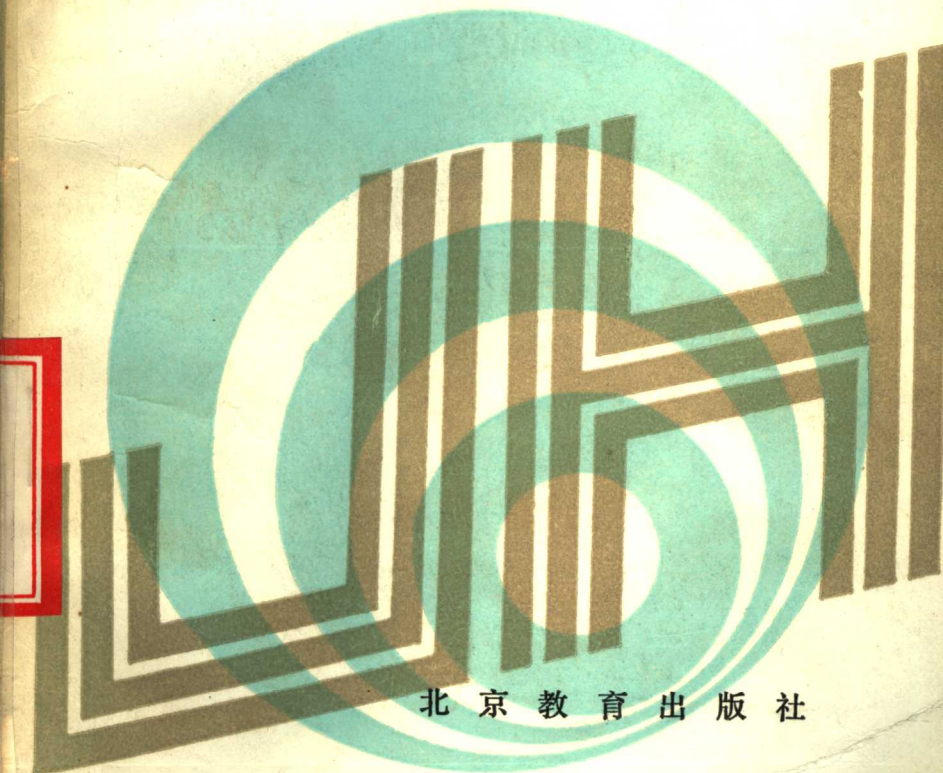


数理化基础知识丛书

初中数学基础知识

平面几何 (第一册)



北京教育出版社

数理化基础知识丛书

初中数学基础知识 平面几何

第一册

北京实验中学数学教研室编

北京教育出版社

数理化基础知识丛书
初中数学基础知识平面几何第一册
北京实验中学数学教研室编

北京教育出版社出版
(北京北三环中路6号)
新华书店北京发行所发行
马池口印刷厂印刷

787×1092毫米 32开本 6.25印张 133,000 字
1988年8月第1版 1988年8月第1次印刷
印数: 1—7,300
ISBN 7-5303-0030-X/G·25
定 价: 1.75元

编写说明

为了帮助广大青年和在校学生学好数、理、化，我社约请了北京市人大附中、北大附中、清华附中、北京实验中学等校的有经验的教师共同编写数理化基础知识丛书。

《初中数学基础知识》共分六册与课本相对应。各册均分章编写，每章包括内容提要，重点、难点解析，典型例题，习题和自我检查题，最后附答案或提示。书中对初中数学基础知识和概念作了由浅入深的剖析，对学生学习初中数学中不易理解之处，易出差错、易混淆的内容，作了详尽的讲解和辅导。对解题的思路，方法，技巧进行了全面的介绍。

