精品课堂

谭欣欣 刚家泰◎编著

复变函数习题全解全析

（配西安交大复变函数第四版）

大连理工大学出版社
Dalian University of Technology Press

高等学校数学学习辅导教材

复变函数习题全解全析

·精品课堂·

（配西安交大复变函数第四版）

谭欣欣　刚家泰　编著

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

复变函数习题全解全析·精品课堂 / 谭欣欣，刚家泰编著．
大连：大连理工大学出版社，2004.10
ISBN 7-5611-2572-0

Ⅰ．复…　Ⅱ．①谭…　②刚…　Ⅲ．复变函数—高等学校—解题　Ⅳ．O174.5-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 024258 号

大连理工大学出版社出版
地址：大连市凌水河　邮政编码：116024
电话：0411-84708842　传真：0411-84701466　邮购：0411-84707961
E-mail：dutp@dutp.cn　URL：http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷　　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸：140mm×203mm　印张：7.25　字数：226 千字
印数：1～5 000
2004 年 10 月第 1 版　　2004 年 10 月第 1 次印刷

责任编辑：王　纪　　责任校对：杨　莉
封面设计：孙宝福

定价：12.00 元

编者的话

·应用更便利·基础更扎实·学习更容易·

《复变函数》是物理、数学及电类各专业必修的一门基础课，也是相关专业硕士研究生入学考试的一门必考科目。

近年来，复变函数方面的学习指导书种类逐渐增多，学生们每人手中持有一种乃至数种。这其中不乏精品之作，但多数又不尽如人意。作为从教多年的教师，看到学生们渴望知识的热情，以及应试的压力，强烈的责任感驱使我们有一种将多年教学经验述于纸面的冲动，同样的责任感又使得我们迟迟没有动笔，生怕在已有的热闹非凡的出版市场上平添平庸之作，浪费时间，浪费纸张，浪费资源。

大连理工大学出版社提出要组织一套《经典教材习题全解全析·精品课堂》教学参考书，其中包括《复变函数习题全解全析·精品课堂》，编辑们对图书清晰的思路和准确的定位，与我们的想法一拍即合，立即触发了我

们的编写欲望。我们多次征求本科生、专科生乃至研究生的意见，更加坚定了我们写好本书的信心，进一步明确了本书的定位，这就是——像习题课一样，与学生们一起通过对习题的分析、讨论、求解和总结，扎实掌握复变函数的基础，领悟复变函数的真谛。

这就是我们写作本书的初衷。

全解全析

西安交通大学《复变函数》，现在已经推出第四版。作为教科书，该书体系完整，层次清晰，叙述深入浅出，在改革教材层出不穷的今天，仍享有其他教材无法比拟的地位，深受广大教师和学生的喜爱。

《复变函数习题全解全析·精品课堂》与西安交通大学第四版教材配套，这样，学生使用更为方便。

全解 详细给出全部习题的解答。真正从学习者的角度，给出解题的每一个过程与步骤，以免略掉一些看似简单但对有些同学理解解题思路很关键的细节。

全析 在解题过程中，将习题分成三个层次：

第一层次为基本题，直接给出详细解答过程。对于其中的典型题，给出有针对性的提示和点拨。

第二层次为多知识点综合题。解题全过程控制：首先给出思路，题中重点点拨，题后归纳梳理出知识点、解题方法等。

第三层次为灵活题和难题。除给出思路、分析指导

外，还给出一题多解，举一反三等，并且提示“如何才能得到答案”，如何寻求“好的解题方法”，从而真正提高学生分析问题和解决问题的能力。

精品课堂

目前同类书大多按“知识点归纳、内容导学、本章知识结构、习题全解”板块书写，但解题过程平铺直叙，没有重点提示、难题导引及综合题分析，碰到难题、综合题，学生则需揣摩作者的解题思路，理解起来有一定难度。

市场调查反馈信息说明，许多学生反映已有图书中有的步骤变化弄不懂，再遇到这样类型的题，稍加变化还是不知如何下手，甚至咬不准是自己不理解，还是书上答案给错了。

本书在给出习题的详细解答步骤的同时，随时将重点题、难题和综合题给予分析、点拨、总结，帮助学生理解、归纳、上升，如同习题课上教师边讲解、学生边练习一样。从而真正帮助学生彻底掌握所学内容。

