普通高等教育“十五”国家级规划教材

（高职高专教育）

高等数学辅导

盛祥耀 编

高等教育出版社

普通高等教育“十五”国家级规划教材

（高职高专教育）

高等数学辅导

盛祥耀　编

高等教育出版社

内容提要

本书被列为教育部普通高等教育“十五”国家级规划教材，也是教育部高职高专规划教材。本书的编写原则为：以教育部颁布的“高等数学课程的教学基本要求”为依据；以学生在学习高等数学时所遇到的问题和困难，结合编者多年来所积累的教学经验为背景；充分考虑到高等数学本门学科自身的科学性和规律性；充分照顾到自学高等数学读者的要求综合编写而成。考虑到目前社会上没有一本为高职高专读者学习高等数学辅导书，书中绝大多数内容也适用于使用其他版本的高等数学的读者。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导/盛祥耀编. —北京：高等教育出版社，2003.7

ISBN 7-04-012401-7

Ⅰ.高… Ⅱ.盛… Ⅲ.高等数学-高等学校：技术学校-教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 014539 号

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100011
总　　机 010-82028899

购书热线 010-64054588
免费咨询 800-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn

经　　销 新华书店北京发行所
排　　版 高等教育出版社照排中心
印　　刷 河北新华印刷一厂

开　　本 787×1092　1/16
印　　张 26.75
字　　数 650 000

版　　次 2003 年 7 月第 1 版
印　　次 2003 年 7 月第 1 次印刷
定　　价 27.90 元

出版说明

为加强高职高专教育的教材建设工作,2000年教育部高等教育司颁发了《关于加强高职高专教育教材建设的若干意见》(教高司[2000]19号),提出了“力争经过5年的努力,编写、出版500本左右高职高专教育规划教材”的目标,并将高职高专教育规划教材的建设工作分为两步实施:先用2至3年时间,在继承原有教材建设成果的基础上,充分汲取近年来高职高专院校在探索培养高等技术应用性专门人才和教材建设方面取得的成功经验,解决好高职高专教育教材的有无问题;然后,再用2至3年的时间,在实施《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上,推出一批特色鲜明的高质量的高职高专教育教材。根据这一精神,有关院校和出版社从2000年秋季开始,积极组织编写和出版了一批“教育部高职高专规划教材”。这些高职高专规划教材是依据1999年教育部组织制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》(草案)和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》(草案)编写的,随着这些教材的陆续出版,基本上解决了高职高专教材的有无问题,完成了教育部高职高专规划教材建设工作的第一步。

2002年教育部确定了普通高等教育“十五”国家级教材规划选题,将高职高专教育规划教材纳入其中。“十五”国家级规划教材的建设将以“实施精品战略,抓好重点规划”为指导方针,重点抓好公共基础课、专业基础课和专业主干课教材的建设,特别要注意选择一部分原来基础较好的优秀教材进行修订使其逐步形成精品教材;同时还要扩大教材品种,实现教材系列配套,并处理好教材的统一性与多样化,基本教材与辅助教材、文字教材与软件教材的关系,在此基础上形成特色鲜明、一纲多本、优化配套的高职高专教育教材体系。

普通高等教育“十五”国家级规划教材(高职高专教育)适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校使用。

教育部高等教育司
2002年11月30日

前　言

高等数学课程是理工科学生必修的基础理论课，历来为学校和学生所重视，学好高等数学也是广大学生的心愿。近年来许多学校在开设高等数学课程时，都选用高等教育出版社出版的由盛祥耀任主编、潘鹊屏任副主编的适用于高职高专层次的“高等数学”教材，社会上广大读者也选用它。为满足广大读者的需要，编者专为此书写了学习辅导，以该书为辅导对象，通过学习这本辅导书，帮助读者学好高等数学，全面掌握教材的内容，紧密配合它的教学要求，达到教育部颁发的“高等数学课程的教学基本要求”。以还广大读者的宿愿。

考虑到目前社会上没有一本为高职高专读者学好高等数学的辅导书，本辅导书充分照顾到这一点，书中绝大多数内容也是使用其他版本的高等数学的读者所需要的。

编写这本辅导书时，编者考虑了以下的一些原则：以教育部颁布的“高等数学课程的教学基本要求”为依据；以学生在学习高等数学时所遇到的问题和困难，结合编者多年来所积累的教学经验为背景；充分考虑到高等数学本门学科自身的科学性和规律性；充分照顾到自学高等数学读者的要求，综合编写而成。