本书是《初中数学基础知识平面几何》第一册，可以作为在校学生学习数学的辅导书，也可以作为中学数学教师的数学参考书。

《初中数学基础知识》编写组成员是北京师范大学附属实验中学蔡晓东、杨淑云、金元、张春条、李芳宜、张继林、任孝娟、储瑞年。

由于我们的水平有限，难免出现一些错误和缺点，希望读者批评指正。

目 录

第一章 基本概念	1
一、内容提要.....	1
1. 本章的主要性质	1
2. 本章的重点和难点	1
二、重点、难点解析.....	2
1. 直线、射线、线段的联系与区别	2
2. “线段”与“线段的长度”是两个不同的概念	3
3. 如何画线段的和与差	4
*4. 如何学习几何语言	5
5. 如何理解角的概念和正确使用 表示角的符号	7
6. 如何提高角度计算的准确性	8
7. 如何辨清各种不同角的特点	9
三、典型例题.....	11
习题一.....	21
自我检查题一.....	23
第二章 相交线、平行线	26
一、内容提要.....	26
二、重点、难点解析.....	26
1. 对顶角	26
2. 垂线与斜线	29
3. 点到直线的距离	32

4. 三线八角	33
5. 平行线	35
6. 平行线的判定	36
7. 平行线的性质	38
8. 命题	38
9. 定理	41
10. 定理的证明	41
三、典型例题	42
习题二	49
自我检查题二	53
第三章 三角形	57
一、内容提要	57
1. 主要概念	57
2. 三角形的分类	57
3. 性质定理	57
4. 判定定理	58
5. 基本作图	59
二、重点、难点解析	59
1. 三角形的内角和外角	59
2. 三角形中的几种主要线段	61
3. 三角形的三边的关系	64
4. 三角形的分类	65
5. 三角形的内角和	66
6. 全等三角形	68
7. 等腰三角形	71
8. 基本作图	75
9. 直角三角形	76

10. 逆命题、逆定理	79
11. 线段的垂直平分线和角平分线	81
12. 轴对称图形	82
三、典型例题	84
习题三	94
自我检查题三	97
第四章 四边形	100
一、内容提要	100
1. 四边形和它的分类	100
2. 特殊四边形的性质和判定	100
3. 几个有关的定理	102
二、重点、难点解析	103
1. 多边形的有关概念	103
2. 多边形的内角和	104
3. 对应边平行(或垂直)的两个角	105
4. 平行四边形	106
5. 矩形	108
6. 菱形	108
7. 正方形	109
8. 中心对称和中心对称图形	109
9. 梯形	111
10. 平行线等分线段	113
11. 三角形、梯形的中位线	114
12. 三角形中的共点线	116
三、典型例题	118
习题四	132
自我检查题四	136

第五章 面积、勾股定理	139
一、内容提要	139
二、重点、难点解析	140
1. 面积概念的实质	140
2. 面积的两个性质	140
3. 多边形的面积公式	141
4. 面积的分割法、割补法和补充法	142
5. 多边形面积的比	147
6. 等积变换	154
7. 勾股定理发展历史	155
8. 勾股定理及其证明	157
9. 勾股定理的推广	161
10. 勾股定理的逆定理	167
三、典型例题分析	168
习题五	180
自我检查题五	182
答案或提示	184

第一章 基本概念

一、内 容 提 要

本章的主要内容是平面几何最基本的图形——直线、线段、射线和角的概念，画法及基本性质，这是平面几何的基础部分。

主要的概念是：点、直线、射线、线段、两点的距离、线段的中点、角、平角、周角、直角、锐角、钝角、余角、补角和角的平分线。

1. 本章的主要性质

(1) 直线的性质：

- ① 两点确定一条直线；
 - ② 两条直线相交，只有一个交点。
- (2) 线段的性质：两点之间线段最短。

(3) 余角和补角的性质：

- ① 同角(或等角)的余角相等；
- ② 同角(或等角)的补角相等。

2. 本章的重点和难点

线段与角的概念与画法，以及它们的几何语言的表述，难点是对几何概念、图形性质的理解及其语言的表述，关键在于对各种图形的考察与分析，以及对概念与性质的语言表

述的严格训练.