因此，此套书辅名为——精品课堂。

学习是一个过程，过程由环节组成，注重环节，控制过程，才能得到良好的学习效果。对学习复变函数来讲，课堂听讲和课后复习是两个重要环节。

我们深信本书会成为补充课堂听讲、辅助课后复习的好帮手。

附录我们选编了兰州大学(2000年)和北京大学(2002年)两套期末试卷,作为“综合测试题”,并给出参考解答。在此向北京大学孙山泽教授和兰州大学王海明教授表示衷心感谢!

我们在此还要特别感谢大连海事大学杜祖缔教授在百忙之中认真审阅了全书。

由于编者水平有限,不妥与错误之处在所难免,恳请读者与专家批评指正。

编　者

2004年10月于大连

目　录

第一章　复数与复变函数

1. 求下列复数 z 的实部与虚部，共轭复数，模与辐角：

(1) $\dfrac{1}{3+2\mathrm{i}}$　　(2) $\dfrac{1}{\mathrm{i}}-\dfrac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$

(3) $\dfrac{(3+4\mathrm{i})(2-5\mathrm{i})}{2\mathrm{i}}$　　(4) $\mathrm{i}^8-4\mathrm{i}^{21}+\mathrm{i}$

为了求复数 z 的实部与虚部，共轭复数及其模与辐角，应先将复数 z 化成 $x+\mathrm{i}y$ 的形式（其中 x,y 为实数）。

解　(1) $z=\dfrac{1}{3+2\mathrm{i}}=\dfrac{3-2\mathrm{i}}{(3+2\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})}=\dfrac{3-2\mathrm{i}}{13}=\dfrac{3}{13}-\dfrac{2}{13}\mathrm{i}$

$\mathrm{Re}(z)=\dfrac{3}{13}$，　$\mathrm{Im}(z)=-\dfrac{2}{13}$，　$\bar{z}=\dfrac{3}{13}+\dfrac{2}{13}\mathrm{i}$

$$|z|=\sqrt{\left(\frac{3}{13}\right)^2+\left(-\frac{2}{13}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{13}$$

$$\arg z=\arctan\frac{-\frac{2}{13}}{\frac{3}{13}}=-\arctan\frac{2}{3}$$

(2) $z=\dfrac{1}{\mathrm{i}}-\dfrac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=-\mathrm{i}-\dfrac{3\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=-\mathrm{i}-\left(-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}\right)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{2}\mathrm{i}$

$\mathrm{Re}(z)=\dfrac{3}{2}$，　$\mathrm{Im}(z)=-\dfrac{5}{2}$，　$\bar{z}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}\mathrm{i}$

$$|z|=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{34}}{2}$$

$$\arg z=\arctan\frac{-\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}}=-\arctan\frac{5}{3}$$

(3) $z=\dfrac{(3+4\mathrm{i})(2-5\mathrm{i})}{2\mathrm{i}}=\dfrac{26-7\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}=\dfrac{(26-7\mathrm{i})\mathrm{i}}{2\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}}=\dfrac{7+26\mathrm{i}}{-2}=-\dfrac{7}{2}-13\mathrm{i}$

$\mathrm{Re}(z)=-\dfrac{7}{2}$，　$\mathrm{Im}(z)=-13$，　$\bar{z}=-\dfrac{7}{2}+13\mathrm{i}$

$$|z|=\sqrt{\left(-\frac{7}{2}\right)^2+(-13)^2}=\frac{5}{2}\sqrt{29}$$

$$\arg z=\arctan\frac{-13}{-\frac{7}{2}}-\pi=\arctan\frac{26}{7}-\pi$$

(4) $z=i^8-4i^{21}+i=1-3i$

$\mathrm{Re}(z)=1$, $\mathrm{Im}(z)=-3$, $\bar{z}=1+3i$

$$|z|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$$

$$\arg z=\arctan\frac{-3}{1}=-\arctan 3$$

①复数 $z(z\neq 0)$ 的辐角主值 $\arg z$ 只有一个值，而辐角 $\mathrm{Arg}z=2k\pi+\arg z$（$k$ 为任意整数）有无穷多个值，只要确定了辐角主值 $\arg z$，辐角 $\mathrm{Arg}z$ 也就确定了。故在本题的解答过程中只给出了 $\arg z$ 的值。