为全面达到“高等数学课程的教学基本要求”。本辅导书安排了有以下特色的问题和例题：为正确理解和掌握基本概念、基本理论和基本方法而设置的各种类型题；有为提高判断能力而设置的初学者易犯而不易察觉的似是而非的纠偏题；有一题多解开扩思路的启发题；有提高做题能力的综合题；也有为提高整体思维能力的总结题等。除此之外，编者还安排了教材中某些习题的分析和提示以及自我检查题。

编者的目标是为读者在学习高等数学时助一臂之力，能否达到此目的，还请读者评说。

请多提意见。

编　者

2002 年 10 月于清华园

目　　录

第一章　函数　极限　连续

§1 函　　数

一、内容提要

1. 函数的定义：设 D 为一个非空实数集合，若存在确定的对应规则 f，使得对于数集 D 中的任意一个数 x，按照 f 都有惟一确定的实数 y 与之对应，则称 f 是定义在集合 D 的函数．简记为 $y=f(x)$．

D 称为函数 $f(x)$ 的定义域．

2. 分段函数的定义：在定义域的不同范围内具有不同的表达式的函数称为分段函数．

3. 反函数的定义：设 $y=f(x)$ 是定义在 D 上的函数，其值域为 A．若对于数集 A 中每一个数 y，数集 D 中都有惟一的一个数 x，使 $f(x)=y$．这就是说 x 是 y 的函数，这个函数称为函数 $y=f(x)$ 的反函数．记为 $x=f^{-1}(y)$．习惯上记为 $y=f^{-1}(x)$．

4. 复合函数的定义：若函数 $y=F(u)$，定义域为 U_1，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 U_2，其中 $U_2\subseteq U_1$，则 y 通过变量 u 成为 x 的函数．这个函数称为由函数 $y=F(u)$ 和函数 $u=\varphi(x)$ 构成的复合函数．记为 $y=F(\varphi(x))$．

5. 基本初等函数的定义：幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 为任意实数）；指数函数 $y=a^{x}$（$a>0$ 且 $a\neq1$）；对数函数 $y=\log_{a}x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）；三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$ 和反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\mathrm{arccot}\, x$ 等五类函数统称为基本初等函数．

6. 初等函数的定义：由基本初等函数及常数经过有限次四则运算和有限次复合所构成，并且可以用一个数学式子表示的函数，称为初等函数．

7. 函数的奇偶性定义：设函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称，如果对于定义域中的任何 x，都有 $f(x)=f(-x)$，则称 $y=f(x)$ 为偶函数．如果都有 $f(-x)=-f(-x)$，则称 $y=f(x)$ 为奇函数．

8. 周期函数的定义：设函数 $y=f(x)$ 定义域为 $(-\infty,+\infty)$，若存在正数 T，使得对于一切实数 x，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为周期函数，人们规定：若 T 中存在一个最小正数 a，则称 a 为周期函数的最小周期，简称周期．

9. 函数的单调性定义：设 x_1,x_2 是区间 (a,b) 内的任意两个数．若当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称该函数在区间 (a,b) 内单调增加或称递增；若当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$ 则称该函数在区间 (a,b) 内单调减少或称递减．递增、递减统称为单调．

10. 函数的有界性定义：设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，若存在一个正数 M，对于区间

I 上任意的 x，都有 $|f(x)|\leqslant M$. 则称函数 $y=f(x)$ 在 I 上有界，该函数称为有界函数，M 称为界.

二、关于函数概念中的一些问题

例 1 什么条件下两个函数才是相同的？

函数是由其定义域与其对应规则所确定. 因此，对于两个函数来说，当且仅当它们的定义域和对应规则都分别相同时，才表示同一个函数.

问下列各对函数是表示同一个函数吗？

$y=(\sqrt{x})^2$ 与 $y=\sqrt{x^2}$；

$y=\dfrac{\sin x(1+\sin^2 x)}{\sin x}$ 与 $y=1+\sin^2 x$；

$y=\lg(x^2)$ 与 $y=2\lg x$；

$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1(x\neq 1)$.

前三对都表示不同的函数，因为它们的定义域不同，后一对是相同的，因为它们不仅定义域相同而且对应规则也相同.

