杂信号处理的实现提供了发展平台,从而将信号处理理论的发展推向一个高潮。从此,信号处理的研究不仅局限于一般的理论和方法的探讨,更多的侧重于新的方法与算法的实现研究。由此发展起来的新一代系统,其优化和自适应性能大大提高。

由于大规模集成电路的迅猛发展,使计算机技术和信息技术的发展进入了一个新的发展时期,信号处理的一些主要领域,如优化、自适应、高分辨、多维和多通道等,其理论和方法均日趋系统化。对系统的分析已不再局限于理想系统,而是考虑各种实际因素,研究其鲁棒性;同时对性能也不再限于定性描述,而要做出统计性能评价,使理论与实践在更高的水平上密切结合。

随着信号处理应用领域的不断扩大,促使人们在理论和方法上向更深层次领域进行探索,此前均假设信号及背景噪声是高斯的、平稳的,而对信号的分析只是基于其二阶矩特性和傅氏谱,其对象系统也限于时不变的(或缓变的)线性和因果最小相位系统。虽然上述假设及由此而建立的系统年在许多场合是适用的,但随着应用领域的不断扩大,要求人们去研究非平稳、非高斯信号,以及时变、非因果、非最小相位、非线性系统,这些已经成为现代信号处理研究热点的一个方面,如用时频分布和子波变换研究非平稳信号,而用高斯统计量分析非高斯信号等。现代信号处理研究的又一特点是理论与实用研究同步进行,既重视基础理论的研究,又注重实际应用的研究。可以预期,现代信号处理技术将得到广泛的应用。

鉴于信号处理学科的迅猛发展和广泛应用,国内外出版的数字信号处理的书籍非常丰富,归其内容主要在以下几个方面得到了发展:

(1)统计信号处理:其中有参数估计理论、信号检测、波形估计、现代谱分析、自适应滤波、鲁棒参数估计与谱估计、统计性能分析等基本理论和方法。

(2)多维和多通道信号处理:主要有二维信号处理、高分辨率二维 ARMA 谱估计与谐波恢复、二维最大熵法、二维 LMS 自适应滤波、多信道信号处理理论、多变元 AR 和 ARMA 过程以及多信道格型自适应滤波器等。

(3)非高斯信号处理:着重讨论如何使用高阶统计量解决非因果、非最小相位系统辨识、高斯有色噪声抑制以及高斯或非高斯有色噪声下的信号检测和谐波恢复等。

(4)非平稳信号的分析:时频分析、Wigner-Ville 分布的实现以及小波分析等。

基于以上研究,信号处理理论得到了进一步的发展与提高。

21 世纪是一个科技水平高度发展的时期,信息技术、基因技术、生命科学技术、网络技术以及超大规模集成电路技术日新月异,各学科相互交叉相互融合,测试信号的手段和方法得到了根本的改变。由于超大规模集成电路的发展,产生了单片机及 DSP 芯片,使测试系统发展成为体积小、智能化、速度快、容量大以及嵌入式的测试系统。计算机技术的发展,诞生了虚拟测试仪器,提出了“软件就是仪器”的口号,一台计算机通过应用不同的软件可以替代千万个分立测试仪器。人们越来越重视信号处理的算法研究及其在计算机中的实现。

鉴于测试技术在工业、农业、国防、生活等各个领域的应用越来越广,测试对象越来越复杂,对测试精度和可靠性要求也越来越高,这一切都导致了对各种信息的测量不仅仅是停留在读取数据的水平上,而是要对所获得的测试信息进行处理、判别,提取出多种反映被测对象各种特征(工作状况、故障、属性、类别等)的特征量,从而获得测试对象的综合参数。由于科学技术的发展与进步,测试技术的应用领域也逐渐扩大,测试技术所需要处理的量值要求精度高、动态、多信息与远距离测量等特点,因此要求测试仪器具有实时与在线测量的能力,并向数字化、智能化、多功能的方向发展。为适应新的发展需求,科技工作者不断探索新的理论和方法,取得了可喜的进展。《现代测试信号处理理论与实践》一书就是顺应这一应用背景而产生的。