二、重点、难点解析

1. 直线、射线、线段的联系与区别

(1) 直线、射线、线段的联系:

① 都是平面图形;

② 都是点的集合, 每一条直线、射线或者线段上都有无限多个点;

③ 射线和线段是直线的一部分; 一条直线上任意一点都把这条直线分成两条射线, 如图 1-1, 点 O 把直线 AB 分成两条射线 OA 和 OB . 因此, 有时候我们也把一条射线说成一条半直线.

④ 由线段、射线延伸得到直线. 把一条射线向相反的方向无限延伸, 就得到一条直线. 线段向一方无限延伸, 就得到射线, 线段向两方无限延伸, 就得到直线.

(2) 直线、射线、线段的区别:

① 端点个数不同, 直线没有端点, 射线有一个端点, 线段有两个端点.

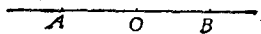


图 1-1



图 1-2

② 表示方法不同;

直线可以用表示它上面任意两个点的大写字母来表示, 也可以用一个小写字母来表示, 如图 1-2 中的直线可以记作直线 AB , 也可以记作直线 l .

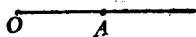


图 1-3



图 1-4

射线用表示它的端点和射线上任意一点的大写字母来表示，表示端点的字母写在前面，如射线 OA （图 1-3）。

线段用表示它的两个端点的两个大写字母来表示，也可以用一个小写字母表示。如图 1-4 甲中的线段记作线段 AB ，图 1-4 乙中的线段记作线段 a 。

③ 能否延长不同；直线是向两方无限延伸着的，因此延长直线 AB 的说法就是错误的。射线是向一方无限延伸着的，因此不能说延长射线 OA ，而只能反向延长射线 OA 。线段可以向两方延长。

④ 有否确定的长度不同。直线和射线都没有确定的长度，因此两条直线或者两条射线之间不能比较大小，不能说一条直线比另一条直线长，也不能说一条射线比另一条射线长等。线段有确定的长度，可以比较两条线段的长短。

2. “线段”与“线段的长度”是两个不同的概念

连结两点的线段的长度叫做两点的距离。但有的学生常常把两点的距离的概念说成是“连结两点的线段”。“线段”是一个图形，“线段的长度”是一个正数。距离的概念是“线段的长度”，它是一个非负数，不是一个图形。不能把两点的距离说成是线段。

我们还要注意到，在课本中，“线段”和“线段的长度”的记法是没有作区分的。如图 1-5，线段 AB ，量得它的长度是 3.5cm ，记作 $AB=3.5\text{cm}$ 。但这并不会引起混乱，当你



图 1-5

说线段 AB 时, 就是指这个图形本身, 而当你说 3.5cm 时, 就是指这条线段的长度, 即 A 、 B 两点的距离。

3. 如何画线段的和与差

几何问题与代数问题不同的特点之一, 就是要画图。几何中有一类专门画图的题目, 叫做画图题或者作图题。作图问题表达的格式, 由已知, 求作和作法三部分组成。已知部分是写问题所给出的条件, 求作部分是写问题要求作出的图形和性质, 作法部分是写作图的过程并指出所求的图形是什么。

作一条线段等于已知线段有两种方法, 一是用刻度尺先量出已知线段的长度, 再作出等于这条线段的线段; 二是用直尺和圆规作图, 通常叫做尺规作图。应该根据实际情况或者题目的要求确定作图时采用的工具和方法。

例如已知线段 a 、 b 、 c ($b < c$), 用圆规和直尺画一条线段, 使它等于 $2a - b + c$ 。

这就是一个尺规作图的问题, 它的表述如下:

已知: 线段 a 、 b 和 c ($b < c$)。

求作: 线段 AB , 使 $AB =$

$$2a - b + c.$$

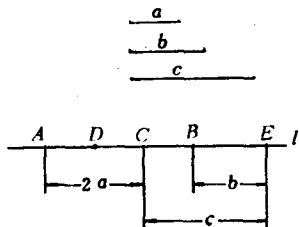


图 1-6

作法: (1) 作直线 l 。

(2) 在直线 l 上任取一点 A 。

(3) 在直线 l 上, 从点 A 起向一方顺次截取 $AD = DC$

$$=a, CE=c.$$

(4) 在线段 AE 上, 从点 E 起向相反的方向截取 $EB=b$.

