● 高校经典教材配套辅导系列

数学分析（上册）

习题精解

吴传生 主编

涵盖课程重点

精炼方法技巧

精解课后习题

中国科学技术大学出版社

高校经典教材配套辅导系列

数学分析(上册)习题精解

主　编　吴传生　张小柔

副主编　余新华　黄小为

主　审　朱　勇

中国科学技术大学出版社

2004·合肥

图书在版编目(CIP)数据

数学分析(上、下册)习题精解/吴传生主编.—合肥:中国科学技术大学出版社,
2004.9
(高校经典教材配套辅导系列丛书)
ISBN 7-312-01731-2

Ⅰ.数… Ⅱ.吴… Ⅲ.数学分析—高等学校—解题 Ⅳ.O17-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 093903 号

中国科学技术大学出版社出版发行
(安徽省合肥市金寨路 96 号,230026)
华中师范大学印刷厂印刷
全国新华书店经销

开本:787×960/16 印张:40.125 字数:705 千字
2004 年 9 月第 1 版 2004 年 9 月第 1 次印刷
ISBN 7-312-01731-2/O·295 定价:48.00 元(上、下册)

前　言

本书是华东师范大学数学系所编写的《数学分析》(第三版)上册和下册的习题全解。

本书在每章的习题解答之前,简要地介绍本章的教学基本要求及教学的重点和难点。习题解答按每章每节的顺序编排,与教材的题号一致,所用符号与教材相符,有些题目有一题多解。

通过本书的参考和学习,可使读者提高分析问题和解决问题的能力,加深对基本概念、基本理论和基本方法的理解和掌握,还会增强学好本门课程的信心和提高对本门课程的学习兴趣。

《数学分析》是数学类各专业及其他一些对数学要求较高的专业的一门重要基础课程,每位学生只有经过认真学习课程内容,独立思考和严格的解题训练,才有可能在数学素质上有较大的提高。我们希望读者先自行思考,自己解题,然后与题解进行对照比较,达到对问题的更深刻和更透彻的理解的目的。如果自己不亲自动脑筋思考,不亲手动手做题,而是照抄,那将是绝对无益的。

本书可作为大学生学习数学分析课程的参考书,也可供报考研究生的读者作为复习参考书。

本书的不足之处,诚恳地希望读者批评指正!

编　者

2004.05

目　　录

第一章　实数集与函数

第二章　数列极限

第三章　函数极限

第四章 函数的连续性

第五章 导数和微分

第六章 微分中值定理及其应用

第七章 实数的完备性

第八章　不定积分

第九章　定积分

第十章　定积分的应用

第十一章　反常积分

第一章　实数集与函数

一、教学基本要求

要求：

1. 了解数学的发展史与实数的概念，理解绝对值不等式的性质，会解绝对值不等式，弄清区间和邻域的概念；

2. 掌握函数的定义及函数的表示法，了解函数的运算；

3. 理解和掌握一些特殊类型的函数.

主要内容：

1. 实数概述：实数的概念，实数的性质，绝对值，区间与邻域；

2. 函数概念：函数的定义，函数的表示法(解析法、列表法、图像法)，分段函数；

3. 几种特殊类型的函数：有界函数，单调函数，奇函数与偶函数，周期函数；

4. 函数的运算：四则运算，复合函数，反函数；

5. 初等函数，反函数.

重点：区间和邻域的概念.

二、习题解答

§1　实数

1. 设 a 为有理数，x 为无理数. 证明：

(1) $a+x$ 为无理数；　　　(2) 当 $a\neq 0$ 时，ax 也是无理数.

证　(1) 反证法：若对 a，$a+x$ 均为有理数；设 $a=\dfrac{p_1}{q_1}$，$a+x=\dfrac{p_2}{q_2}$，(p_1,p_2,q_1,q_2 为整数，$q_1,q_2\neq 0$)，则

$$x=(a+x)-a=\frac{p_2}{q_2}-\frac{p_1}{q_1}=\frac{q_1p_2-q_2p_1}{q_1q_2},$$

因 $q_1p_2-q_2p_1$，q_1q_2 均为整数，所以 x 也是有理数，与题设矛盾. 所以 $a+x$ 为无理数.