现代测试信号分析与处理虽然是在传统的测试技术基础上发展起来的,但在理论基础与数学方法上却有很大区别。

本书是作者在总结长期从事测试技术与信号处理教学与科研实践的基础上,并参考相关资料、文献后编写的。为便于读者学习现代测试信号分析与处理的相关理论和方法,本

书在进行通俗易懂的推证及基本概念阐述的基础上,用举例分析叙述了不同信号测试与处理的基本方法。

本书在编写过程中自始至终得到了魏俊民教授的指导和帮助,魏俊民教授还仔细地审阅了全部书稿,提出了中肯的指导性修改意见。王文中、卿湘运、徐晓峰、雷大进等同志进行了资料收集与部分内容初稿的编写工作。本书的出版得到了中国纺织出版社的大力帮助,并得到浙江省自然科学基金委员会“纺织品多元混纺原料计算机图像识别研究(502023)”和“功能化纺织品复贴工艺的喷射涂胶机理研究(M303209)”两项基金资助,编者不胜感激,在此表示感谢。

现代测试信号分析与处理技术是一项多学科、多领域的新兴技术,由于作者水平有限,错误在所难免,恳请读者批评、指正。

编著者

于杭州浙江理工大学

2005年1月

目 录

第一章 小波变换的理论与应用	1
第一节 小波分析基础	1
第二节 多分辨率分析	7
第三节 尺度函数与小波的构造	9
第四节 小波包分解	12
第五节 小波去噪方法与虚拟小波去噪仪的设计	13
第六节 谐波小波应用于旋转机械不平衡量的提取	15
第七节 基于小波变换的织物疵点检测与识别	19
第二章 模糊分析与应用	25
第一节 模糊集合理论的基本概念	25
第二节 模糊传感器系统	41
第三节 模糊分析在炉温检测与控制系统中的应用	53
第三章 人工神经网络与应用	59
第一节 神经网络概述	59
第二节 神经网络基础知识	62
第三节 前馈型神经网络	72
第四节 反馈型神经网络	80
第五节 BP 网络在轴承剩余寿命预估实验中的应用	85
第六节 神经网络在弱信号提取中的应用	88
第七节 基于神经网络数据融合处理	90
第八节 基于 BP 神经网络的织物疵点检测与识别	97
第四章 混沌信息处理的理论与应用	105
第一节 概述	105
第二节 混沌研究的历史	106

第三节 平衡态和相平面	109
第四节 奇怪吸引子	111
第五节 分岔	112
第六节 分形和分维	121
第七节 混沌技术在弱信号检测中的应用	125
第八节 基于混沌技术的精密频率测试仪的实现	131
第九节 转子系统的碰摩分岔分析	134
第十节 混沌技术对计算机科学领域的影响	143
第五章 进化计算与应用	145
第一节 遗传算法的基本理论	145
第二节 进化规划	149
第三节 进化策略	151
第四节 进化计算的诞生	153
第五节 进化计算的理论研究与应用现状	155
第六节 织物疵点检测与识别的局部熵方法	156
第六章 虚拟仪器及应用	161
第一节 概述	161
第二节 虚拟仪器开发环境	164
第三节 基于 Labwindows/CVI 网络化虚拟仪器设计	170
第四节 基于 Labwindows/CVI 的动平衡仪设计	175
参考文献	178

第一章 小波变换的理论与应用

在信号处理与测试领域,傅立叶变换长期以来是最广泛、效果最突出的分析工具。其最主要优点是它在频域的定位是完全准确的,用它可分析信号能量在各个频域成分中的分布情况。许多在时域内很难分析和看清的问题,如信号采样、滤波等,通过傅立叶变换,在频域其变化过程则一目了然。但是,傅立叶变换反映的是整个信号全部时间内的整体频域特征,而不能提供任何局部时间段上的频率信息。为体现信号在不同时间段上的频域特征,有人提出加窗傅立叶变换:加窗信号,再进行傅立叶变换,以得到信号的局部特性。

但是由加窗傅立叶变换的定义可知,其窗函数的大小和形状与时间和频率无关而保持固定不变,而我们期望在对高频信号分析时采用小时间窗,对于低频信号则采用大时间窗进行分析,这种变时间窗的要求同加窗傅立叶变换的固定时窗的特性相矛盾,故使其应用受到限制;同时傅立叶变换是对时间 t 的积分,去掉了非平稳信号中的时变信息。这说明加窗傅立叶变换也只适用于确定性的平稳信号。