例 2 在函数的公式表示法中，一个函数是否只能用一个式子表示？

我们来看一个例子，1 g 冰由 -10 ℃升到 10 ℃水的过程中，求它所吸收的热量 Q 与其温度 T 之间的函数关系. 由于冰的热容量为 0.5 cal/ ℃①，水的热容量为 1 cal/℃. 1 g 冰化为 1 g 水的溶解热为 80 cal. 因此，当温度由 -10 ℃升到 0 ℃冰的过程中 Q 与 T 的关系为 $Q=0.5(T+10)$，$(-10\leqslant T<0)$；由 1 g 0℃的冰变为 1 g 0℃水时的热容量为 80 cal；当 0℃的冰升到 10℃水的过程中 Q 与 T 的关系为 $Q=T+85(0<T\leqslant 10)$. 所以 Q 与 T 的关系应表示为

$$Q=\begin{cases}0.5(T+10), & -10\leqslant T<0,\\ T+85, & 0<T\leqslant 10.\end{cases}$$

这是一个分段函数，在区间 $[-10,0)$ 与 $(0,10]$ 上用不同式子表示，所以说一个函数只能用一个式子表示是不对的.

注意 由于函数关系的多样性，有时在定义域中的不同范围需要用不同的式子来表示，此刻不要认为是多个函数，而是一个函数用多个式子来表示.

例 3 若变量 x 与 y 不能用公式表示其相互间的关系时，能否说 x 与 y 不存在函数关系？

不能这样讲. 函数的表示法有三种：公式表示法；图形表示法；表格表示法. 公式表示法只是其中一种. 当函数关系不能用公式表示时，还可以用其他形式来表示. 所以当变量 x 与 y 之间不能用公式表示时，就不能讲不存在函数关系，例如用自动记录仪记录了一天中气温 T 与时间 t 的关系的曲线，它表示了 T 与 t 的函数关系. 但它很难用公式表示.

例 4 x 与 y 之间的一个方程，是否总能确定 y 与 x 之间是函数关系？

不，例如方程 $x^2+y^2+1=0$，对于任意 x 值（或 y 值），在实数范围内没有一个 y 值（或 x 值）能使方程 $x^2+y^2+1=0$ 满足，只有当 x 或 y 是复数时，才有可能满足该方程. 根据函数的定

---

① 1 cal = 4.186 8 J，按国家标准用“J”.

义，x 与 y 均应为实数.所以方程 $x^2+y^2+1=0$ 中的 x 与 y 不存在函数关系.

经过以上几个问题的讨论，可以总结出以下几点：

① 函数是由其定义域与对应规则所确定的，与因变量、自变量用什么记号无关.例如 $y=f(x)$ 与 $u=f(v)$ 是同一个函数(其中 x 与 v 均为自变量，y 与 u 均为因变量).

② 一个函数在其定义域中的不同范围内可以由不同式子表示.例如分段函数，不要把多个式子表示的一个函数，理解为多个函数.

③ x 与 y 之间的一个方程并不总能确定 x 与 y 之间是函数关系.

④ 函数的表示法具有多样性：公式表示法；图示法和表格表示法三种.当变量 x 和 y 之间的函数关系不能用公式表示时，不能说 x 与 y 之间不存在函数关系.

三、求函数的定义域

下列函数的定义域是求函数定义域的基础：

① $y=\dfrac{1}{x}$，$x\neq 0$；　　② $y=\sqrt{x}$，$x\geqslant 0$；

③ $y=\log_a x$，$x>0$；　　④ $y=\arcsin x$，$-1\leqslant x\leqslant 1$；

⑤ $y=\arccos x$，$-1\leqslant x\leqslant 1$.

例 1　求函数 $y=\arcsin\dfrac{x-2}{3}$ 的定义域.

解　因为 $y=\arcsin x$ 的定义域是 $-1\leqslant x\leqslant 1$，所以 $y=\arcsin\dfrac{x-2}{3}$ 的定义域必需满足

$$-1\leqslant\frac{x-2}{3}\leqslant 1.$$

各边乘 3，得

$$-3\leqslant x-2\leqslant 3.$$

各边加 2，得

$$-1\leqslant x\leqslant 5.$$

所以函数 $y=\arcsin\dfrac{x-2}{3}$ 的定义域为 $[-1,5]$.

例 2　求函数 $y=\sqrt{x^2-3x+2}$ 的定义域.

解　因为函数 $y=\sqrt{x}$ 的定义域为 $x\geqslant 0$，所以函数 $y=\sqrt{x^2-3x+2}$ 的定义域必需满足

$$x^2-3x+2\geqslant 0.$$

即

$$(x-1)(x-2)\geqslant 0.$$

解出不等式，其解为 $(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$.所以函数 $y=\sqrt{x^2-3x+2}$ 的定义域为 $(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$.

解此种乘积不等式时通常可用图解法解之.其步骤如下：① 令 $f(x)=(x-1)(x-2)$.求各乘积因子的零值点，$x=1$，$x=2$.