(2) 反证法：若 a，ax 均为有理数，设 $a=\dfrac{p_1}{q_1}$，$ax=\dfrac{p_2}{q_2}$，(p_1,p_2,q_1,q_2，为整数，$q_1,q_2\neq 0$)，则

$$x=\frac{ax}{a}=\frac{p_2q_1}{p_1q_2},$$

因 p_2q_1,p_1q_2 均为整数,所以 x 也是有理数,与题设矛盾.所以 ax 为无理数.

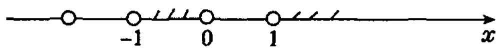
2.试在数轴上表示出下列不等式的解:

(1)$x(x^2-1)>0$;

解 $\begin{cases}x>0,\\x^2-1>0,\end{cases}$ 得:$\begin{cases}x>0,\\x^2>1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x>0,\\x>1\text{ 或者 }x<-1,\end{cases}$ 故 $x>1$;

或 $\begin{cases}x<0,\\x^2-1<0,\end{cases}$ 得:$\begin{cases}x<0,\\x^2<1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x<0,\\-1<x<1,\end{cases}$ 故 $-1<x<0$;

综合两式:$\{-1<x<0\}\cup\{x>1\}$.



(2)$|x-1|<|x-3|$;

解法1 $\begin{cases}x\leqslant1,\\1-x<3-x,\end{cases}$ 得 $x\leqslant1$;或 $\begin{cases}1<x\leqslant3,\\x-1<3-x,\end{cases}$ 得 $1<x<2$;

或 $\begin{cases}x>3,\\x-1<x-3,\end{cases}$ 无解;

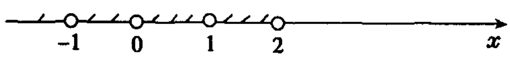
综合3式解为:$x<2$.

解法2 $|x-1|<|x-3|$,

$\therefore(x-1)^2<(x-3)^2$,

$\therefore x^2-2x+1<x^2-6x+9$,

$\therefore x<2$.



(3)$\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}\geqslant\sqrt{3x-2}$.

解 按题意:$\begin{cases}x\geqslant1,\\x\geqslant\dfrac{1}{2},\\x\geqslant\dfrac{2}{3},\end{cases}$ 得 $x\geqslant1$,而这时 $\sqrt{x-1}<\sqrt{2x-1}$,故无解.

3.设 $a,b\in\mathbf{R}$,证明:若对任何正数 ε 有 $|a-b|<\varepsilon$,则 $a=b$.

证法1 若对 $\forall\,\varepsilon>0$,有 $|a-b|<\varepsilon\Longrightarrow-\varepsilon<a-b<\varepsilon\Longrightarrow\begin{cases}a<b+\varepsilon,\\b<a+\varepsilon,\end{cases}$

按例2有$\begin{cases} a\leqslant b, \\ b\leqslant a, \end{cases}$所以 $a=b$.

证法2 反证法:若 $a\neq b$,则$|a-b|=A>0$.

取 $\varepsilon=\dfrac{A}{2}>0$ 时,$|a-b|>\varepsilon$ 与题设矛盾,

$\therefore a=b$.

4.设 $x\neq 0$,证明:$\left|x+\dfrac{1}{x}\right|\geqslant 2$,并说明其中等号何时成立.

证 因 $0\leqslant(|x|-1)^2=x^2+1-2|x|$,

$\Longrightarrow x^2+1\geqslant 2|x|,\Longrightarrow \dfrac{x^2+1}{|x|}=\left|x+\dfrac{1}{x}\right|,\geqslant 2$.