在机械振动信号测试这样的一维信号处理与数字图像处理之类的二维信号处理中,一些突变信号而往往是所要重点研究的对象,如机械故障诊断中振动冲击信号测试、图像处理中的边缘检测等,因为它们蕴涵了事物的本质特征。用信号处理的角度来描述此类情况时,可理解为对一个低频信号在某一时刻 t_0 增加一个冲击 δ ,用傅立叶分析时它的频谱就成为宽带频谱,根据此频谱只能辨别出信号中存在着冲击,但无法确定此冲击发生的时间位置。因此人们迫切希望能找到一种知道信号在任意时刻或任意一短段时间内频谱分布情况的方法。小波变换——现代调和分析与工程实践应用完美结合的产物,为非平稳信号处理提供了比较理想的数学工具,不仅继承了加窗傅立叶变换的局部化的思想,而且克服了窗口大小不随频率变化、缺乏离散正交基的缺点,成为分析信号的数学显微镜。本章从信号处理的角度简明阐述小波变化的基本原理,省去了一些繁冗的数学推导,并根据作者在信号测试工程应用的一些具体实例,以加深读者对小波变换在测试信号处理中应用的理解。

第一节 小波分析基础

小波函数定义为:设 $\psi(t)$ 为一平方可积函数[记作 $x(t) \in L^2(R)$],如果其傅立叶变换 $\hat{\psi}(\omega)$ 满足:

$$C_\psi = \int_R \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty \quad (1-1)$$

则称 $\psi(t)$ 为一个基本小波或小波母函数, 称式(1-1)为小波函数的可容许性条件。基本小波 $\psi(t)$ 可以是复数信号, 特别的可为解析信号, 如 Morlet 小波(图 1-1、图 1-2)就是一种单频复正弦调制高斯波, 是最常用的复值小波, 它的时域表达式为:

$$\psi(t) = e^{\frac{-t^2}{2}} e^{j\omega_0 t} \quad \omega_0 > 5 \quad (1-2)$$

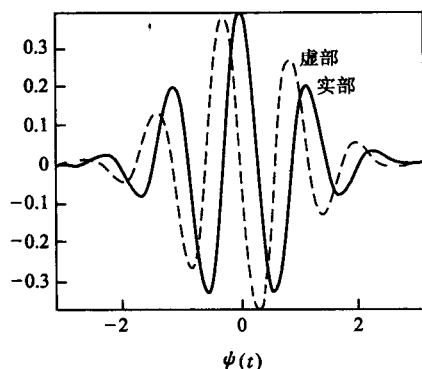


图 1-1 Morlet 小波时域波形

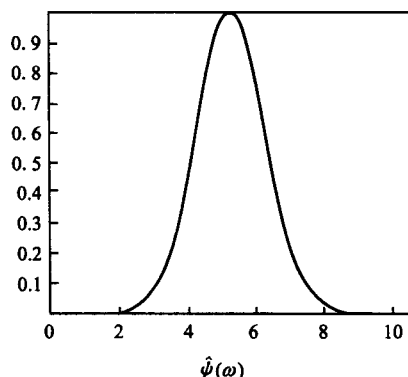


图 1-2 Morlet 小波频域波形

在一般情况下, 选取紧支集(即函数定义域有限)或近似紧支集(具有时域的局部性)具有正则性(具有频域的局部性)实数或复数函数作为基本小波, 以使基本小波在时频域均具有较好的局部特性。同时根据可容许性条件, 可知基本小波具有正负交替的波动性, 且 $\hat{\psi}(\omega)|_{\omega=0} = 0$, 意味着 $\psi(t)$ 是一个振幅衰减得很快的“波”, “小波”也由此得名。

连续小波变换(也称积分小波变换)定义为将任意 $L^2(R)$ 空间中的函数 $f(t)$ 在小波基下 $\psi_{a,\tau}(t)$ 的展开:

$$CWT_f(a, \tau) = \langle f(t), \psi_{a,\tau}(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_R f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)} dt \quad (1-3)$$

其中连续小波基函数 $\psi_{a,\tau}(t)$ 为小波母函数 $\psi(t)$ 经不同的时间尺度伸缩(尺度因子 a)和不同的时间平移(平移因子 τ)而得到的函数:

$$\psi_{a,\tau}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) \quad a \in R, a \neq 0; \tau \in R \quad (1-4)$$

如果 $\psi(t)$ 是中心为 t_0 、有效宽度为 Δt 的偶对称函数, 则小波 $\psi_{a,\tau}(t)$ 的中心为 $at_0 + \tau$ 、宽度为 $a\Delta t$ 。如果把小波 $\psi_{a,\tau}(t)$ 视为宽度随 a 变化、位置随 τ 移动的时域窗, 那么连续小波变换可看作是连续变化的一组加窗傅立叶变换的汇集, 这些加窗傅立叶变换对不同的信号频率采用了不同的窗函数, 在高频用窄时域窗, 低频用宽时域窗, 称小波变换具有的这一宝贵性质为“变焦距”性质。