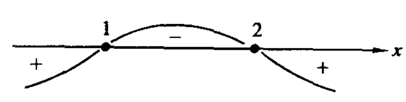

图　1-1

② $x=1$ 和 $x=2$ 将 x 轴分为区间：$(-\infty,1)$，$(1,2)$ 及

$(2,+\infty)$，逐个讨论 $f(x)$ 的正负号并在其上标出正负号.

③ 考虑各区间的端点是否为不等式的解.

从而得不等式 $(x-1)(x-2)\geqslant 0$ 的解为 $(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$.

例 3 求函数 $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$ 的定义域.

解 当 $\lg\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 0$ 时，函数有定义，而这就要求

$$\frac{5x-x^2}{4}\geqslant 1,$$

整理一下，得

$$(x-1)(x-4)\leqslant 0.$$

当 $x=1$，$x=4$ 时上述不等式成立. 所以函数 $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$ 的定义域为 $[1,4]$.

图 1－2

例 4 求函数 $y=\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-x-6}}$ 的定义域.

解 要求

$$\begin{cases}\dfrac{x+1}{x^2-x-6}\geqslant 0,\\ x^2-x-6\neq 0.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{x+1}{(x-3)(x+2)}\geqslant 0,\\ x\neq 3,x\neq -2.\end{cases}$$

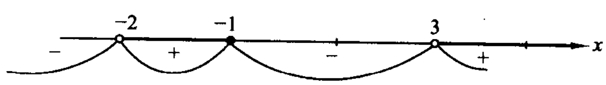

图 1－3

当 $x=-1$ 时满足不等式. 所以函数 $y=\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-x-6}}$ 的定义域为 $(-2,-1]\cup(3,+\infty)$.

例 5 求函数 $y=\sqrt{16-x^2}+\lg\sin x$ 的定义域.

解 当 $\sqrt{16-x^2}$ 与 $\lg\sin x$ 同时有定义时，函数才有定义，而这就要求满足下列不等式组

$$\begin{cases}16-x^2\geqslant 0,\\ \sin x>0.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}(4-x)(4+x)\geqslant 0,\\ \sin x>0.\end{cases}$$

第一个不等式容易解得

$$-4 \leqslant x \leqslant 4. \tag{1}$$

第二个不等式解得

$$2n\pi < x < (2n+1)\pi \quad (n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots). \tag{2}$$

(1),(2)公共解可由图形解得(共有部分,即黑线段).

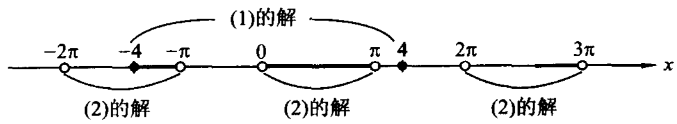

图 1-4

所以函数 $y=\sqrt{16-x^2}+\lg\sin x$ 的定义域为$[-4,-\pi)\cup(0,\pi)$.

这里要提醒大家,解不等式 $16-x^2 \geqslant 0$ 时,下述做法是错误的:

$$16-x^2 \geqslant 0,$$

$$x^2 \leqslant 16,$$

解得 $$x \leqslant \pm 4.$$

大家可以进一步思考:函数 $y=\sqrt{16-x^2}\cdot\lg\sin x$ 的定义域是什么?如果是 $y=\dfrac{\sqrt{16-x^2}}{\lg\sin x}$ 呢?前一个与原式定义域相同,后一个要除去原题的定义域中的 $x=\dfrac{\pi}{2}$.

四、函数的符号运算

例 1 设函数 $f(x)=\dfrac{1+x+x^2}{1+x}$, $x\neq -1$. 求 $f(0)$, $f(-x)$, $f(x+1)$, $f(x)+1$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $\dfrac{1}{f(x)}$.

解 将 x 用0代入 $f(0)=\dfrac{1+0+0^2}{1+0}=1$.

将 x 用 $-x$ 代入 $f(-x)=\dfrac{1+(-x)+(-x)^2}{1+(-x)}=\dfrac{1-x+x^2}{1-x}$,定义域 $x\neq 1$.

$f(x+1)=\dfrac{1+(x+1)+(x+1)^2}{1+(x+1)}=\dfrac{3+3x+x^2}{2+x}$,定义域 $x\neq -2$.

$f(x)+1=\dfrac{1+x+x^2}{1+x}+1=\dfrac{2+2x+x^2}{1+x}$,定义域 $x\neq -1$.

$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1+\dfrac{1}{x}+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}{1+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{(x^2+x+1)/x^2}{\dfrac{x+1}{x}}=\dfrac{x^2+x+1}{x(x+1)}$,定义域 $x\neq -1, x\neq 0$.