当且仅当$|x|=1$,即 $x=\pm 1$ 时,等号才成立.

5.证明:对任何 $x\in\mathbf{R}$ 有

(1)$|x-1|+|x-2|\geqslant 1$;

证 $|x-1|+|x-2|\geqslant|(x-1)-(x-2)|=1$.

(2)$|x-1|+|x-2|+|x-3|\geqslant 2$;

证 $|x-1|+|x-2|+|x-3|\geqslant|(x-1)-(x-3)|+|x-2|\geqslant 2+0=2$.

6.设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$($\mathbf{R}^+$ 表示全体正实数的集合),证明

$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|\leqslant|b-c|$

你能说明此不等式的几何意义吗?

证 因 $b^2+c^2\geqslant 2bc,\Longrightarrow a^2(b^2+c^2)\geqslant 2a^2bc$,

$\Longrightarrow a^4+a^2(b^2+c^2)+b^2c^2\geqslant(a^2+bc)^2$,

$\Longrightarrow a^2-\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}\leqslant -bc$,

$\Longrightarrow(a^2+b^2)+(a^2+c^2)-2\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}\leqslant(b-c)^2$,

$\Longrightarrow\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|\leqslant|b-c|$.

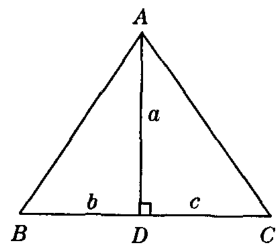


图1-1

几何意义:如图1-1所示:三角形两边之差小于或等于它们在第三边上投影之差.

7.设 $x>0,b>0,a\neq b$,证明:$\dfrac{a+x}{b+x}$介于1与$\dfrac{a}{b}$之间.

证 若 $a\leqslant b$,因 $x>0,b>0$,

$$\Rightarrow \begin{cases} a+x\leqslant b+x, \\ ax\leqslant bx, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+x\leqslant b+x, \\ ab+ax\leqslant ab+bx, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a+x}{b+x}\leqslant 1, \\ \dfrac{a+x}{b+x}\geqslant \dfrac{a}{b}, \end{cases} \text{即}\frac{a}{b}\leqslant\frac{a+x}{b+x}\leqslant 1;$$

若 $a>b$,因 $x>0,b>0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} a+x>b+x, \\ ab+ax>ab+bx, \end{cases} \Rightarrow 1<\frac{a+x}{b+x}<\frac{a}{b};$$

综合上述结果,结论成立.

[注] 本题可推广到一般情况

$b_i>0,(i=1,2,\cdots,n)$,则$\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{b_1+\cdots+b_n}$在$\dfrac{a_1}{b_1},\dfrac{a_2}{b_2},\cdots,\dfrac{a_n}{b_n}$的最大值与最小值之间.

证 不妨设

$$\frac{a_1}{b_1}\leqslant\frac{a_2}{b_2}\leqslant\cdots\frac{a_n}{b_n},$$

则 $a_1\leqslant\dfrac{a_n}{b_n}b_1,\cdots,a_{n-1}\leqslant\dfrac{a_n}{b_n}b_{n-1},a_n\leqslant\dfrac{a_n}{b_n}b_n,$

$$\therefore a_1+\cdots+a_{n-1}+a_n\leqslant\frac{a_n}{b_n}(b_1+\cdots+b_{n-1}+b_n),$$

$$\therefore \frac{a_1+\cdots+a_{n-1}+a_n}{b_1+\cdots+b_{n-1}+b_n}\leqslant\frac{a_n}{b_n},$$

同理 $\dfrac{a_1+\cdots+a_{n-1}+a_n}{b_1+\cdots+b_{n-1}+b_n}\geqslant\dfrac{a_1}{b_1}.$

8. 设 p 为正整数,证明:若 p 不是完全平方数,则$\sqrt{p}$是无理数.