②确定复数 $z=x+iy(z\neq 0)$ 的辐角主值 $\arg z$，关键是熟知 $\arg z$ 与 $\arctan\frac{y}{x}$ 的关系：

$$\arg_{z\neq 0} z=\begin{cases}\arctan\frac{y}{x}, & x>0\\ \pm\frac{\pi}{2}, & x=0,y\neq 0\\ \arctan\frac{y}{x}+\pi, & x<0,y>0\\ \arctan\frac{y}{x}-\pi, & x<0,y<0\\ \pi, & x<0,y=0\end{cases}$$

其中 $-\frac{\pi}{2}<\arctan\frac{y}{x}<\frac{\pi}{2}$。

---

2. 当 x,y 等于什么实数时，等式

$$\frac{x+1+i(y-3)}{5+3i}=1+i$$

成立？

应首先将等式左端的复数化成 $x+\mathrm{i}y$ 的形式，然后根据两个复数相等的定义，比较等式左右两端的实部与虚部，建立关于 x,y 的方程组求解。

解 由于

$$\frac{x+1+\mathrm{i}(y-3)}{5+3\mathrm{i}}=\frac{(5x+3y-4)+\mathrm{i}(-3x+5y-18)}{34}$$

根据复数相等的定义，有

$$\begin{cases}\dfrac{5x+3y-4}{34}=1\\[2mm]\dfrac{-3x+5y-18}{34}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=11\end{cases}$$

故当 $x=1,y=11$ 时，等式成立。

---

3. 证明虚数单位 i 有这样的性质：

$$-\mathrm{i}=\mathrm{i}^{-1}=\overline{\mathrm{i}}$$

证明 因为

$$\mathrm{i}^{-1}=\frac{1}{\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2}=-\mathrm{i}$$

$$\overline{\mathrm{i}}=\overline{0+\mathrm{i}}=0-\mathrm{i}=-\mathrm{i}$$

所以

$$-\mathrm{i}=\mathrm{i}^{-1}=\overline{\mathrm{i}}$$

---

4. 证明：(1) $|z|^2=z\cdot\overline{z}$　　(2) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z}_1\pm\overline{z}_2$

(3) $\overline{z_1z_2}=\overline{z}_1\overline{z}_2$　　(4) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2},z_2\neq0$

(5) $\overline{\overline{z}}=z$　　(6) $\mathrm{Re}(z)=\dfrac{1}{2}(\overline{z}+z)$

(7) $\mathrm{Im}(z)=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(z-\overline{z})$

本题主要涉及共轭复数的概念及其性质，而且共轭复数的定义采用复数的代数表示形式，故可将复数用代数式表示，再进行验证。

证明 (1) 设 $z=x+\mathrm{i}y$，则

$$|z|^2=x^2+y^2,z\cdot\overline{z}=(x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y)=x^2+y^2$$

故

$$|z|^2=z\cdot\overline{z}$$

(2) 设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1,z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，则

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{(x_1+\mathrm{i}y_1)\pm(x_2+\mathrm{i}y_2)} = \overline{(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2)}$$
$$=(x_1\pm x_2)-\mathrm{i}(y_1\pm y_2)$$
$$\bar{z}_1\pm\bar{z}_2 = \overline{(x_1+\mathrm{i}y_1)}\pm\overline{(x_2+\mathrm{i}y_2)} = (x_1-\mathrm{i}y_1)\pm(x_2-\mathrm{i}y_2)$$
$$=(x_1\pm x_2)-\mathrm{i}(y_1\pm y_2)$$

故
$$\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$$

(3)设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1, z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$,则
$$\overline{z_1z_2}=\overline{(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)}=\overline{(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)}$$
$$=(x_1x_2-y_1y_2)-\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)$$
$$\bar{z}_1\bar{z}_2=\overline{(x_1+\mathrm{i}y_1)}\ \overline{(x_2+\mathrm{i}y_2)}=(x_1-\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)$$
$$=(x_1x_2-y_1y_2)-\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)$$