AB 就是所求的等于 $2a-b+c$ 的线段.

在这个例子中, 也可先画线段 $c-b$, 再画线段 $2a+(c-b)$.

注意求作部分的写法, “使”字前面表示题目要求作出的图形, “使”字后面指出所求图形应满足的条件, 即题目的要求.

在作法的最后, 一定要指出哪一个图形是题目所要求作出的图形.

4. 如何学习几何语言

几何概念和性质的表述, 有的是用文字, 有的是用符号, 更多的是两者的结合, 即在文字的叙述中出现了各种不同的符号. 我们把这些表述几何概念和性质的文字和符号都称为几何语言. 正确的理解和使用几何语言, 是学习和运用几何知识的基础, 在刚开始学习平面几何时, 要特别重视几何语言的训练.

学习几何语言要注意以下几点:

(1) 要充分重视几何语言与普通语言的不同, 真正搞懂每一个字, 每一个词, 每一个符号的含义, 理解要确切, 不能似是而非.

例如: “经过两点有一条直线, 并且只有一条直线”. 这是用文字来表述直线的基本性质的几何语言. 这一句话就不是很好理解的, 有的学生认为“有一条”和“只有一条”是一个意思, 认为说两遍是重复, 因此他们把这条基本性质说成

是，过两点只有一条直线。这种理解就错了。在数学中，前面的“有”是表示存在性，意思是说，过两点存在着至少一条直线，后面的“只有”表示唯一性，数学中“只有”并不保证一定有，而是顶多只有有的意思。前后两层意思合起来，就是过两点存在着唯一的一条直线。这种语言，今后经常遇到，并逐渐简化成“有且只有”。两点确定一直线中的“确定”也是“有且只有”的意思。

(2) 基本语句要记熟，并且要会画图，对照图形叙述几何语言，帮助理解和记忆。

本章中的基本语句如下：

- ① 直线 AB 经过点 C ；(图 1-7)
- ② 直线 AB 、 CD 相交于点 O ；(图 1-8)
- ③ 点 D 在直线 EF 上，但在直线 GH 外；(图 1-9)
- ④ 直线 a 、 b 、 c 两两相交；(图 1-10)
- ⑤ 连结 AB ，并延长线段 AB 至 C ，使 $BC = AB$ ；(图 1-11)

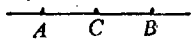


图 1-7

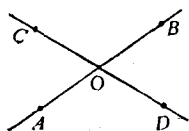


图 1-8

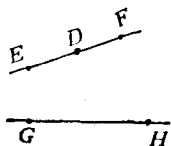


图 1-9

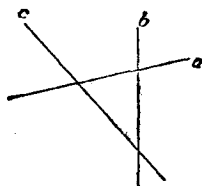


图 1-10

⑥ 在线段 AB 的反向延长线上取点 K , 使 $AK = AB$.
(图 1-12)

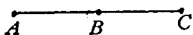


图 1-11

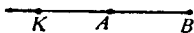


图 1-12

5. 如何理解角的概念和正确使用表示角的符号

在课本中给出了角的两种定义。一种定义是“有公共端点的两条射线”。这一定义是由两个条件规定的,“两条射线”和“有公共端点”,缺一不可。因为角的两边都是射线,所以“在 $\angle ABC$ 的一边的延长线上取一点 D ”这种说法就是错误的,应该改为:“在 $\angle ABC$ 的一边上取一点 D ”。如果不说有公共端点,只说:“两条射线组成的图形叫做角”也是不正确的。

角的另一定义是“由一条射线绕它的端点旋转而成的”,这种角是在运动变化中产生的,如时钟的时针或分针绕轴旋转所成的角,单摆摆动时所成的角等。

角的符号是“ $\angle$ ”,在一开始就要写正确.不要写成“ $<$ ”、“ $\vee$ ”等。对于角的四种表示法都应熟悉,但要注意,使用简单记法的条件,否则会产生混乱。

我们看看下列角的表示方法是否正确?