证 反证法.若$\sqrt{p}=\dfrac{h}{q}$是有理数(h,p 是正整数,$\dfrac{h}{q}$是既约分数).

$$\Rightarrow p=\frac{h^2}{q^2}\Rightarrow h^2=pq^2,\text{则}:$$

(ⅰ)若 $q=1\Rightarrow p=h^2$,与题设矛盾;

(ⅱ)若 $q\neq 1\Rightarrow q$ 必能整除 h,这与$\dfrac{h}{q}$是既约分数矛盾.

所以$\sqrt{p}$必是无理数.

9. 设 a,b 为给定实数,试用不等式符号(不用绝对值符号)表示下列不等式的解:

(1) $|x-a|<|x-b|$;

解 (ⅰ)若 $x\leqslant b$，$\Rightarrow x-b<x-a<b-x$，$\Rightarrow\begin{cases}b>a,\\x<\dfrac{a+b}{2},\end{cases}$

即 当 $b>a$ 时，$x<\dfrac{a+b}{2}$；

(ⅱ)若 $x>b$，$\Rightarrow b-x<x-a<x-b$，$\Rightarrow\begin{cases}x>\dfrac{a+b}{2},\\b<a,\end{cases}$

即 当 $b<a$ 时，$x>\dfrac{a+b}{2}$.

(2) $|x-a|<x-b$；

解 $\begin{cases}x\geqslant b,\\b-x<x-a<x-b,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geqslant b,\\a>b,\\x>\dfrac{a+b}{2},\end{cases}\Rightarrow$仅当 $a>b$ 时有解：$x>\dfrac{a+b}{2}$.

(3) $|x^2-a|<b$.

解 $\begin{cases}b>0,\\-b<x^2-a<b,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b>0,\\x^2<a+b,\\x^2>a-b,\end{cases}$

(ⅰ)当 $a\geqslant b>0$ 时，

$\begin{cases}-\sqrt{a+b}<x<\sqrt{a+b},\\x<-\sqrt{a-b}\text{或}x>\sqrt{a-b},\end{cases}$

$\Rightarrow -\sqrt{a+b}<x<-\sqrt{a-b}$，或$\sqrt{a-b}<x<\sqrt{a+b}$；

(ⅱ)当 $b>0, a<b$，时

$\begin{cases}-\sqrt{a+b}<x<\sqrt{a+b},\\a+b>0,\end{cases}\Rightarrow$当 $-b<a<b$ 时，有 $-\sqrt{a+b}<x<\sqrt{a+b}$.

§2 数集·确界原理

1. 区间表示下列不等式的解：

(1) $|1-x|-x\geqslant 0$；

解 $\begin{cases}x\leqslant 1,\\1-2x\geqslant 0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}x\leqslant 1,\\x\leqslant\dfrac{1}{2},\end{cases}$ 或$\begin{cases}x>1,\\x-1-x\geqslant 0,\end{cases}$ 无解，故 $x\in\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$.

(2) $\left|x+\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 6$；

解 (ⅰ)$\begin{cases} x>0, \\ x^2-6x+1\leqslant 0, \end{cases} \Rightarrow 3-\sqrt{8}\leqslant x\leqslant 3+\sqrt{8}$;

(ⅱ)$\begin{cases} x<0, \\ x^2+6x+1\leqslant 0, \end{cases} \Rightarrow -3-\sqrt{8}\leqslant x\leqslant -3+\sqrt{8}$;

综上结果:$x\in[-3-\sqrt{8},-3+\sqrt{8}]\cup[3-\sqrt{8},3+\sqrt{8}]$.