故
$$\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$$

(4)设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1, z_2=x_2+\mathrm{i}y_2\neq 0$,则
$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\overline{\left(\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}\right)}=\overline{\left[\frac{(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)}{(x_2+\mathrm{i}y_2)(x_2-\mathrm{i}y_2)}\right]}$$
$$=\overline{\left[\frac{(x_1x_2+y_1y_2)-\mathrm{i}(x_1y_2-x_2y_1)}{x_2^2+y_2^2}\right]}$$
$$=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2-x_2y_1)}{x_2^2+y_2^2}$$
$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}=\frac{\overline{(x_1+\mathrm{i}y_1)}}{\overline{(x_2+\mathrm{i}y_2)}}=\frac{x_1-\mathrm{i}y_1}{x_2-\mathrm{i}y_2}=\frac{(x_1-\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)}{(x_2-\mathrm{i}y_2)(x_2+\mathrm{i}y_2)}$$
$$=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2-x_2y_1)}{x_2^2+y_2^2}$$

故
$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

(5)设 $z=x+\mathrm{i}y$,则
$$\bar{z}=x-\mathrm{i}y,\ \bar{\bar{z}}=\overline{(x-\mathrm{i}y)}=x+\mathrm{i}y=z$$

故
$$\bar{\bar{z}}=z$$

(6)设 $z=x+\mathrm{i}y$,则 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$,$\mathrm{Re}(z)=x$
$$\frac{1}{2}(\bar{z}+z)=\frac{1}{2}[(x-\mathrm{i}y)+(x+\mathrm{i}y)]=x$$

故
$$\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{2}(\bar{z}+z)$$

(7)设 $z=x+\mathrm{i}y$,则 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$,$\mathrm{Im}(z)=y$

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})=\frac{1}{2\mathrm{i}}\cdot 2\mathrm{i}y=y$$

故
$$\mathrm{Im}(z)=\frac{1}{2}(z-\bar{z})$$

上述证明过程也可以采用复数的其他表示式，如指数表示式，三角表示式等。

---

5. 对任何 z，$z^2=|z|^2$ 是否成立？如果是，就给出证明。如果不是，对哪些 z 值才成立？

显然等式 $z^2=|z|^2$ 不恒成立，故本题就是要寻求等式成立的条件。

解　设 $z=x+\mathrm{i}y$，则

$$\begin{aligned} z^2=|z|^2 &\Leftrightarrow (x^2-y^2)+\mathrm{i}\cdot 2xy=x^2+y^2 \\ &\Leftrightarrow x^2-y^2=x^2+y^2,\text{且 } 2xy=0 \\ &\Leftrightarrow y=0,x\in\mathbf{R} \end{aligned}$$

故 $z^2=|z|^2$ 不是恒等式，只有当 $y=0$，即 z 为实数时才成立。

此题的结果表明：当数域由实数域扩充到复数范围后，实数域所具有的某些性质已经发生了变化。例如：任何两个实数都可以比较大小，但当两个复数不全为实数时，则不能比较其大小。

---

6. 当 $|z|\leqslant 1$ 时，求 $|z^n+a|$ 的最大值，其中 n 为正整数，a 为复数。

解　因为 $|z^n|=|z|^n$，所以

$$|z^n+a|\leqslant|z^n|+|a|=|z|^n+|a|\leqslant 1+|a|$$

上面的不等式当 z^n 与 a 同向且 $|z|=1$ 时等号成立，……故 $|z^n+a|$ 的最大值为 $1+|a|$。

三角不等式 $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$ 中等号成立的条件是（向量）z_1 与 z_2 同向。

---

7. 判断下列命题真假：

(1)若 c 为实常数，则 $c=\bar{c}$；　　(2)若 z 为纯虚数，则 $z\neq\bar{z}$；

(3) $\mathrm{i}<2\mathrm{i}$； (4)零的辐角是零；

(5)仅存在一个数 z，使得 $\frac{1}{z}=-z$； (6) $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$；