(1) $\angle O = \angle AOB + \angle BOC$; (图 1-13)

(2) $\angle 1$; (图 1-14)

(3) $\because \angle 1 = \angle 2$, 且 $\angle 2 = 40^\circ$. $\therefore \angle 1 = 40^\circ$. (图 1-15)

下面三种表示角的方法都有错误:

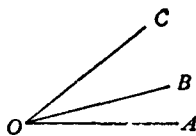


图 1-13

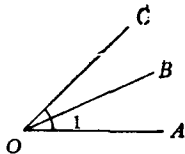


图 1-14

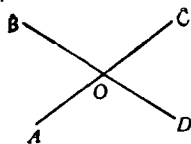


图 1-15

(1) 在图 1-13 中, $\angle O$ 是指的哪个角呢? 是 $\angle AOB$ 还是 $\angle BOC$, 还是 $\angle AOC$ 呢? 只有当以某一点为顶点的角只有一个时, 这个角才可以用表示这个点的字母来表示. 图 1-13 中的 $\angle AOC$ 不能记作 $\angle O$, 不然就会引起混乱.

(2) 图 1-14 中的 $\angle 1$ 不知是指的 $\angle AOC$ 呢? 还是指的 $\angle AOB$? 如果是表示 $\angle AOC$ 就要记成 $\angle AOC$ 而不能记成 $\angle 1$. 如果是表示 $\angle AOB$, 那么角内的小弧线只能画在 $\angle AOB$ 内.

(3) 在图 1-15 中并没有用数字来表示角, 在计算或推理时, 为简便起见, 可以用数字表示角, 但在图中必须要标明出来.

6. 如何提高角度计算的准确性

在度、分、秒之间的互化计算中, 由于对 60 进位制感到不习惯, 特别是在将度化为分、秒与进行乘除计算时容易出现错误.

为了提高计算的准确性, 这就要求掌握运算的规律和合理的运算步骤. 把低级单位化成高级单位, 一般有两种方法,

如把 $45'$ 化成度, (1) $45' \div 60' = 0.75(\text{度})$; (2) $\left(\frac{1}{60}\right)^\circ \times 45$

$=0.75^\circ$ 。课本中采用第二种方法，它的优点是与把高级单位化成低级单位的运算统一起来，如把 0.75° 化成分： $60' \times 0.75 = 45'$ 。

在角度的乘除计算中，课本中讲的方法是横式计算，演算不方便，可以类似于多位数的乘除法进行竖式演算。

例如计算(1) $17^\circ 23' 45'' \times 4$ ；(2) $15^\circ 20' \div 6$ 。可以按下述格式进行。

$$(1) \quad \begin{array}{r} 17^\circ 23' 45'' \\ \times) \quad \quad \quad 4 \\ \hline 68^\circ 92' 180'' \end{array} = 69^\circ 35' ,$$

$$\therefore 17^\circ 23' 45'' \times 4 = 69^\circ 35' .$$

$$(2) \quad \begin{array}{r} 2^\circ 33' 20'' \\ 6 \overline{) 15^\circ 20' 00''} \\ \underline{12^\circ} \\ 200' \quad (3 \times 60' + 20' = 200') \\ \underline{198'} \\ 120'' \quad (2 \times 60'' = 120'') \\ \underline{120''} \\ 0 \end{array}$$

$$\therefore 15^\circ 20' \div 6 = 2^\circ 33' 20'' .$$

注意：在(1)中要把 $180''$ 化成 $3'$ ，再把 $92' + 3'$ 化成 $1^\circ 35'$ 。在(2)中第一次余数 $3^\circ 20'$ 要化成 $200'$ ，再继续除下去，以下类推。

7. 如何辨清各种不同角的特点

本章中与角有关的概念比较多，容易混淆，在学习时要结合图形辨清各种角的特点。即各不相同的地方，在此基础