$\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{\dfrac{1+x+x^2}{1+x}}=\dfrac{1+x}{1+x+x^2}$,定义域 $x\neq -1$.

例 2 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & \text{当 } x\geqslant 0,\\ x^2+1, & \text{当 } x<0.\end{cases}$$

求 $f(0)$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$，$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$，$f(x+a)$（$a$ 为常数）.

解 $f(0)=\sin 0=0$ （注意 $x=0$ 不能代入 x^2+1 中）.

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$.

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+1=1+\frac{\pi^2}{4}$（注意 $x=-\frac{\pi}{2}$ 不能代入 $\sin x$ 中）.

计算 $f(x+a)$ 时，$x+a$ 代入到哪一个式子呢？这就要看 $x+a$ 是大于等于 0 呢？还是小于 0？因此我们要讨论：

当 $x+a\geqslant 0$ 时，就应将第一式 $\sin x$ 中的 x 用 $x+a$ 代入. 当 $x+a<0$ 时，应将第二式中 x 用 $x+a$ 代入，即

$$f(x+a)=\begin{cases}\sin(x+a), & \text{当 } x+a\geqslant 0,\\ (x+a)^2+1, & \text{当 } x+a<0.\end{cases}$$

即

$$f(x+a)=\begin{cases}\sin(x+a), & \text{当 } x\geqslant -a,\\ (x+a)^2+1, & \text{当 } x<-a.\end{cases}$$

由此可知下列做法是错误的

$$f(x+a)=\begin{cases}\sin(x+a), & \text{当 } x\geqslant 0,\\ (x+a)^2+1, & \text{当 } x<0.\end{cases}$$

例 3 设 $f(x+1)=x^2+x+1$，求 $f(x)$.

解法一 令 $u=1+x$，则 $x=u-1$ 代入，有

$$f(u)=(u-1)^2+(u-1)+1=u^2-u+1.$$

即 $f(x)=x^2-x+1$.

解法二 将 x^2+x+1 用 $(x+1)$ 来表示，为此先将 x^2 写为 $(x+1)^2-2x-1=(x+1)^2-2(x+1)+1$，再将 x 写为 $(x+1)-1$. 所以有

$$f(x+1)=(x+1)^2-2(x+1)+1+(x+1)-1+1=(x+1)^2-(x+1)+1.$$

即 $f(x)=x^2-x+1$.

方法二叫做凑法.

例 4 设函数 $f(\tan x)=\cos 2x$，求 $f(x)$.

解 如果用例 3 的解法一，即令 $\tan x=u$. 解 x 时，就出现多值的情况，不便讨论，我们用解法二.

$$\begin{aligned}f(\tan x)&=\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos^2 x(1-\tan^2 x)\\&=\frac{1}{\sec^2 x}(1-\tan^2 x)=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}.\end{aligned}$$

所以得 $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

五、求反函数

求反函数的步骤：第一步，由方程 $y=f(x)$ 解出 x. 第二步，将 x、y 分别写成 y、x. 这时所得

关系式即为 $y=f(x)$ 的反函数.

例 1 求函数 $y=\frac{1-x}{1+x}$ 的反函数.

解 由方程 $y=\frac{1-x}{1+x}$ 解出 x，得 $x=\frac{1-y}{1+y}$，再将 x、y 分别写为 y、x 得

$$y=\frac{1-x}{1+x}.$$

这就是 $y=\frac{1-x}{1+x}$ 的反函数，这是一个特例. 函数的反函数就是它自己.

例 2 求函数 $y=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$ 的反函数.

解 从上式中解 x，就会比较繁琐，我们用下法解之.

由 $y=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$，解得

$$x+\sqrt{1+x^2}=10^y, \tag{1}$$

将左边乘 $\sqrt{1+x^2}-x$ 再除 $\sqrt{1+x^2}-x$，得

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}=10^y,$$

即

$$\sqrt{1+x^2}-x=10^{-y}. \tag{2}$$

(1) − (2)整理后得

$$x=\frac{10^y-10^{-y}}{2},$$

将 x、y 分别换为 y、x，得

$$y=\frac{1}{2}(10^x-10^{-x}).$$

这就是 $y=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$ 的反函数.

例 3 求 $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$ 的反函数.

解 将

$$y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$$

两边立方，得

$$\begin{aligned}y^3&=x+\sqrt{1+x^2}+3\left(\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}\right)^2\left(\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}\right)\\&\quad+3\left(\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}\right)\left(\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}\right)^2+x-\sqrt{1+x^2},\end{aligned}$$

因为

$$\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}=-1 \text{ 及}$$

$$y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}},$$

可化简为

$$y^3=2x-3y,$$

从而得