(7) $\frac{1}{\mathrm{i}}\overline{z}=\overline{\mathrm{i}z}$。

解 (1)真命题。因为 c 为实数，所以

$$\overline{c}=\overline{c+0\cdot\mathrm{i}}=c-0\cdot\mathrm{i}=c$$

即 $c=\overline{c}$。

(2)真命题。因为 z 为纯虚数，所以可设 $z=0+\mathrm{i}y,y\neq 0$，则 $\overline{z}=0-\mathrm{i}y$。由于 $y\neq 0$，所以 $\mathrm{i}y\neq -\mathrm{i}y$，即 $\overline{z}\neq z$。

(3)假命题。因为两个不全为实数的复数不能比较大小。

(4)假命题。因为复数 0 的辐角是任意的。

(5)假命题。设 $z=x+\mathrm{i}y$，则

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x+\mathrm{i}y}=\frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2},\quad -z=-x-\mathrm{i}y$$

因为若 $\frac{1}{z}=-z$，则有

$$\frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2}=-x-\mathrm{i}y \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\dfrac{x}{x^2+y^2}=-x\\[2ex]\dfrac{-y}{x^2+y^2}=-y\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}x=0\\y=\pm 1\end{cases}$$

所以存在两个复数 $z_1=\mathrm{i},z_2=-\mathrm{i}$，使得 $\frac{1}{z}=-z$。

(6)假命题。取 $z_1=\mathrm{i},z_2=-\mathrm{i}$，则 $|z_1+z_2|=0$，而 $|z_1|+|z_2|=2$，这时

$$|z_1+z_2|\neq|z_1|+|z_2|$$

一般情况下，$|z_1+z_2|\neq|z_1|+|z_2|$。

(7)真命题。设 $z=x+\mathrm{i}y$，则

$$\frac{1}{\mathrm{i}}\overline{z}=\frac{1}{\mathrm{i}}\overline{(x+\mathrm{i}y)}=-\mathrm{i}\cdot(x-\mathrm{i}y)=-y-\mathrm{i}x$$

$$\overline{\mathrm{i}z}=\overline{\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)}=\overline{(-y+\mathrm{i}x)}=-y-\mathrm{i}x$$

故

$$\frac{1}{\mathrm{i}}\overline{z}=\overline{\mathrm{i}z}$$

①当判断一个命题是假命题时，只需给出反例即可；当判断一个命题为真命题时，必须加以证明。

②本题的一些结果提醒我们，当实数域扩充到复数域时，实数的一些性质发生了变化，在学习过程中要特别引起重视。

---

8. 将下列复数化为三角表示式和指数表示式：

(1)i　　(2)-1

(3)$1+\mathrm{i}\sqrt{3}$　　(4)$1-\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$

(5)$\dfrac{2\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}}$　　(6)$\dfrac{(\cos5\varphi+\mathrm{i}\sin5\varphi)^2}{(\cos3\varphi-\mathrm{i}\sin3\varphi)^3}$

解　(1)由于 $r=|\mathrm{i}|=1,\theta=\arg\mathrm{i}=\dfrac{\pi}{2}$。因此，i 的三角表示式为

$$\mathrm{i}=\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}$$

i 的指数表示式为

$$\mathrm{i}=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$$

(2)因为 $r=|-1|=1,\theta=\arg(-1)=\pi$，所以 -1 的三角表示式为

$$-1=\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi$$

-1 的指数表示式为

$$-1=\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}$$

(3)因为 $r=\left|1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right|=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2,\arg\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)=\arctan\dfrac{\sqrt{3}}{1}=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ 的三角表示式为

$$1+\mathrm{i}\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ 的指数表示式为

$$1+\mathrm{i}\sqrt{3}=2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$$

(4)因为 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$，所以 $0\leqslant\dfrac{\varphi}{2}\leqslant\dfrac{\pi}{2},0\leqslant\dfrac{\pi-\varphi}{2}\leqslant\dfrac{\pi}{2}$。下面给出两种解法。

解法 1　因为

$$r=|z|=\sqrt{(1-\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi}=\sqrt{2(1-\cos\varphi)}$$

$$=\sqrt{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}=2\sin\frac{\varphi}{2}$$