(3)$(x-a)(x-b)(x-c)>0$ (a,b,c 为常数,且 $a<b<c$);

解 (ⅰ)若 $x\leqslant a$,则$\begin{cases} x-a\leqslant 0, \\ x-b<0, \\ x-c<0, \end{cases} \Rightarrow (x-a)(x-b)(x-c)\leqslant 0$.原不等式无解;

(ⅱ)若 $a<x\leqslant b$,则$\begin{cases} x-a>0, \\ x-b\leqslant 0, \\ x-c<0, \end{cases} \Rightarrow (x-a)(x-b)(x-c)\geqslant 0$.这里等号仅在 $x=b$ 处成立;

(ⅲ)若 $b<x\leqslant c$,则$\begin{cases} x-a>0, \\ x-b>0, \\ x-c\leqslant 0, \end{cases} \Rightarrow (x-a)(x-b)(x-c)\leqslant 0$.原不等式无解;

(ⅳ)若 $x>c$,则$(x-a)(x-b)(x-c)>0$;

综上结果:$x\in(a,b)\cup(c,+\infty)$.

(4)$\sin x\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$.

解 在$[0,2\pi]$上,仅当$\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{4}$时,有 $\sin x\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$,故

$$x\in\left[2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{3\pi}{4}\right],k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots.$$

2.设 S 为非空数集,试对下列概念给出定义:

(1)S 无上界;

定义:设 S 为非空数集,若$\forall M>0$,$\exists x\in S$,有 $x>M$,则称数集 S 无上界.

(2)S 无界.

定义:设 S 为非空数集,若对$\forall M>0$,$\exists x_1,x_2\in S$,有 $x_1<-M$,$x_2>M$,则称数集 S 无界.

3.试证明 $S=\{y\mid y=2-x^2,x\in\mathbf{R}\}$有上界而无下界.

证 $S=\{y\mid y=2-x^2,x\in\mathbf{R}\}$.

因$\forall x\in\mathbf{R}$,有 $x^2\geqslant 0$,故$\forall y\in S$,有 $y=2-x^2<3$,所以 S 有上界;

而对$\forall M>0$,只要$|x|>\sqrt{2+M}$,就有 $y=2-x^2<2-(2+M)=-M$,

故 $\exists y\in S$，使 $y<-M$，所以 S 无下界.

4.求下列数集的上、下确界，并依定义加以验证：

(1) $S=\{x\mid x^2<2\}$；

解　$\sup S=\sqrt{2}$. 因 $\forall x\in S$，有 $x^2<2,\Longrightarrow -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$，故$\sqrt{2}$是 S 的上界.

对 $\forall \alpha<\sqrt{2}$，由有理数的稠密性，$\exists r\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})\cap(\alpha,\sqrt{2})$，即 $r>\alpha$ 且$r\in S$.

依定义 $\sup S=\sqrt{2}$；

类似可证：$\inf S=-\sqrt{2}$.

(2) $S=\{x\mid x=n!,n\in\mathbf{N}_+\}$；

解　S 无上界，但 $\inf S=1$.

(ⅰ)对 $\forall M>0$，取 $n=[M]+1\in\mathbf{N}_+$，而 $x=n!\geqslant n>M$，故 S 无上界.

(ⅱ)对 $\forall n\in\mathbf{N}_+$，均有 $x=n!\geqslant 1$，且对 $\forall \beta>1$，

$\exists 1\in\mathbf{N}_+$ 及 $x_0=1!=1\in S$，有 $x_0<\beta$.

故 $\inf S=1$.

(3) $S=\{x\mid x$ 为$(0,1)$内的无理数$\}$；

解　$\sup S=1,\inf S=0$.

因对 $\forall x\in S\quad\Rightarrow\quad 0<x<1$，且对 $\forall \beta>0$，由无理数的稠密性，

$\exists r\in S$，使 $0<r<\beta$. 故 $\inf S=0$.

同理可证：$\sup S=1$.

(4) $S=\left\{x\,\middle|\,x=1-\dfrac{1}{2^n},n\in\mathbf{N}_+\right\}$.

解　$\sup S=1,\inf S=\dfrac{1}{2}$.