连续小波变换定量地给出了信号与小波函数系中的每个小波相关或接近的程度。若把小波看成是 $L^2(R)$ 空间的基函数系, 则连续小波变换就是信号在基函数系上的分解或投影。接下来的问题是: 能否根据各基函数上的投影重构原信号? 对连续小波来说, 已证明: 如果采用的小波满足可容许性条件式(1-1), 则逆变换存在, 即可根据信号的小波系数能精确地恢复原信号 $f(t)$:

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [CWT_f(\alpha, \tau)] \psi_{\alpha, \tau}(t) \frac{d\alpha}{\alpha^2} d\tau \quad (1-5)$$

其中常数 C_ψ 满足下式:

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (1-6)$$

一个一维 $f(t)$ 的连续小波变换是一个双变量的函数, 变量比 $f(t)$ 多一个, 故称连续小波变换是超完备的, 它要求的存储量和所代表的信息量都增加了。二维连续小波变换为:

$$f(x, y) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} CWT_f(\alpha, \tau_x, \tau_y) \psi_{\alpha, \tau_x, \tau_y}(x, y) d\tau_x d\tau_y \frac{d\alpha}{\alpha^3} \quad (1-7)$$

其中:

$$\psi_{\alpha, \tau_x, \tau_y}(x, y) = \frac{1}{|\alpha|} \psi\left(\frac{x - \tau_x}{\alpha}, \frac{y - \tau_y}{\alpha}\right) \quad (1-8)$$

$\psi(x, y)$ 是一个二维基本小波。

通常连续小波变换需在计算机上作近似数值积分处理, 因此对 α, τ 如何采样以尽可能精确重建原信号是首先需考虑的重要问题, 也就是框架条件问题。既然涉及采样问题, 则小波变换采样率 Ω_s 的选取要满足 Nyquist 条件, 即 $\Omega_s \geq 2\Omega_h$, 其中 $\Omega_s = 2\pi/\Delta$ (Δ 为采样间隔); Ω_h 为小波最高频率, 它既与小波的伸缩因子 α 有关, 对非带限小波还与小波频域窗的窗口宽度 $2B$ 有关, 对任一小波而言, α 越小或 B 越大, Ω_h 也就越大, 可见 α, B 与 Ω_h 之间存在一定的关系, 在进行离散化时应适当地选取小波参数值。

连续小波通常为带限的, 最高频率 Ω_h 可取非常大, 但 Ω_h 过大没有实际意义, 因此采用加频域窗的方法限定 Ω_h 。按照能量误差原则, 即加频域窗后的小波能量与原小波能量的相对误差控制在所允许的误差范围以内, 进而求得小波最高频率 Ω_h 。在频域加频域窗求最高频率对应于在时域选时域窗求窗内离散点的个数 N 。同样采取与频域窗相同的原理, 根据允许的时域能量误差反推时域窗宽度 N 。在求得 Ω_h, N 之后, 可根据下式求 $\alpha_{\min}$:

$$\begin{aligned} \Omega_h &= (\omega_0 + B)/\alpha_{\min} \\ \Rightarrow \alpha_{\min} &= (\omega_0 + B)/\Omega_h \\ \Rightarrow \alpha_{\min} &= (\omega_0 + B)/(\Omega_s/2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \alpha_{\min} &= (\omega_0 + B) / [(2\pi/\Delta)/2] \\ \Rightarrow \alpha_{\min} &= (\omega_0 + B) \Delta / \pi\end{aligned}\quad (1-9)$$

由上式可看出,若采样间隔 Δ 确定,则 $\alpha_{\min}$ 也随着确定,即表示小波所需点数确定。 α 的最大值 $\alpha_{\max}$ 须由选用小波及被分析信号的采用点数 M 确定。一般要求小波的采样点数用于被分析信号的数据点数 M :

$$\begin{aligned}2 \times (\alpha N / \Delta) + 1 &\leq M \Rightarrow \alpha \leq \frac{(M-1)\Delta}{2N} \\ \Rightarrow \alpha_{\max} &= \frac{(M-1)\Delta}{2N}\end{aligned}\quad (1-10)$$