当 $\varphi=0$ 时，$1-\cos\varphi=0$，$\sin\varphi=0$，$1-\cos\varphi+i\sin\varphi=0$ 的辐角任意；当 $0<\varphi\leqslant\pi$ 时，$1-\cos\varphi>0$，

$$\arg(1-\cos\varphi+i\sin\varphi)=\arctan\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}=\arctan\left(\cot\frac{\varphi}{2}\right)$$
$$=\arctan\left(\tan\frac{\pi-\varphi}{2}\right)=\frac{\pi-\varphi}{2}$$

所以，$1-\cos\varphi+i\sin\varphi$ 的三角表示式为

$$1-\cos\varphi+i\sin\varphi=2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\pi-\varphi}{2}+i\sin\frac{\pi-\varphi}{2}\right)$$

指数表示式为

$$1-\cos\varphi+i\sin\varphi=2\sin\frac{\varphi}{2}e^{\frac{\pi-\varphi}{2}i}$$

解法 2　因为 $1-\cos\varphi=2\sin^2\frac{\varphi}{2}$，$\sin\varphi=2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$，所以

$$1-\cos\varphi+i\sin\varphi=2\sin^2\frac{\varphi}{2}+i\cdot 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$$
$$=2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\sin\frac{\varphi}{2}+i\cos\frac{\varphi}{2}\right)$$
$$=2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\pi-\varphi}{2}+i\sin\frac{\pi-\varphi}{2}\right)\quad\text{（三角表示式）}$$
$$=2\sin\frac{\varphi}{2}e^{\frac{\pi-\varphi}{2}i}\quad\text{（指数表示式）}$$

(5)**解法 1**　因为

$$\frac{2i}{-1+i}=\frac{2i(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}=\frac{2-2i}{2}=1-i$$

$$r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2},\quad \arg(1-i)=\arctan\frac{-1}{1}=-\frac{\pi}{4}$$

所以 $\frac{2i}{-1+i}$ 的三角表示式为

$$\frac{2i}{-1+i}=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

指数表示式为

$$\frac{2i}{-1+i}=\sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

解法 2　因为

$$2\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)=2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$$

$$-1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}}$$

所以

$$\frac{2\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}}=\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)}$$

$$=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\qquad\text{（三角表示式）}$$

$$=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}\qquad\text{（指数表示式）}$$

(6)因为

$$\frac{(\cos5\varphi+\mathrm{i}\sin5\varphi)^2}{(\cos3\varphi-\mathrm{i}\sin3\varphi)^3}=\frac{\cos10\varphi+\mathrm{i}\sin10\varphi}{\cos9\varphi-\mathrm{i}\sin9\varphi}=\cos19\varphi+\mathrm{i}\sin19\varphi$$

所以其三角表示式为

$$\frac{(\cos5\varphi+\mathrm{i}\sin5\varphi)^2}{(\cos3\varphi-\mathrm{i}\sin3\varphi)^3}=\cos19\varphi+\mathrm{i}\sin19\varphi$$

指数表示式为

$$\frac{(\cos5\varphi+\mathrm{i}\sin5\varphi)^2}{(\cos3\varphi-\mathrm{i}\sin3\varphi)^3}=\mathrm{e}^{19\varphi\mathrm{i}}$$

---

9. 将下列坐标变换公式写成复数的形式：

(1)平移公式：$\begin{cases}x=x_1+a_1,\\y=y_1+b_1;\end{cases}$

(2)旋转公式：$\begin{cases}x=x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha,\\y=x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha。\end{cases}$

解　(1)设 $z=x+\mathrm{i}y$，$z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$a=a_1+\mathrm{i}b_1$，则平移公式 $\begin{cases}x=x_1+a_1\\y=y_1+b_1\end{cases}$ 的复数形式为 $z=z_1+a$。

(2)设 $z=x+\mathrm{i}y$，则因为

$$\begin{cases}x=x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha\\y=x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha\end{cases}$$

所以

$$z=x+\mathrm{i}y=(x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha)+\mathrm{i}(x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha)$$