(ⅰ) $\forall x=1-\dfrac{1}{2^n}\in S,n\in\mathbf{N}_+$，有 $x<1$. 而对 $\forall \alpha>1$：若 $\alpha<\dfrac{1}{2}$，则有 $x_1=1-\dfrac{1}{2}\in S$，使 $x_1>\alpha$；若$\dfrac{1}{2}\leqslant\alpha<1$，则取 $n_0=\left[\dfrac{\lg\dfrac{1}{1-\alpha}}{\lg 2}\right]+1>\dfrac{\lg\dfrac{1}{1-\alpha}}{\lg 2}$，这时 $2^{n_0}>\dfrac{1}{1-\alpha}$，$\exists x_0=1-\dfrac{1}{2^{n_0}}>\alpha$，有 $x_0\in S$. 故 $\sup S=1$.

(ⅱ)当 $n=1$ 时，$x=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$. 而 $n>1$ 时，$x=1-\dfrac{1}{2^n}>1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$，所以$\dfrac{1}{2}$是 S 的下界；且对 $\forall \beta>\dfrac{1}{2}$，$\exists 1\in\mathbf{N}_+,x_1=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\in S$，使 $x_1<\beta$.

故 $\inf S=\dfrac{1}{2}$.

5.设 S 为非空有下界数集，证明：$\inf S=\xi\in S\Leftrightarrow\xi=\min S$.

证 若 $\inf S=\xi\in S\Rightarrow\forall x\in S$,有 $x\geqslant\xi$,由于 $\xi\in S$,故 $\xi=\min S$.

反之,若 $\xi=\min S\Rightarrow\forall x\in S$,有 $x\geqslant\xi$,且对 $\forall\beta>\xi$, $\exists\xi\in S$,使 $\xi<\beta$,

故 $\inf S=\xi$.

6. 设 S 为非空数集,定义 $S^-=\{x\mid -x\in S\}$,证明:

(1) $\inf S^-=-\sup S$;

证 设 $\xi=\sup S\Rightarrow\forall -x\in S$,有 $-x\leqslant\xi$,从而 $x\geqslant-\xi$,且 $\forall\alpha<\xi$,

$\exists -x_0\in S$,使 $-x_0>\alpha$,即 $x_0<-\alpha(-\alpha>-\xi)$.

故 $\inf S^-=-\sup S$.

(2) $\sup S^-=-\inf S$.

证 由定义得 $(S^-)^-=S$,

故由(1)得 $\inf S=\inf(S^-)^-$

$=-\sup S^-\Rightarrow\sup S^-=-\inf S$.

7. 设 A,B 皆为非空有界数集,定义数集 $A+B=\{z\mid z=x+y,x\in A,y\in B\}$.证明:

(1) $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$;

证 设 $\xi_1=\sup A,\xi_2=\sup B\Rightarrow\forall x\in A,y\in B$ 有 $x\leqslant\xi_1,y\leqslant\xi_2\Rightarrow$

$\forall z\in A+B,\exists x\in A,y\in B$,使 $z=x+y\leqslant\xi_1+\xi_2$;

而 $\forall\alpha<\xi_1+\xi_2$,记 $a=\xi_1+\xi_2-\alpha>0$,则取 $\alpha_1=\xi_1-\dfrac{a}{2}<\xi_1,\alpha_2=\xi_2-\dfrac{a}{2}<\xi_2$,

由上确界性质, $\exists x_0\in A$,使 $x_0>\alpha_1$; $\exists y_0\in B$,使 $y_0>\alpha_2\Rightarrow$

$\exists z_0=x_0+y_0\in A+B$,使 $z_0>\alpha_1+\alpha_2=\alpha$.

综上得 $\sup(A+B)=\xi_1+\xi_2=\sup A+\sup B$.

(2) $\inf(A+B)=\inf A+\inf B$.

证 设 $\eta_1=\inf A,\eta_2=\inf B,\Rightarrow\forall x\in A,y\in B$,有 $x\geqslant\eta_1,y\geqslant\eta_2$.