在机械故障定位检测时,振动信号分析是机械运行状态监测的重要手段,其瞬变信号往往反应了重要的故障信息,如裂纹、剥蚀、脱落、松动和断裂等会引起脉冲性、随机性的振动,且是调幅、调频以及各种干扰噪声的综合作用,因此机械故障信号具有低能、短暂、瞬变的特点,而谱分析法只适用于频率成分集中、持续时间长的信号,故常用 $AR(P)$ 建模,而阶数 P 所确定的稳定性与先验知识多少有关。用连续小波 $\psi_{\alpha,\tau}(t) = |\alpha|^{-\frac{1}{2}} \psi(\frac{t-\tau}{\alpha})$ 分析的方法则无需先验知识,选取不同的 α, τ 值求得信号最突出点,最后根据工程测试参数,即可求出故障发生位置。

为减少小波变换系数冗余度,所采取的方法是将小波基函数的 α, τ 限定在一些离散点上取值,由此引入了离散小波变换(DWT)的概念。通常对 τ 进行均匀离散取值以覆盖整个时间轴。实际上小波变换中用得最多的变换是二进小波变换。首先给出二进小波的定义。

如果存在两个正常数 A 和 $B, 0 \leq A \leq B < \infty$,使得对于任何的 ω 式(1-11)成立:

$$A \leq \sum |\hat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2 \leq B \quad (1-11)$$

则称函数 $\psi \in L^2(R)$ 为二进小波,式(1-11)为稳定性条件。

再在式(1-11)两边同时除以 ω ,并在 $[1, 2]$ 区间内对 ω 积分得:

$$\int_1^2 \frac{A}{\omega} d\omega \leq \int_1^2 \frac{|\psi(2^{-j}\omega)|^2}{\omega} d\omega \leq \int_1^2 \frac{B}{\omega} d\omega \quad (1-12)$$

中间项进行变量替换:

$$\int_1^2 \frac{|\psi(2^{-j}\omega)|^2}{\omega} d\omega = \int_{2^{-j}}^{2^{-j+1}} \frac{|\psi(\omega)|^2}{\omega} d\omega \quad (1-13)$$

则可得到:

$$A \ln 2 \leq \int_0^\infty \frac{|\psi(\omega)|^2}{\omega} d\omega, \int_0^\infty \frac{|\psi(-\omega)|^2}{\omega} d\omega \leq B \ln 2 \quad (1-14)$$

如果 $A = B$, 则:

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\psi(\omega)|^2}{\omega} d\omega = 2A \ln 2 \quad (1-15)$$

说明 $\psi(t)$ 是满足可允许性条件的。限制 α, τ 都是离散值, 对于固定的伸缩步长 $\alpha_0 \neq 0$, 可选取 $\alpha = \alpha_0^m, m \in Z$ 。而对 τ 进行均匀离散取值要覆盖整个时间轴, 选取 $\tau = n\tau_0\alpha_0^m$, 其中 m, n 取遍整个整数域, 而 $\alpha_0 > 1, \tau_0 > 0$ 是固定的。于是, 相应的离散族为:

$$\psi_{m,n}(t) = \alpha_0^{-m/2} \psi\left(\frac{t - n\tau_0\alpha_0^m}{\alpha_0^m}\right) = \alpha_0^{-m/2} \psi(\alpha_0^{-m}t - n\tau_0) \quad (1-16)$$

更一般地, 取 $\alpha_0 = 2, \tau_0 = 1$, 则有:

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \psi(2^{-m}t - n) \quad (1-17)$$

这就是二进小波。在工程应用中, 由于信号 $f(t)$ 在给定尺度下的二进小波变换是连续变量 τ 的函数, 故常采用信号与小波的卷积形式:

$$W_a f(t) = f * \psi_a(t) \quad (1-18)$$

其中小波 $\psi_a(t)$ 是尺度因子 $a (a = 2^j)$ 对基小波 $\psi(t)$ 的伸缩:

$$\psi_a(t) = \frac{1}{a} \psi\left(\frac{t}{a}\right) \quad (1-19)$$

而平移参数 τ 由变量 t 取代。

二进小波变换的重要特性是平移不变性。设:

$$f_\tau(t) = f(t - \tau) \quad (1-20)$$

则有:

$$(W_{2^j} f_\tau)(x) = W_{2^j}[f_\tau(x)] \quad (1-21)$$

上式表明 $f(t)$ 平移的二进小波变换等于它的二进小波变换的平移, $f(t)$ 具有某种性质时, 则相应的 $W_{2^j} f(t)$ 也具有此性质。

同时, 二进小波变换仍是信号的一种超完备、冗余的表达, 从而对小波函数的要求大大降低。如选择平滑函数 $\theta(t)$ 的导函数作为小波函数 $\psi_a(t)$:

$$\begin{aligned} \psi_a(t) &= \frac{d\theta}{dt} \\ W_{2^j} f(t) &= f * \psi_{2^j}(t) = f * \frac{d\theta_{2^j}(t)}{dt} = 2^{-j} \frac{d}{dt} (f * \theta_{2^j}) \end{aligned} \quad (1-22)$$

意味着对函数 $f(t)$ 的小波变换可表达为用平滑函数 $\theta(t)$ 对 $f(t)$ 进行平滑后再求导。应

用此特点,小波变换能够有效抑制噪声提取突变的信号。而且信号变化越激烈,相应的小波变换的幅值越大。

设 $W_a f(x)$ 是 $f(t)$ 的小波变换,在尺度 a 下,在 t_0 的某一邻域 δ , 对所有 t 有:

$$|W_a f(t)| \leq |W_a f(t_0)| \quad (1-23)$$

则称 t_0 为小波变换的模极大值点, $W_a f(t_0)$ 为小波变换的模极大值。

由平移不变性可得到:信号的尖锐变化点和其小波变换模极大值逐一对应。这也是用小波变换进行信号奇异性检测的理论基础。若函数 $f(t)$ ($t \in R$) 在某处间断或某阶导数不连续,则称该函数在此处有奇异性;若函数 $f(t)$ 在其定义域内有无限次导数,则称 $f(t)$ 是光滑的或没有奇异性。一个突变的信号在其突变点必然是奇异的。奇异性指数 lipischitz α 就是用来刻画信号奇异性的一个参数。

设 $0 \leq \alpha \leq 1$, 在点 t_0 , 若存在常数 K , 对 t_0 的邻域 t 使得下式成立:

$$|f(t) - f(t_0)| \leq K |t - t_0|^\alpha \quad (1-24)$$

则称函数 $f(t)$ 在点 t_0 是 lipischitz α 。

如果 $\alpha = 1$, 则函数 $f(t)$ 在 t_0 是可微的, 函数 $f(t)$ 没有奇异性; 如果 $\alpha = 0$, 则函数 $f(t)$ 在 t_0 间断。 α 越大, 说明函数 $f(t)$ 越接近规则; α 越小, 说明函数 $f(t)$ 在 t_0 点变化越尖锐。而 α 的数值可通过小波变换模极大值在不同尺度的数值计算出来。

函数 $f(t) \in L^2(R)$ 与它的小波变换满足如下关系:

$$|W_a f(t)| \leq K (2^j)^\alpha \quad (1-25)$$

当 a 取值 2^j 且 $W_{2^j} f(t_0)$ 是小波变换模极大值时有:

$$|W_{2^j} f(t_0)| = K (2^j)^\alpha \quad (1-26)$$

故 lipischitz α 可由下式来计算:

$$\alpha = \log_2 \frac{W_{2^{M+1}} f(t_0)}{W_{2^M} f(t_0)} \quad M \in Z \quad (1-27)$$

信号的奇异性检测理论给出了具有突变性质的信号在何时发生突变以及变化剧烈程度的数学描述,即用的小波变换模极大值表示。信号的奇异点包含信号中最重要的信息,既可以由模极大值点刻画信号的奇异点与奇异性,也可由小波变换模极大值重构原信号,其主要步骤如下:

- (1) 构造小波变换 $W_{2^j} f(t)$;
- (2) 构造函数 $h(t)$, 它和 $f(t)$ 有相同的模极大值:

$$W_{2^j} f(t_n^j) = W_{2^j} h(t_n^j)$$

(3)构造 $h(t)$ 的小波变换 $W_2^j h(t)$ 。令 $g_j(t)$ 是逼近二进小波变换 $W_2^j f(t)$ 的函数序列, 且满足:

$$g_j(t_n^j) = W_2^j f(t_n^j)$$

(4)构造 $g_j(t)$:

①令 $\epsilon_j(t) = h_j(t) - g_j(t)$, 并使 $\|\epsilon_j(t)\|^2 + 2^{2j} \left\| \frac{d\epsilon_j}{dt} \right\|^2$ 最小。解得:

$$\epsilon_j(t) = \alpha e^{2^{-j}t} + \beta e^{-2^{-j}t}$$

其中系数 α, β 由边界条件确定:

$$\epsilon_j(t_0) = W_2^j f(t_0) - g_j(t_0)$$

$$\epsilon_j(t_1) = W_2^j f(t_1) - g_j(t_1)$$

t_0, t_1 是 $W_2^j f(t)$ 的两个相邻小波变换模极大值点。

②为保证重构稳定, 对 $g_j(t)$ 作约束则得到 $h_j(t)$ 。

③由 $h_j(t)$ 重构 $h(t)$ 又得到 $g_j(t)$, 并求得新的 $\epsilon_j(t)$ 和 $g_j(t)$ 。

④重复上述工程, 直至 $\epsilon_j(t)$ 达到工程要求。

最后得到的 $g_j(t)$ 或 $h_j(t)$ 即为待求的小波系数 $W_2^j h(t)$, 进而可得 $h(t) \approx f(t)$ 。

在纺织检测中, 可利用二进小波变换对由乌斯特干涉仪采集到的纱线信号检测和识别棉结。当在小尺度上信号比较平缓, 而在大尺度上则能明显地看出棉结对应的奇异点发生位置。

由于 $L^2(R)$ 空间连续函数 $f(t)$ 的连续小波变换、离散小波变换等基本概念都是对任意尺度空间的连续信号定义的, 而实际处理中遇到的信号多数是经采样系统测得的一系列(一维和二维)离散信号, 是有一定格式的离散数据, 故重点研究离散序列的小波变换(DTWT), 也更符合工程实践应用的要求。要澄清的是离散小波变换与离散序列小波变换两者概念的区别: 前者是将连续函数变换为离散时间序列的方法, 相似于傅立叶变换级数; 后者是将离散时域函数变换为离散频域函数, 相似于离散傅立叶变换。

第二节 多分辨率分析

多分辨率分析又称多尺度分析, 是建立在函数空间上的理论, 是其创建者 S. Mallat 在研究图像处理问题时建立的一套理论。在分析连续小波变换时论述到尺度因子 α 的重要特点: 当尺度 α 较大时, 视野宽而分辨率低, 可以作概貌观察; 当尺度 α 较小时, 视野窄而分辨率高, 可作细节观察。但不同 α 值下分析的品质因数(中心频率与带宽的比值)却保持不变。这种由粗及精对事物的逐级分析称为多分辨率分析。同时多分辨率分析思想与数字信号处理中的多采样率滤波组思想接近, 故便于熟悉数字信号处理的工程人员理解和运用小波变换。

定义函数 $\phi(t) \in L^2(R)$ 为尺度函数, 若其整数平移系列 $\phi_k(t) = \phi(t - k)$ 满足:

$$\langle \phi_k(t), \phi_{k'}(t) \rangle = \delta_{kk'} \quad (1-28)$$

定义由 $\phi_k(t)$ 在 $L^2(R)$ 空间张成的闭子空间为 V_0 , 称为零尺度空间:

$$V_0 = \overline{\text{span}\{\phi_k(t)\}}, k \in Z \quad (1-29)$$

根据线性空间的基本性质有: 对于任意 $f(t) \in V_0$, 有:

$$f(t) = \sum_k \alpha_k \phi_k(t) \quad (1-30)$$

将尺度函数 $\phi(t)$ 在平移的同时进行尺度的伸缩, 得到一个尺度和位移均可变化的函数集合:

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \phi(2^{-j}t - k) = \phi_k(2^{-j}t) \quad (1-31)$$

则称每一固定尺度 j 上的平移序列 $\phi_k(2^{-j}t)$ 所张成的空间 V_j 位尺度为 j 的尺度空间:

$$V_j = \overline{\text{span}\{\phi_k(2^{-j}t)\}} \quad k \in Z \quad (1-32)$$

同样对于任意 $f(t) \in V_j$, 有:

$$f(t) = \sum_k \alpha_k \phi_k(2^{-j}t) = 2^{-\frac{j}{2}} \sum_k \alpha_k \phi(2^{-j}t - k) \quad (1-33)$$

就是说随着 j 的增大, 函数 $\phi_{j,k}(t)$ 的定义域变大, 且实际的平移间隔 $(2^j \Delta \tau)$ 相应变大, 则它的线性组合不能表示函数(小于该尺度)的细微变化, 因此其张成的尺度空间只能包括大尺度的缓变信号。相反, 随着尺度 j 的减少, 函数 $\phi_{j,k}(t)$ 的定义域变小, 且实际的平移间隔 $(2^j \Delta \tau)$ 也相应变小, 则它的线性组合便能表示函数(小尺度范围)的细微变化, 因此其张成的尺度空间所包含的函数增多, 既包括小尺度信号, 也包括大尺度缓变信号。

多分辨率分析是指满足下述性质的一系列闭子空间 $\{V_j\}, j \in Z$:

(1)一致单调性:

$$\cdots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \cdots \quad (1-34)$$

(2)渐近完全性:

$$\bigcap_{j \in Z} V_j = \{0\}; \bigcup_{j \in Z} V_j = L^2(R) \quad (1-35)$$

(3)伸缩规则性:

$$f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2^j t) \in V_0 \quad j \in Z \quad (1-36)$$

(4)平移不变性:

$$f(t) \in V_0 \Rightarrow f(t - n) \in V_0 \quad \forall n \in Z \quad (1-37)$$

(5) 正交基存在性: 存在 $\phi \in V_0$, 使得 $\{\phi(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ 是 V_0 的正交基。

其中正交基存在性条件可放宽为 Rieze 基存在性。由上述定义可知: 多分辨率分析的一系列尺度空间是由同一尺度函数在不同尺度下张成的, 但 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 空间相互包含, 不具有正交性。为寻找一组 $L^2(\mathbb{R})$ 空间的正交基, 定义尺度空间 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 的补空间为 W_j :

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j, W_j \perp V_j \quad (1-38)$$

若 $f(t) \in W_0$, 则 $f(t) \in V_{-1} - V_0$, 且:

$$f(t) \in W_0 \Leftrightarrow f(2^{-j}t) \in W_j \quad j \in \mathbb{Z} \quad (1-39)$$

设 $\{\psi_{0,k}; k \in \mathbb{Z}\}$ 为空间 W_0 的一组正交基, 则由此母函数伸缩平移得到的小波基 $\{\psi_{j,k} = 2^{-\frac{j}{2}}\psi(2^{-j}t - k); j \in \mathbb{Z}; k \in \mathbb{Z}\}$ 必为正交小波基。故称 ψ 为小波函数, W_j 是尺度为 j 的小波空间。对于任意函数 $f(t) \in V_0$, 可将它分解为细节部分 W_1 和大尺度逼近部分 V_1 , 然后再对大尺度逼近部分 V_1 进一步分解, 如此重复就可得到任意尺度上的逼近部分和细节部分, 这就是多分辨率分析的框架。

第三节 尺度函数与小波的构造

由多分辨率分析概念可见, $\phi(t)$ 和 $\psi(t)$ 分别为尺度空间 V_0 与小波空间 W_0 的一个标准正交基函数, $\phi(t)$ 和 $\psi(t)$ 在 V_{-1} 空间的正交基 $\phi_{-1,n}(t)$ 线性展开为:

$$\phi(t) = \sum_n h_0(n) \phi_{-1,n}(t) = \sqrt{2} \sum_n h_0(n) \phi(2t - n) \quad (1-40)$$

$$\psi(t) = \sum_n h_1(n) \phi_{-1,n}(t) = \sqrt{2} \sum_n h_1(n) \phi(2t - n) \quad (1-41)$$

其中展开系数 $h_0(n)$ 和 $h_1(n)$ 分别为:

$$h_0(n) = \langle \phi, \phi_{-1,n} \rangle \quad (1-42)$$

$$h_1(n) = \langle \psi, \phi_{-1,n} \rangle \quad (1-43)$$

式(1-42)和式(1-43)描述的是相邻二尺度空间基函数之间的关系, 称此二式为二尺度方程, 是多分辨率分析赋予尺度函数 $\phi(t)$ 、小波函数 $\psi(t)$ 的最基本特征。二尺度关系在任意相邻尺度 $j, j-1$ 之间有:

$$\phi_{j,0}(t) = \sum_n h_0(n) \phi_{j-1,n}(t) \quad (1-44)$$

$$\psi_{j,0}(t) = \sum_n h_1(n) \phi_{j-1,n}(t) \quad (1-45)$$

展开系数 $h_0(n)$ 、 $h_1(n)$ 不随尺度 j 的变化而变化, 是由尺度函数 $\phi(t)$ 和小波函数 $\psi(t)$ 决