故 $\forall z\in A+B$ 有 $z=x+y\geqslant\eta_1+\eta_2$;而 $\forall\beta>\eta_1+\eta_2$,记 $b=\beta-\eta_1-\eta_2>0$,

取 $\beta_1=\eta_1+\dfrac{b}{2}>\eta_1,\beta_2=\eta_2+\dfrac{b}{2}>\eta_2$,由下确界性质, $\exists x_1\in A$,使 $x_1<\beta_1$;

$\exists y_1\in B$,使 $y_1<\beta_2\Rightarrow\exists z_1=x_1+y_1\in A+B$,使 $z_1>\beta_1+\beta_2=\beta$.

综上得 $\inf(A+B)=\eta_1+\eta_2=\inf A+\inf B$.

8. 设 $a>0,a\neq1,x$ 为有理数,证明:

$$a^x=\begin{cases}\sup\{a^r\mid r\text{ 为有理数},r<x\}, & \text{当 } a>1,\\ \inf\{a^r\mid r\text{ 为有理数},r<x\}, & \text{当 } a<1.\end{cases}$$

证 (i)若 $a>1$,记 $S=\{a^r\mid r$ 为有理数, $r<x\}$.对 $\forall a^r\in S$,因 $r<x\Rightarrow$

$a^r<a^x$,故 a^x 是 S 的上界;而 $\forall\, \alpha<a^x$:若 $\alpha\leqslant 0$,显然对 $\forall\, a^r\in S$,均有 $a^r>\alpha$;
若 $\alpha>0 \Longrightarrow \log_a\alpha<\log_a a^x=x$,根据有理数的稠密性,$\exists\, r_0$,$r_0$ 为有理数,
使 $\log_a\alpha<r_0<x \Longrightarrow a^{r_0}>\alpha$,且 $a^{r_0}\in S$,所以 $a^x=\sup S$.

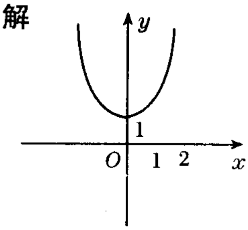
(ⅱ)若 $0<a<1$,记 $S_1=\{a^r\mid r$ 为有理数,$r<x\}$.对 $\forall\, a^r\in S_1$,因 $r<x \Longrightarrow a^r>a^x$,故 a^x 是 S_1 的下界;而 $\forall\, \beta>a^x \Longrightarrow \log_a\beta<\log_a a^x=x$,根据有理数的稠密性,$\exists\, r_1$,$r_1$ 为有理数,使 $\log_a\beta<r_1<x \Longrightarrow a^{r_1}<\beta$,且 $a^{r_1}\in S_1$,
所以 $a^x=\inf S_1$.

§3　函数概念

1.试作下列函数的图像.

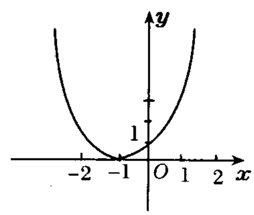
(1)$y=x^2+1$;

解



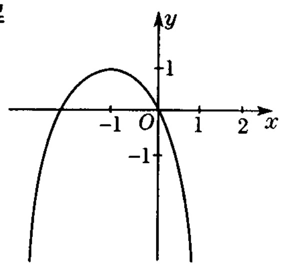
(2)$y=(x+1)^2$;

解



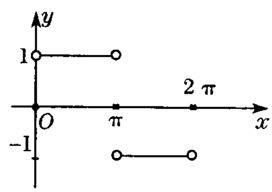
(3)$y=1-(x+1)^2$;

解



(4)$y=\operatorname{sgn}(\sin x)$;

解 周期 $t=2\pi$



(5)$y=\begin{cases}3x, & |x|>1,\\ x^3, & |x|<1,\\ 3, & |x|=1.\end{cases}$

解